УДК 517.983.54

І. Д. Пукальський

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ

За допомогою принципу максимуму і апріорних оцінок вивчається перша крайова задача для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями в коефіцієнтах за просторовими змінними та імпульсними умовами за часовою змінною. У гельдерових просторах зі степеневою вагою встановлено існування та єдиність розв'язку поставленої задачі.

Задачі з виродженнями і особливостями для рівнянь з частинними похідними виникають при моделюванні різних складних явищ і процесів у сучасному природознавстві, техніці, математичній фізиці, квантовій механіці, теорії ядерних ланцюгових реакцій тощо. Зокрема, у рівнянні Шредінґера, яке описує стан квантомеханічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [3]. Вивченню якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь з виродженням присвячено монографії [2, 4, 11].

Дослідження задач теорії автоматичного керування, теорії ядерних реакторів, динамічних систем, приводять до розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Всестороннє дослідження періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією наведено в монографіях [7, 10, 13]. Питання існування періодичних розв'язків рівнянь гіперболічного типу з імпульсною дією вивчалися в працях [1, 8, 14]. Класичним розв'язкам задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією присвячено другий розділ монографії [5].

У цій статті розглядається перша крайова задача для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах на деякій множині точок та імпульсною дією за часовою змінною у визначені моменти часу. У гельдерових просторах зі степеневою вагою одержано єдиність, існування та встановлено оцінки похідних розв'язку поставленої задачі.

Постановка задачі і основний результат. Нехай D – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\bar{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$. В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,\ldots,N\}$, $x \in D \setminus \bar{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right]u(t,x) =$$

$$= f(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = b_\lambda(t_\lambda,x)u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(t_\lambda,x), \tag{3}$$

і крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} (u(t,x) - g(t,x)) = 0, \tag{4}$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1}$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(4). Нехай $Q^{(k)} =$

$= [t_k, t_{k+1}) \times D$, $k \in \{0,1,\dots,N\}$, β_i, γ, q, ℓ – дійсні числа, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_n\}$, $\gamma \ge 0$, $q \ge 0$, $\ell \ge 0$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$, $R_i(t^{(2)},x^{(2)})$ – довільні точки із $Q^{(k)}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_i^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $\rho = \inf\limits_{z\in\partial\Omega} |x-z|$, $x \in D \backslash \bar{\Omega}$,

$$s(\beta_i, x) = \begin{cases} \rho^{\beta_i}, & \rho \le 1, \\ 1 & \rho \ge 1. \end{cases}$$

Позначимо через $C^{\ell}(\gamma;\beta;q;Q)$ множину функцій u, які при $t \ne t_\lambda$, $x \not\subset \bar{\Omega}$ мають неперервні частинні похідні вигляду $\partial_t^i \partial_x^r u$, $2i + |r| \le [\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_k \{\sup_{Q^{(k)}} |u|\} \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell = \sup_k \Big\{ \sum_{2i+|r|\le[\ell]} \|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\|_{2i+|r|} + \langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)} \rangle_\ell \Big\} \equiv$$

$$\equiv \sup_k \Big\{ \sum_{2i+|r|\le[\ell]} \sup_{P\in\bar{Q}^{(k)}} \Big[s(q + (2i+|r|)\gamma, x) \left| \partial_t^i \partial_x^r u(P) \right| \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} s(-r_j\beta_j, x) \Big] + \sum_{2i+|r|=[\ell]} \Big[\sup_{(P_1,H_\nu)\subset Q^{(k)}} \Big[s(q+\ell\gamma, \tilde{x}) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} s(-r_j\beta_j, \tilde{x}) \left| \partial_t^i \partial_x^r u(P_1) - \partial_t^i \partial_x^r u(H_\nu) \right| \times$$

$$\times \left| x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)} \right|^{-\{\ell\}} s(-\{\ell\}\beta_\nu, \tilde{x}) \Big] +$$

$$+ \sup_{(R_\nu,H_\nu)\subset Q^{(k)}} \Big[s(q+\ell\gamma, \tilde{x}) \prod_{j=1}^{n} s(-r_j\beta_j, \tilde{x}) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\{\ell/2\}} \times$$

$$\times \left| \partial_t^i \partial_x^r u(R_\nu) - \partial_t^i \partial_x^r u(H_\nu) \right| \Big] \Big] \Big\}.$$

Тут $|r| = r_1 + \dots + r_n$, $\ell = [\ell] + \{\ell\}$, $s(q,\tilde{x}) = \min\{s(q,x^{(1)}), s(q,x^{(2)})\}$.

