

**СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА  
КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА**

*На основе трехмерной теории упругости изучается задача о свободных осесимметричных колебаниях неоднородных полых цилиндров конечной длины из функционально-градиентного материала при различных граничных условиях на торцах. Упругие свойства материала меняются непрерывно в радиальном направлении. Предложен численно-аналитический подход для решения сформулированной задачи. Исходная задача теории упругости в частных производных сводится к краевой задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка относительно радиальной координаты с помощью сплайн-аппроксимации и коллокации. Полученная одномерная задача решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Представлены результаты расчетов частот и форм колебаний цилиндра из функционально-градиентного материала, который является композицией нержавеющей стали и никеля, для различных типов граничных условий на торцах при различных значениях температуры.*

**Введение.** Недавно сформированная и активно развивающаяся теория функционально-градиентных материалов (ФГМ) концентрирует внимание исследователей на искусственно созданных неоднородных композиционных материалах с плавно изменяющимися в заданном направлении физическими свойствами, без каких-либо переходных слоев и границ раздела. Механические параметры таких материалов можно регулировать, задавая необходимое их распределение в каком-либо из направлений. ФГМ находят все большее применение в машиностроении, радиопромышленности, приборостроении, медицине. Особенности физико-механического строения ФГМ на основе различных композиций приведены в [5, 11, 14, 19].

Большой практический интерес и важное значение для дальнейшего развития фундаментальных исследований имеет изучение динамического поведения конструктивных элементов из ФГМ различных геометрических форм, в том числе и цилиндров конечной длины. Следует отметить, что одним из важных аспектов обеспечения эффективных режимов эксплуатации отмеченных упругих тел является получение информации о характеристиках их свободных колебаний. Повышенные требования, предъявляемые к оценкам прочностных свойств, стремление к более полному учету реальных свойств материалов, выявлению и изучению трехмерных эффектов, имеющих место в толстостенных элементах, приводят к необходимости проводить расчет динамических характеристик тел из ФГМ в пространственной постановке.

На сегодня существует относительно небольшое количество исследований динамического поведения упругих тел из ФГМ. В [9, 10, 13, 18] проведены исследования колебаний цилиндрических тел из ФГМ с применением различных оболочечных теорий. Задачи о механическом поведении пластин из ФГМ в рамках трехмерной теории упругости решены в работах [12, 20]. Отметим, что в научной литературе имеются только отдельные работы о колебаниях цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости, даже для случая однородного материала [8, 12, 15–17]. Поэтому большое значение имеет разработка и использование эффективных подходов к решению задач, посвященных определению динамических характеристик полых цилиндров конечной длины в пространственной постановке с непрерывной неоднородностью упругих свойств. Это позволит провести исследование колебаний цилиндров из ФГМ с высокой степенью точности в широком диапазоне изменения геометрических и механических параметров.

В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для решения задач динамики широко используются сплайн-функции. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн-приближений. К их числу можно отнести следующие: устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений (поведение сплайна в окрестности точки не оказывает влияния на поведение сплайна в целом, как, например, это имеет место при полиномиальном приближении), хорошая сходимости интерполяции сплайнами, в отличие от интерполяции многочленами; простота и удобство реализации алгоритмов построения и вычисления сплайнов на персональных компьютерах. Использование сплайн-функций в различных вариационных, проекционных и других дискретно-континуальных методах является более эффективным по сравнению с использованием классического аппарата многочленов, позволяет существенно упростить их численную реализацию и получить искомое решение с высокой степенью точности.

Отметим ряд публикаций, где метод сплайн-аппроксимации применялся для исследования механического поведения пластин и оболочек различной структуры и однородных цилиндров конечной длины [1–4, 6, 7].

В настоящей работе для решения указанного выше класса предлагается эффективный численно-аналитический подход к исследованию собственных частот и форм осесимметричных колебаний полых неоднородных цилиндров конечной длины при различных граничных условиях на торцах цилиндра [1], который базируется на применении сплайн-аппроксимации в одном из координатных направлений с последующим решением краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

**1. Основные соотношения.** Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  полый цилиндр постоянной толщины  $h$ , длина которого  $L$ , а радиус срединной поверхности  $R$ . Цилиндр изготовлен из ФГМ, который можно считать изотропным неоднородным вдоль координаты  $r$  материалом. В случае осесимметричных радиально-продольных колебаний компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций не зависят от окружной координаты  $\theta$ . При этом уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Соотношения Коши для осесимметричного случая запишутся следующим образом:

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} u_r, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2)  $u_r(r, z, t)$ ,  $u_z(r, z, t)$  – проекции вектора полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных соответственно к координатным линиям  $r$  и  $z$ ;  $e_r(r, z, t)$ ,  $e_\theta(r, z, t)$ ,  $e_z(r, z, t)$  – относительные линейные деформации в направлении координатных линий;  $e_{rz}(r, z, t)$  – деформация сдвига;  $\sigma_r(r, z, t)$ ,  $\sigma_\theta(r, z, t)$ ,  $\sigma_z(r, z, t)$  – нормальные напряжения;  $\sigma_{rz}(r, z, t)$  – касательное напряжение;  $t$  – временная координата.

Систему уравнений, описывающую радиально-продольные осесимметричные колебания цилиндра, дополняют соотношения обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda_{11} e_r + \lambda_{12} e_\theta + \lambda_{13} e_z, & \sigma_\theta &= \lambda_{12} e_r + \lambda_{22} e_\theta + \lambda_{23} e_z, \\ \sigma_z &= \lambda_{13} e_r + \lambda_{23} e_\theta + \lambda_{33} e_z, & \sigma_{rz} &= 2\lambda_{55} e_{rz}. \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагаем, что функционально-градиентный материал – неоднородный, но изотропный. При этом элементы матрицы жесткости  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r)$ , а также плотность материала  $\rho(r)$  цилиндра из ФГМ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями координаты  $r$ . Элементы  $\lambda_{ij}$  матрицы жесткости рассматриваемого материала можно вычислить, используя элементы  $c_{ij}$  матрицы податливости, по формулам

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= (c_{22}c_{33} - c_{23}^2) \frac{1}{\Delta}, & \lambda_{12} &= (c_{13}c_{23} - c_{12}c_{33}) \frac{1}{\Delta}, \\ \lambda_{13} &= (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \frac{1}{\Delta}, & \lambda_{22} &= (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) \frac{1}{\Delta}, \\ \lambda_{23} &= (c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}) \frac{1}{\Delta}, & \lambda_{33} &= (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) \frac{1}{\Delta}, & \lambda_{55} &= \frac{1}{c_{55}}, \\ \Delta &= c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2) - c_{12}(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}) + c_{13}(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}), \\ c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \frac{1}{E}, & c_{12} &= c_{13} = c_{23} = -\frac{\nu}{E}, & c_{55} &= -\frac{1}{G}.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь  $E$  – модуль упругости,  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Внутренняя  $r = R - h/2$  и внешняя  $r = R + h/2$  боковые поверхности цилиндра свободны от напряжений, и соответствующие граничные условия принимают вид

$$\sigma_r(R \pm h/2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(R \pm h/2, z, t) = 0.\tag{5}$$

На торцах цилиндра  $z = 0$  и  $z = L$  рассмотрим условия:

– шарнирного опирания

$$\sigma_r = 0, \quad u_r = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad u_r = 0;\tag{6}$$

– жесткого защемления

$$u_r = 0, \quad u_z = 0.\tag{7}$$

Предполагаем, что все точки цилиндра совершают гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$ , т. е. для всех входящих в систему (1)–(3) уравнений функций имеем  $f(r, z, t) = \tilde{f}(r, z)e^{i\omega t}$  (далее знак « $\sim$ » опускаем).

Разрешающие уравнения в перемещениях преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{11}u_r + a_{12} \frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{13} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{14} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{15} \frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= a_{21} \frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{22} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + a_{23}u_z + a_{24} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{25} \frac{\partial u_z}{\partial r} + a_{26} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z},\end{aligned}\tag{8}$$

где коэффициенты  $a_{11} = a_{11}(r, \omega)$ ,  $a_{24} = a_{24}(r, \omega)$  и  $a_{k\ell} = a_{k\ell}(r)$ ,  $(k, \ell) \in \{(k, \ell) \mid k = 1, 2, \ell = 1, \dots, 6\}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}a_{11} &= -\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\lambda_{11}} \rho \omega^2, & a_{12} &= -\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial z}, \\ a_{13} &= -\frac{\lambda_{55}}{\lambda_{11}}, & a_{14} &= -\left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right), & a_{15} &= -\left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial r} - \frac{\lambda_{23} - \lambda_{13}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r} \right), \\ a_{16} &= -\frac{\lambda_{13} + \lambda_{55}}{\lambda_{11}}, & a_{21} &= -\left( \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= -\left(1 + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{55}}\right), & a_{23} &= -\frac{1}{\lambda_{55}}\rho\omega^2, \\
a_{24} &= -\frac{\lambda_{33}}{\lambda_{55}}, & a_{25} &= -\left(\frac{1}{r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}}\frac{1}{r}\right), & a_{26} &= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Граничные условия (5) на внутренней и внешней поверхностях в перемещениях запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_{12} \frac{u_r}{r} + \lambda_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \\
\lambda_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

**2. Метод решения.** Для решения системы уравнений (8) с соответствующими граничными условиями воспользуемся методом сплайн-коллокации [1]. Для этого разрешающие функции  $u_r(r, z)$ ,  $u_z(r, z)$  представим как

$$u_r = \sum_{i=0}^N u_{r_i}(r)\varphi_i^{(1)}(z), \quad u_z = \sum_{i=0}^N u_{z_i}(r)\varphi_i^{(2)}(z). \tag{11}$$