Нехай для задачі (1)–(4) виконуються умови:

1°. Для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ справджується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x) s(\beta_i + \beta_j, x) \xi_i \xi_j \le \pi_2 |\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, $s(\beta_i + \beta_j; x) A_{ij} \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_i, x) A_i \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_0, x) A_0 \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\inf\limits_{\bar{Q}} (A_0(t,x)) = a > 0$, $\alpha \in (0,1)$, $\mu_i \ge 0$, $\mu_0 \ge 0$, $\gamma = \max\Big\{ \max\limits_i (1+\beta_i), \max\limits_i (\mu_i - \beta_i), \dfrac{\mu_0}{2} \Big\}$.

2°. $f \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\varphi_\lambda \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q \cap (t = t_\lambda))$,

$$\varphi_0(x)|_{\partial D} = g(t_0,x)|_{\partial D}, \; [g(t_\lambda + 0, x) - g(t_\lambda - 0, x)]|_{\partial D} =$$

$$= [b_\lambda(t_\lambda, x) g(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(t_\lambda, x)]|_{\partial D}, \; g \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(k)}),$$

$$b_\lambda(t_\lambda, x) \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda)), \; \partial D \in C^{2+\alpha}.$$

Справджується

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(4) *виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ *і виконується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|b_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0\right)\times\right.$$
$$\times\left(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\right.$$
$$\left.+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha+\left\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}\right)+$$
$$+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$
$$\left.+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\right\|_\alpha+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\right\|_{2+\alpha}\right\}. \tag{5}$$

Для дослідження задачі (1)–(4) встановимо спочатку коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(4).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m^{(k)}=Q^{(k)}\cap\left\{(t,x)\in Q^{(k)},\ \rho(x)\ge\frac{1}{m}\right\}$, $m>1$, – послідовність областей, яка при $m\to\infty$ збігається до $Q^{(k)}$. Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які при $t\ne t_\lambda$ задовольняють рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\left(\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}+a_0(t,x)\right)u_m=$$
$$=f_m(t,x), \tag{6}$$

умови за змінною t:

$$u_m(t_0+0,x)=\varphi_m^{(0)}(x), \tag{7}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)-u_m(t_\lambda-0,x)=b_\lambda(t_\lambda,x)u_m(t_\lambda-0,x)+\varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x) \tag{8}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(u_m(t,x)-g_m(t,x))=0. \tag{9}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, а також функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в областях $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ_0, φ_λ, g відповідно, а в областях $Q\setminus Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0 і функцій f, φ_0, φ_λ, g із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q\setminus Q_m^{(k)}$ зі збереженням гладкості і норми [12, с. 82].

Для розв'язків задачі (6)–(9) правильною є така

Теорема 2. *Нехай* $u_m(t,x)$ – *класичний розв'язок задачі* (6)–(9) *в області* Q *і виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді для* $u_m(t,x)$ *справджується оцінка*

$$|u_m(t,x)|\le\sum_{k=1}^{N}\prod_{\nu=k}^{N}\left(1+\|b_\nu;Q\cap(t=t_\nu)\|_0\right)\left(\left\|\varphi_m^{(k-1)};Q^{(k-1)}\cap(t=t_{k-1})\right\|_0+\right.$$
$$\left.+\left\|f_ma_0^{-1};Q^{(k-1)}\right\|_0+\left\|g_m;Q^{(k-1)}\right\|_0\right)+$$
$$+\left\|\varphi_m^{(N)};Q\cap(t=t_N)\right\|_0+\left\|f_ma_0^{-1};Q^{(N)}\right\|_0+\left\|g_m;Q^{(N)}\right\|_0. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\max\limits_{\bar{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(M_1)$. Якщо $M_1 \in Q^{(k)}$, то в точці M_1 виконуються співвідношення

$$\partial_t u_m(M_1) \ge 0, \qquad \partial_{x_i} u_m(M_1) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(M_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(M_1) \le 0 \tag{11}$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (11) і рівняння (6) у точці M_1 справджується нерівність