Здесь  $u_{r_i}(r)$ ,  $u_{z_i}(r)$  – искомые функции переменной  $r$ ;  $\varphi_i^{(j)}(z)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , – линейные комбинации  $B$ -сплайнов на равномерной сетке  $\Delta$ :  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$ . Поскольку в систему (8) входят производные от разрешающих функций по координате  $z$ , не выше второго порядка, то ограничимся аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени:

$$B_3^i(z) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < z < z_{i-2}, \\ y^3, & z_{i-2} \leq z < z_{i-1}, \\ -3y^3 + 3y^2 + 3y + 1, & z_{i-1} \leq z < z_i, \\ 3y^3 - 6y^2 + 4, & z_i \leq z < z_{i+1}, \\ (1-y)^3, & z_{i+1} \leq z < z_{i+2}, \\ 0, & z_{i+2} \leq z < \infty, \end{cases} \tag{12}$$

где  $y = \frac{z - z_k}{h_z}$  на интервале  $[z_k, z_{k+1}]$ ,  $k = i - 2, \dots, i + 1$ ;  $i = -1, \dots, N + 1$ ;

$h_z = z_{k+1} - z_k = \text{const}$ . При этом функции  $\varphi_i^{(j)}(z)$  формируются таким образом, чтобы удовлетворить граничные условия при  $z = 0$  и  $z = L$ :

– если соответствующая разрешающая функция ( $u_r$  или  $u_z$ ) при  $z = 0$  и  $z = L$  равна нулю, тогда имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_0^{(j)}(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z), \\
\varphi_1^{(j)}(z) &= B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z), \\
\varphi_i^{(j)}(z) &= B_3^i(z), \quad i = 2, 3, \dots, N - 2, \\
\varphi_{N-1}^{(j)}(z) &= B_3^{N-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z), \\
\varphi_N^{(j)}(z) &= -4B_3^{N+1}(z) + B_3^N(z);
\end{aligned} \tag{13}$$

– если производная разрешающей функции по  $z$  для значений  $z = 0$  и  $z = L$  равна нулю, тогда имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0^{(j)}(z) &= B_3^0(z), \\ \varphi_1^{(j)}(z) &= B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z), \\ \varphi_{ji}(z) &= B_3^i(z), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ \varphi_{N-1}^{(j)}(z) &= B_3^{N-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z), \\ \varphi_N^{(j)}(z) &= B_3^N(z).\end{aligned}\tag{14}$$

Подставляя представление (11) в систему (8), требуем удовлетворения уравнений в заданных точках коллокации  $\xi_k \in [0, L]$ ,  $k = 0, \dots, N$ . Число узлов сетки (с учетом  $z_0$ ) четное, т. е.  $N = 2n + 1$ ,  $n \geq 3$ . Выбор точек коллокации  $\xi_{2i} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$ ,  $\xi_{2i+1} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$  в виде  $\xi_{2i} = z_{2i} + s_1 h_z$ ,  $\xi_{2i+1} = z_{2i} + s_2 h_z$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , где  $s_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$  и  $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$  – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке  $[0, 1]$ , является оптимальным и существенно увеличивает порядок точности аппроксимации. Число точек коллокации при этом  $\bar{N} = N + 1$ .

В результате получаем систему  $4(N + 1)$  линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $u_{ri}$ ,  $\tilde{u}_{ri}$ ,  $u_{zi}$ ,  $\tilde{u}_{zi}$ ,  $i = 0, \dots, N$ :

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r, \omega)\bar{Y}, \quad R - H \leq r \leq R + H,\tag{15}$$

где  $\bar{Y} = \{u_{r0}, \dots, u_{rN}, \tilde{u}_{r0}, \dots, \tilde{u}_{rN}, u_{z0}, \dots, u_{zN}, \tilde{u}_{z0}, \dots, \tilde{u}_{zN}\}^\top$  – вектор-функция, зависящая от  $r$ ,  $\tilde{u}_{ri} = u'_{ri}$ ,  $\tilde{u}_{zi} = u'_{zi}$ ,  $A(r, \omega)$  – квадратная матрица порядка  $4(N + 1) \times 4(N + 1)$ .

Подставляя представление решения (11) в соотношения (10), получим граничные условия в матричной форме:

$$\begin{aligned}B_1 \bar{Y} \left( R - \frac{h}{2} \right) &= \bar{0}, \\ B_2 \bar{Y} \left( R + \frac{h}{2} \right) &= \bar{0},\end{aligned}\tag{16}$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – прямоугольные матрицы порядка  $2(N + 1) \times 4(N + 1)$ .

Краевую задачу (15), (16) на собственные значения можно решить, используя метод дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска [7].

**3. Анализ результатов.** Для оценки точности предложенной методики сравнивались (см. табл. 1) безразмерные частоты  $\bar{\omega} = \omega \ell_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}}$  колебаний однородного изотропного полого шарнирно опертого по краям цилиндра, вычисленные с ее использованием при различном числе  $\bar{N}$  точек коллокации, с частотами, рассчитанными также с использованием возможного в рассматриваемом случае представления перемещений в виде

$$u_r = \bar{u}_r(r) \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad u_z = \bar{u}_z(r) \cos \frac{m\pi z}{L}\tag{17}$$

с последующим применением метода дискретной ортогонализации без использования сплайнов. Механические и геометрические параметры ци-

цилиндра такие:  $\nu = 0.34$ ,  $R = 4\ell_0$ ,  $L = 10\ell_0$ ,  $h = 2\ell_0$ . Частоты свободных колебаний указанного цилиндра для различного числа точек коллокации  $\bar{N}$  представлены в табл. 1 ( $m$  – количество полуволн в направлении  $Oz$ ).

Таблица 1. Частоты свободных колебаний изотропного однородного цилиндра для различного числа точек коллокации  $\bar{N}$ .

$\bar{\omega}_i$	$m$	Метод сплайн-коллокации					Использование представления (17)
		$\bar{N}$					
		8	12	16	20	24	
$\bar{\omega}_1$	1	0.3890	0.3887	0.3887	0.3887	0.3886	0.3881
$\bar{\omega}_2$	2	0.5020	0.4963	0.4953	0.4950	0.4949	0.4943
$\bar{\omega}_3$	1	0.5890	0.5888	0.5888	0.5887	0.5887	0.5893
$\bar{\omega}_4$	3	0.7500	0.7135	0.7078	0.7062	0.7056	0.7043
$\bar{\omega}_5$	4	1.0345	1.0059	0.9876	0.9824	0.9805	0.9781

Представленные в табл. 1 результаты свидетельствуют о сходимости и достаточной точности применяемого метода сплайн-коллокации.

Рассматривались колебания цилиндра из функционально-градиентного материала, который является композицией нержавеющей стали и никеля. Свойства материалов в зависимости от температуры определяются по формуле [13]:

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3). \quad (18)$$

Коэффициенты  $P_i$  для определения свойств материалов представлены в табл. 2.

Вычисленные механические параметры для различных температур с использованием формулы (18) представлены в табл. 3.

Таблица 2. Коэффициенты для определения свойств материалов [6].

$P_i$	Нержавеющая сталь			Никель		
	$E$ , н/м <sup>2</sup>	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , н/м <sup>2</sup>	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
$P_0$	$201.04 \cdot 10^9$	0.3262	8166	$223.95 \cdot 10^9$	0.31	8900
$P_{-1}$	0	0	0	0	0	0
$P_1$	$3.079 \cdot 10^{-4}$	$-2.002 \cdot 10^{-4}$	0	$-2.794 \cdot 10^{-4}$	0	0
$P_2$	$-6.534 \cdot 10^{-7}$	$3.797 \cdot 10^{-7}$	0	$-3.998 \cdot 10^{-9}$	0	0
$P_3$	0	0	0	0	0	0

Таблица 3. Свойства материалов при различных температурах.

$T, K$	Нержавеющая сталь			Никель		
	$E$ , н/м <sup>2</sup>	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , н/м <sup>2</sup>	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
300	$2.07788 \cdot 10^{11}$	0.317756	8166	$2.05098 \cdot 10^{11}$	0.31	8900
350	$2.06614 \cdot 10^{11}$	0.318511	8166	$2.01940 \cdot 10^{11}$	0.31	8900
400	$2.04783 \cdot 10^{11}$	0.319895	8166	$1.98778 \cdot 10^{11}$	0.31	8900
450	$2.02295 \cdot 10^{11}$	0.321894	8166	$1.95611 \cdot 10^{11}$	0.31	8900
500	$1.99150 \cdot 10^{11}$	0.324512	8166	$1.92440 \cdot 10^{11}$	0.31	8900

Для наглядности зависимости модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  нержавеющей стали (линия 1) и никеля (линия 2) от температуры представлены в виде графиков соответственно на рис. 1 и рис. 2.

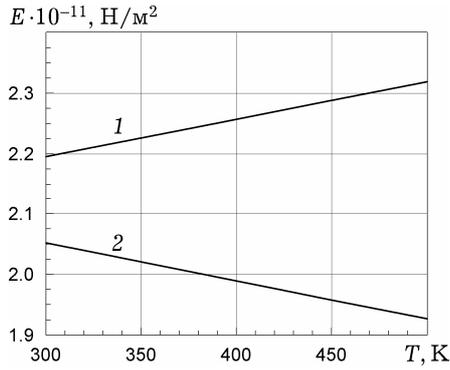


Рис. 1

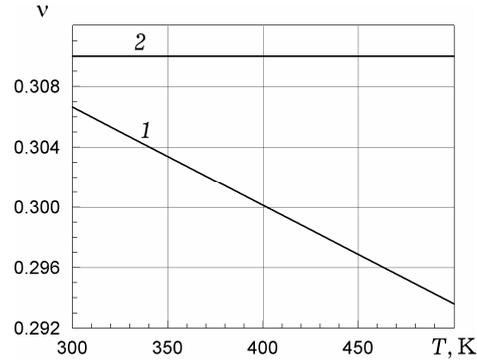


Рис. 2

Для функционально-градиентных материалов по типу «металл – металл» возможно представление [13]

$$E = (E_2 - E_1)V + E_1, \quad \nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1, \quad \rho = (\rho_2 - \rho_1)V + \rho_1, \quad (19)$$