$$u_m(M_1) \le \sup_{\bar{Q}^{(k)}} (f a_0^{-1}). \tag{12}$$

Нехай $\min\limits_{\bar{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(M_2)$. Якщо $M_2 \in Q^{(k)}$, то в точці M_2 виконуються співвідношення

$$\partial_t u_m(M_2) \le 0, \qquad \partial_{x_i} u_m(M_2) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(M_2)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(M_2) \ge 0 \tag{13}$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням співвідношень (13) і рівняння (6) у точці M_2 маємо

$$u_m(M_2) \ge \inf_{\bar{Q}^{(k)}} (f a_0^{-1}). \tag{14}$$

Нехай $M_1 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$ або $M_2 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$. З урахуванням умови (9) у точках M_1 і M_2 маємо

$$|u_m| \le \|g_m; Q^{(k)}\|_0. \tag{15}$$

У випадку, коли $M_1 \in \bar{D}$ або $M_2 \in \bar{D}$, з початкової умови (7) одержимо

$$|u_m| \le \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{16}$$

Враховуючи нерівності (12), (14)–(16) при $k = 0$, одержимо

$$\|u_m; Q^{(0)}\|_0 \le \|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|g_m; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{17}$$

Якщо $M_1 \in Q \cap (t = t_\lambda)$ або $M_2 \in Q \cap (t = t_\lambda)$, $\lambda \ge 1$, то враховуючи умову (8), одержимо співвідношення

$$\|u_m; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0 \le \left(1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0\right)\|u_m; Q^{(\lambda-1)}\|_0 + \\ + \|\varphi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0. \tag{18}$$

Об'єднуючи нерівності (12), (14), (15), (17) і (18) при $\lambda = 1, 2, \ldots, N$, одержуємо оцінку (10).

Знайдемо оцінки похідних від розв'язків $u_m(t,x)$. У просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ введемо норму $\|u_m; \gamma; \beta; q; Q\|_\ell$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і норма $\|u; \gamma; \beta; q; Q\|_\ell$, тільки замість функцій $s(\beta_i, x)$ покладемо $d(\beta_i, x)$, де

$$d(\beta_i, x) = \begin{cases} \max\{s(\beta_i, x), m^{-\beta_i}\}, & \beta_i \ge 0, \\ \min\{s(\beta_i, x), m^{-\beta_i}\}, & \beta_i < 0. \end{cases}$$

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то для розв'язку задачі* (6)–(9) *справджується оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\nu=k}^{N}(1+\|b_\nu;Q\cap(t=t_\nu)\|_0)\times\right.$$

$$\times(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha+$$

$$+\left\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha})+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$

$$\left.+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\right\|_\alpha+\left\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(N)}\right\|_{2+\alpha}\right\}. \quad (19)$$

Д о в е д е н н я. Для знаходження оцінки (19) розв'язків задачі (6)–(9) в областях $Q^{(k)}$ зробимо заміну

$$u_m(t,x)=g_m(t,x)+v_m(t,x). \quad (20)$$

Підставляючи (20) у (6)–(9), одержимо

$$(L_1v_m)(t,x)=F_m(t,x),(t,x)\in Q^{(k)}, \quad (21)$$

$$v_m(t_k+0,x)=G_m^{(k)}(t_k,x),\quad (t,x)\in Q\cap(t=t_k), \quad (22)$$

$$v_m|_{\Gamma^{(k)}}=0, \quad (23)$$

де $F_m(t,x)=f_m(t,x)-(L_1g_m)(t,x)$, $G_m^{(0)}(t_0,x)=\varphi_m^{(0)}(x)-g_m(t_0+0,x)$ при $x\in D$, $G_m^{(k)}(t_k,x)=(1+b_k(t_k,x))[v_m(t_k-0,x)+g_m(t_k-0,x)]+[\varphi_m^{(k)}(t_k,x)-$ $-g_m(t_k+0,x)]$ при $x\in Q\cap(t=t_k)$, $k\in 1,2,\ldots,N$.