где  $E_1, E_2$  – модули Юнга,  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона,  $\rho_1, \rho_2$  – плотности соответственно первого и второго металлов. При этом в большинстве случаев рассматривается степенной закон изменения концентрации  $V$  металла вдоль направления изменения свойств. Если концентрация  $V$  второго металла по толщине цилиндра изменяется от нуля до единицы, то ее можно представить в виде

$$V = \left( \frac{r + h/2}{h} \right)^M. \quad (20)$$

Изменение концентрации  $V$  нержавеющей стали и никеля по толщине цилиндра при различных значениях параметра  $M$ , который определяет соответствующий степенной закон в формуле (20), представлено на рис. 3 (для стали) и рис. 4 (для никеля). Конфигурация составляющих ФГМ такая: внутри цилиндра – никель, снаружи – нержавеющая сталь.

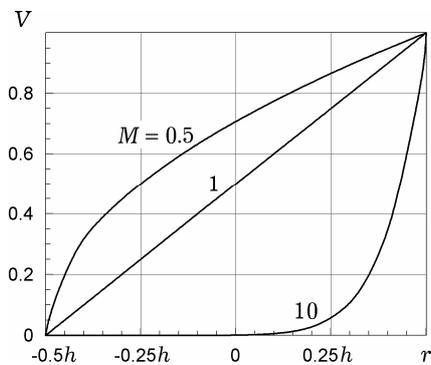


Рис. 3

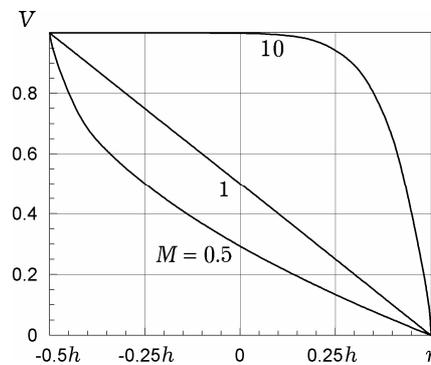


Рис. 4

Исследовались также свободные колебания полого цилиндра из ФГМ (композиция «никель–нержавеющая сталь»). В табл. 4, табл. 5 представ-

лены частоты  $\bar{\omega}_i = \omega_i \ell_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}}$ ,  $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$ ,  $G_0 = 10^9 \text{ Па}$  свободных колебаний

шарнирно опертых цилиндров при различных температурах для различных значений параметра  $M$ , определяющего закон изменения механических параметров по толщине цилиндра. Результаты расчетов, приведенные в табл. 4, выполнены для цилиндра с параметрами  $h = 2\ell_0$ ,  $R = 4\ell_0$ ,  $L = 20\ell_0$ , а в табл. 5 – для  $h = 2\ell_0$ ,  $R = 4\ell_0$ ,  $L = 5\ell_0$ .

Таблица 4. Частоты свободных колебаний шарнирно опертого цилиндра при различных температурах и различных  $M$  для  $h=2\ell_0$ ,  $R=4\ell_0$ ,  $L=20\ell_0$ .

$T, \text{ К}$	$\bar{\omega}_i$	$M$			
		$M = 0$	$M = 0.5$	$M = 1$	$M = 10$
300	$\bar{\omega}_1$	0.023174	0.023511	0.023686	0.024186
	$\bar{\omega}_2$	0.036361	0.036936	0.037236	0.037961
	$\bar{\omega}_3$	0.040199	0.040836	0.041161	0.041999
400	$\bar{\omega}_1$	0.022811	0.023195	0.023411	0.023986
	$\bar{\omega}_2$	0.035798	0.036473	0.036823	0.037649
	$\bar{\omega}_3$	0.039573	0.040323	0.040711	0.041661

Следует отметить, что с повышением температуры соответствующие частоты понижаются. При этом для различных типов изменения по толщине механических параметров изменение частот составляет не более 5%.

Таблица 5. Частоты свободных колебаний шарнирно опертого цилиндра при различных температурах и различных  $M$  для  $h=2\ell_0$ ,  $R=4\ell_0$ ,  $L=5\ell_0$ .

$T, \text{ К}$	$\bar{\omega}_i$	$M$			
		$M = 0$	$M = 0.5$	$M = 1$	$M = 10$
300	$\bar{\omega}_1$	0.045949	0.046686	0.047061	0.048024
	$\bar{\omega}_2$	0.090849	0.092273	0.092986	0.094898
	$\bar{\omega}_3$	0.100149	0.101605	0.102417	0.104831
400	$\bar{\omega}_1$	0.044511	0.045374	0.045811	0.046936
	$\bar{\omega}_2$	0.087998	0.089686	0.090524	0.092749
	$\bar{\omega}_3$	0.097011	0.098786	0.099767	0.102692

В табл. 6 приведены частоты  $\bar{\omega}_i = \omega \ell_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}}$ ,  $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$ ,  $G_0 = 10^9 \text{ Па}$ , свободных колебаний цилиндра при температуре  $T = 300 \text{ К}$ ,  $M = 0.5$  и различных граничных условиях (Ш – Ш – шарнирное опирание двух торцов, Ж – Ж – жесткое защемление торцов) для различных геометрических параметров:  $h = 2\ell_0$ ,  $R = 4\ell_0$ ,  $L = 20\ell_0$  и  $L = 5\ell_0$ .

Таблица 6. Частоты свободных колебаний цилиндра при различных граничных условиях для случаев  $h = 2\ell_0$ ,  $R = 4\ell_0$ ,  $L = 20\ell_0$  и  $L = 5\ell_0$ .

$\bar{\omega}_i$	$L$	Ш–Ш	Ж–Ж	Ш–Ш
		Без использования сплайнов	С использованием сплайнов	Без использования сплайнов
$\bar{\omega}_1$	$20\ell_0$	0.02351	0.02354	0.02415
	$5\ell_0$	0.04669	0.04627	0.06103
$\bar{\omega}_2$	$20\ell_0$	0.03693	0.03686	0.03902
	$5\ell_0$	0.09227	0.09174	0.09612
$\bar{\omega}_3$	$20\ell_0$	0.04084	0.04060	0.04160
	$5\ell_0$	0.10161	0.10173	0.10660
$\bar{\omega}_4$	$20\ell_0$	0.04273	0.04276	0.04348
	$5\ell_0$	0.14961	0.14915	0.15302
$\bar{\omega}_5$	$20\ell_0$	0.04668	0.04640	0.04996
	$5\ell_0$	0.15131	0.15134	0.18428

Исследовались формы колебаний ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $u_r$ ,  $u_z$ ) цилиндров из функционально-градиентных материалов. На рис. 5, рис. 6 представлены формы свободных колебаний цилиндра с геометрическими параметрами  $h = 2\ell_0$ ,  $R = 4\ell_0$ ,  $L = 5\ell_0$  и шарнирно опертыми торцами. Рис. 5 соответствует колебаниям на второй частоте  $\bar{\omega}_2 \approx 0.092$ , а рис. 6 – на третьей частоте  $\bar{\omega}_3 \approx 0.101$ . Формы нормированы на максимальное по модулю значение соответствующей функции. Для сравнения на рисунках приведены формы колебаний однородного никелевого цилиндра (линии без маркера) и цилиндра из ФГМ с параметром  $M = 0.5$  (линии с маркером).

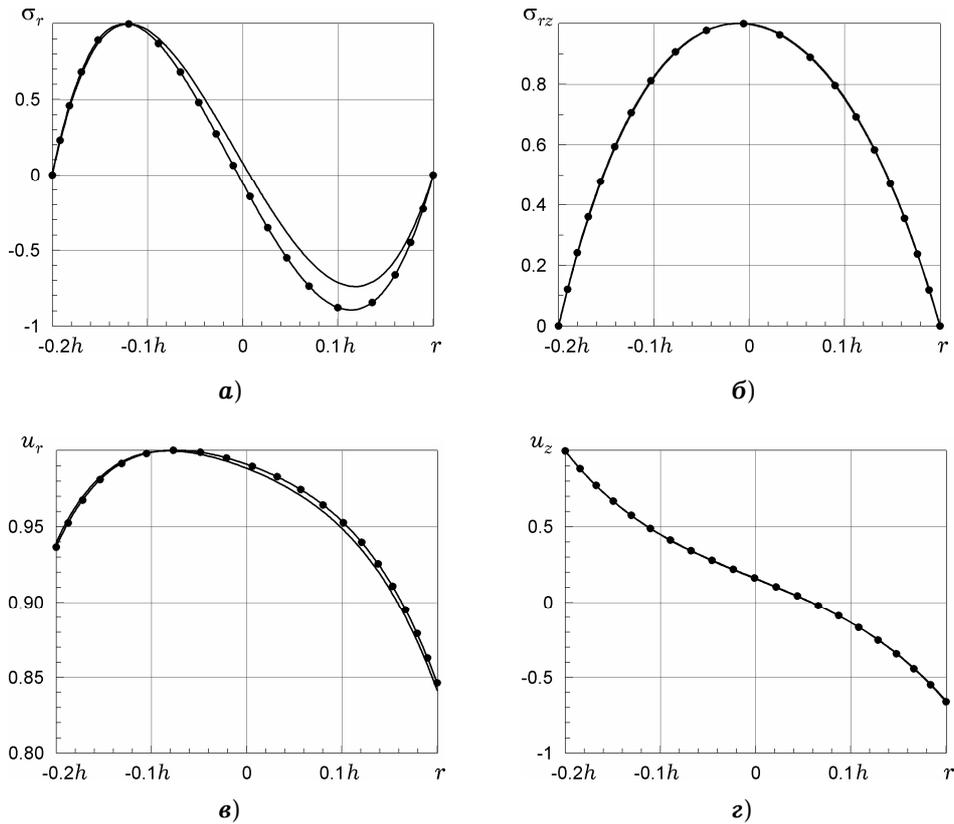
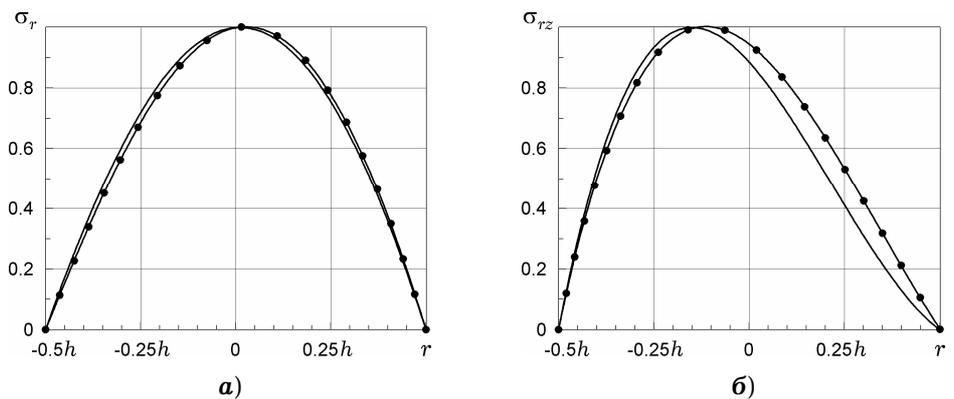