В області $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (21)–(23) існує і є єдиним у просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$. Знайдемо його оцінку. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [9, 12], маємо

$$\left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\left\langle v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(k)}\right\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число, $\varepsilon\in(0,1)$. Тому достатньо оцінити півнорму $\left\langle v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в $Q^{(k)}$ точок P_1, H_i, R_i, для яких є правильною одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\le E_\delta,\qquad \delta\in\{1,2\}, \quad (24)$$

де

$$E_1=\sum_{2j+|r|=2}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\alpha}d((2+\alpha)\gamma;\tilde{x})\,d(-\alpha\beta_i,\tilde{x})\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{n}d(-r_\nu\beta_\nu,\tilde{x})\left|\partial_t^j\partial_x^r v_m(H_i)-\partial_t^j\partial_x^r v_m(P_1)\right|,$$

$$E_2=\sum_{2i+|r|=2}\sum_{i=1}^{n}\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}d((2+\alpha)\gamma;\tilde{x})\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{n}d(-r_\nu\beta_\nu,\tilde{x})\left|\partial_t^i\partial_x^r v_m(R_i)-\partial_t^i\partial_x^r v_m(H_i)\right|,$$

$$d(\gamma,\tilde{x})=\min\left\{d(\gamma,x^{(1)}),d(\gamma,x^{(2)})\right\}.$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \ge d(2\gamma,\tilde{x})\dfrac{\varepsilon_1^2}{16} \equiv T_1$, ε_1 – довільне число, $\varepsilon_1 \in (0,1)$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_2 . \tag{25}$$

Якщо $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right| \ge n^{-1}d(\gamma-\beta_i,\tilde{x})\dfrac{\varepsilon_1}{4} \equiv T_2$, то

$$E_1 \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_2 . \tag{26}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (25), (26), знаходимо

$$E_\delta \le \varepsilon^\alpha \left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\left\|v_m;Q^{(k)}\right\|_0 . \tag{27}$$

Нехай $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right| \le T_2$ і $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \le T_1$. Будемо вважати, що $d(\gamma,\tilde{x}) \equiv$ $\equiv d(\gamma,x^{(1)})$, $P_1^{(k)}(t^{(1)},x^{(1)}) \in Q^{(k)}$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$. В області $Q^{(k)}$ запишемо задачу (21)–(23) у вигляді

$$\begin{aligned}
(L_2 v_m)(t,x) &\equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P_1^{(k)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]v_m = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1^{(k)})\right]\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m - \\
&- \sum_{i=1}^n a_i(P)\partial_{x_i}v_m - a_0(P)v_m + F_m(t,x) \equiv \\
&\equiv F_m^{(1)}(t,x;v_m^{(k)}) + F_m(t,x),
\end{aligned} \tag{28}$$

$$v_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x), \tag{29}$$

$$v_m\big|_{\Gamma^{(k)}} = 0 . \tag{30}$$

Нехай $V_{\varepsilon_2}^{(k)}$ – область із $Q^{(k)}$,

$$V_{\varepsilon_2}^{(k)} = \left\{(t,x)\in Q^{(k)}, \left|t-t^{(1)}\right| \le \varepsilon_2^2 T_1, \left|x_i - x_i^{(1)}\right| \le \varepsilon_2 T_2,\ i\in\{1,\ldots,n\}\right\}.$$

У задачі (28)–(30) зробимо заміну $v_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, де $y_i = d(\beta_i,x^{(1)})x_i$. Одержимо

$$\begin{aligned}
(L_3\omega_m)(t,y) &\equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right]\omega_m = \\
&= F_m^{(1)}(t,\tilde{y};\omega_m) + F_m(t,\tilde{y}),
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\omega_m(t_k+0,y) = G_m^{(k)}(t_k,\tilde{y}), \tag{32}$$

$$\omega_m\big|_{\Gamma^{(k)}} = 0 , \tag{33}$$

де $\tilde{y} = \left(d(-\beta_1,x^{(1)})y_1,\ldots,d(-\beta_n,x^{(1)})y_n\right)$.