Рис. 5



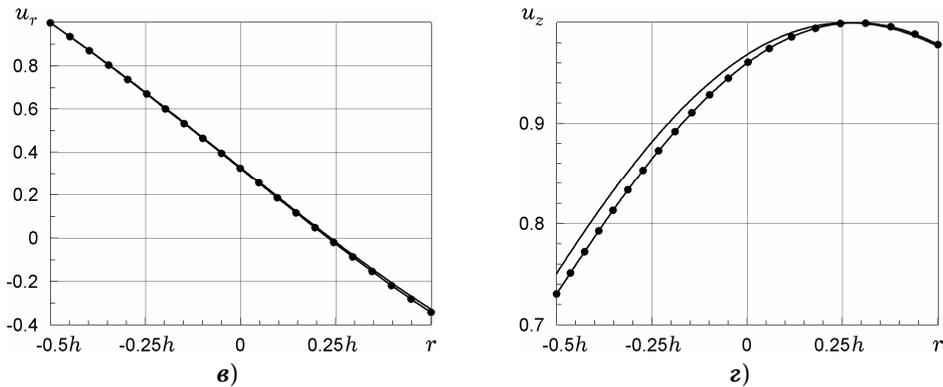


Рис. 6

При этом следует отметить незначительное отличие соответствующих форм для однородного и неоднородного цилиндров. Для других значений параметра  $M$  отмечалось такое же незначительное отличие форм колебаний однородного и неоднородного цилиндров.

**Выводы.** В настоящей статье представлено исследование свободных колебаний неоднородных цилиндров конечной длины из функционально-градиентных материалов. Разработан эффективный дискретно-континуальный численно-аналитический подход, с применением которого исходная система дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами сводится при помощи метода сплайн-коллокации к краевой задаче на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Полученные одномерные задачи решены устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. На основании предложенного подхода решены задачи о свободных колебаниях неоднородного цилиндра конечной длины с непрерывно изменяющимися упругими свойствами в радиальном направлении при различных граничных условиях на торцах. Рассмотрен случай функционально-градиентного материала цилиндра, который является композицией нержавеющей стали и никеля. Расчеты проводились с учетом зависимости упругих свойств материала от температуры. Представленные в статье таблицы собственных частот и графики форм колебаний цилиндра для разных граничных условий на его торцах дают возможность проанализировать влияние поведения динамических характеристик цилиндра для различных законов изменения упругих свойств по толщине цилиндра. Проведено сравнение полученных данных с динамическими характеристиками для случая однородного цилиндра.

Выполненные исследования свидетельствуют об эффективности применения предложенного дискретно-континуального подхода к решению динамических задач на основе теории упругости о колебаниях неоднородных цилиндрических тел конечной длины из функционально-градиентных материалов наряду с такими универсальными подходами, как конечноразностные и конечноэлементные методы.

1. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 74–85.  
То же: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Using spline-approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of thick-walled orthotropic cylinders // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 10. – P. 1137–1147.
2. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Бровко А. А., Горбач Л. И. О свободных осесимметричных колебаниях цилиндров конечной длины из полимерных функционально-градиентных материалов // Прикл. проблемы механики и математики. – 2010. – Вып. 8. – С. 92–99.

3. Григоренко О. Я., Єфімова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.  
То же: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Loza I. A. Solution of an axisymmetric problem of free vibrations of piezoceramic hollow cylinders of finite length by the spline collocation method // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 2. – P. 290–300.
4. Єфімова Т. Л. Решение задач о свободных крутильных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 1. – С. 92–100.  
То же: Efimova T. L. Solution of problems of free torsional vibrations of thick-walled orthotropic inhomogeneous cylinders // *J. Math. Sci.* – 2010. – **168**, No. 4. – P. 613–623.
5. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Trans. ASME. Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**, No. 5. – P. 195–216.
6. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2008. – **3**, No. 5. – P. 929–952.
7. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaiikov G. G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. – Kiev: Akademperiodika, 2009. – 550 p.
8. Heyliger P. R. Axisymmetric free vibrations of finite anisotropic cylinders // *J. Sound Vib.* – 1991. – **148**, No. 3. – P. 507–520.
9. Hutchinson J. R., El-Azhari S. A. Vibrations of free hollow circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1986. – **53**, No. 3. – P. 641–646.
10. Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates // *Eur. J. Mech. - A/Solids.* – 2004. – **23**, No. 5. – P. 853–864.
11. Koizumi M. The concept of FGM // In: *Ceramic transactions. Vol. 34: Functionally Graded Materials: Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Symp. Functionally Graded Materials* / J. B. Holt, M. Koizumi, T. Hirai, Z. A. Munir (Eds). – Westerville: Amer. Ceramic Soc., 1993. – P. 3–10.
12. Loy C. T., Lam K. Y. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three dimensional theory of elasticity // *J. Sound Vib.* – 1999. – **226**, No. 4. – P. 719–737.
13. Loy C. T., Lam K. Y., Reddy J. N. Vibration of functionally graded cylindrical shells // *Int. J. Mech. Sci.* – 1999. – **41**, No. 3. – P. 309–324.
14. Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G. (Eds). *Functionally graded materials: Design, processing and applications.* – New York: Kluwer Acad. Publ., 1999. – xv+330 p.
15. Pradhan S. C., Loy C. T., Lam K. Y., Reddy J. N. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions // *Appl. Acoust.* – 2000. – **61**, No. 1. – P. 111–129.
16. Shah A. G., Mahmood T., Naeem M. N. Vibrations of FGM thin cylindrical shells with exponential volume fraction law // *Appl. Math. Mech.* – 2009. – **30**, No. 5. – P. 607–615.
17. So J., Leisse A. W. Free vibrations of thick hollow circular cylinders from three-dimensional analysis // *Trans. ASME. J. Vib. Acoust.* – 1997. – **119**, No. 1. – P. 89–95.
18. Sofiyev A. H., Avcar H. The stability of cylindrical shells containing an FGM layer subjected to axial load on the Pasternak foundation // *Engineering.* – 2010. – **2**, No. 4. – P. 228–236.
19. Suresh S., Mortensen A. *Fundamentals of functionally graded materials.* – London: Maney Publ., 1998. – 165 p.
20. Woodward B., Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates // *Eur. J. Mech. - A/Solids.* – 2011. – **30**, No. 5. – P. 705–718.

## ВІЛЬНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ

На основі тривимірної теорії пружності вивчається задача про вільні осесиметричні коливання неоднорідних порожнистих циліндрів скінченної довжини із функціонально-градієнтних матеріалів за різних граничних умов на торцях. Пружні властивості матеріалу змінюються неперервно в радіальному напрямку. Запропоновано чисельно-аналітичний підхід для розв'язання сформульованої задачі. Вихідна задача теорії пружності в частинних похідних зводиться до крайової задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку відносно радіальної координати за допомогою сплайн-апроксимації і методу колокації. Отримана одновимірна задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку. Наведено результати розрахунку частот і форм коливань циліндра із функціонально-градієнтного матеріалу, який є композицією нержавіючої сталі та нікеля, для різних типів граничних умов на торцях при різних значеннях температури.

## FREE AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF HOLLOW FINITE-LENGTH CYLINDER FROM FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL

*On the basis of the three-dimensional theory of elasticity, the problem on free vibrations of inhomogeneous hollow finite-length cylinders made from functionally graded materials for different boundary conditions at the ends is considered. Material elastic properties are varied continuously in the radial direction. The numerical-analytical method is proposed for solving the problem. The initial problem of the theory of elasticity in the partial derivatives is reduced to the boundary value problem for the high-order system of ordinary differential equations with respect to the radial coordinate by using the spline approximation and collocation methods. The obtained one-dimensional problem is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization together with the method of step-by-step search. The calculation results of frequencies and vibrations modes are presented for cylinders made of FGM, which is composed of stainless steel and nickel, for some types of boundary conditions at the ends for different values of temperature.*

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Получено  
13.01.15