Позначимо $y_i^{(1)} = d(\beta_i,x^{(1)})x_i^{(1)}$,

$$W_{\varepsilon_2}^{(k)} = \left\{(t,y), \left|t-t^{(1)}\right| \le \varepsilon_2^2 T_1, \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le n^{-1}\varepsilon_2\sqrt{T_1}\right\}$$

і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y)\in W_{1/2}^{(k)}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y) \notin W_{3/4}^{(k)}, \quad \left|\partial_t^i \partial_y^r \eta\right| \le c_{ik} d(-(2i+|r|)\gamma;x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $Z_m(t,y)=\omega_m(t,y)\eta(t,y)$ буде розв'язком крайової задачі

$$(L_3 Z_m)(t,y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})[\partial_{y_i}\eta\partial_{y_j}\omega_m+\partial_{y_j}\eta\partial_{y_i}\omega_m]+$$

$$+\omega_m\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta-\partial_t\eta\right]+$$

$$+\eta\left[F_m^{(1)}+F_m\right]\equiv F_m^{(2)}+\eta F_m\,, \tag{34}$$

$$Z_m(t_k+0,z)=\eta G_m^{(k)}(t_k,\tilde{y})\,, \tag{35}$$

$$Z_m\big|_{\Gamma^{(k)}}=0\,. \tag{36}$$

Згідно з теоремою 5.2 із [4, с. 264], для розв'язку задачі (34)–(36) виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^i\partial_y^r Z_m(M_1)-\partial_t^i\partial_y^r Z_m(M_2)\right|\le$$

$$\le c\left(\left\|F_m^{(2)}+\eta F_m\right\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})}+\left\|\eta G_m^{(k)}\right\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k))}\right), \tag{37}$$

де $(M_1,M_2)\subset W_{1/2}^{(k)}$, $d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2, $2i+|r|=2$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, знаходимо

$$\left\|F_m^{(2)}+\eta F_m\right\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})}\le$$

$$\le cd(-(2+\alpha)\gamma;x^{(1)})(\left\|\omega_m;\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\right\|_2+\left\|\omega_m;W_{3/4}^{(k)}\right\|_0+$$

$$+\left\|F_m^{(1)};\gamma;0;2\gamma;W_{3/4}^{(k)}\right\|_\alpha+\left\|F_m;\gamma;0;2\gamma;W_{3/4}^{(k)}\right\|_\alpha)\,, \tag{38}$$

$$\left\|\eta G_m^{(k)}\right\|_{(C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k))}\le$$

$$\le cd(-(2+\alpha)\gamma;x^{(1)})\left\|G_m^{(k)};\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}. \tag{39}$$

Підставляючи (38), (39) у (37) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо

$$E_\delta\le c_1(\left\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\right\|_\alpha+\left\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|v_m;V_{3/4}^{(k)}\right\|_0+\left\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\right\|_2+\left\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\right\|_\alpha)\,. \tag{40}$$

За допомогою інтерполяційних нерівностей і оцінок норми кожного з доданків виразів $F_m^{(1)}$, $G_m^{(k)}$ маємо

$$E_\delta\le\left(\varepsilon_1^\alpha(n+2)+(\varepsilon_2 n)^2\right)\left\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\right\|_{2+\alpha}+c_2\left\|v_m;V_{3/4}^{(k)}\right\|_0+$$

$$+c_3(\left\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\right\|_\alpha+\left\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}). \tag{41}$$

Використовуючи нерівності (27), (41) і вибираючи ε_1, ε достатньо малими, одержимо оцінку

$$\left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\le c(\left\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\right\|_\alpha+$$

$$+\left\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha})\,. \tag{42}$$

Враховуючи значення виразів $F_m(t,x)$ і $G_m^{(k)}(t_k,x)$, при $k=1,2,\ldots,N$ маємо

$$\left\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(k)}\right\|_\alpha \le c\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha + \left\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\right),$$

$$\left\|G_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\right\|_\alpha \le \left\|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} + \left\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha},$$

$$\begin{aligned}\left\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} &\le c\left(1+\left\|b_k;Q\cap(t=t_k)\right\|_0\right)\times\\ &\times\left(\left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha} + \left\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}\right)+\\ &+\left\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} + \left\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}. \qquad (43)\end{aligned}$$

Оскільки

$$\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha \le c\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\right\|_\alpha,$$

$$\left\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha},$$

$$\left\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\varphi_k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha},$$

то, враховуючи заміну (20), оцінку (10) і нерівності (42), (43) при $k = 0,1,\ldots,N$, одержуємо оцінку (19). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Права частина нерівності (19) не залежить від m. Крім того, послідовності

$$\{U_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}, \qquad \{U_m^{(1)}\} \equiv \{d(\gamma-\beta_i,x)\partial_{x_i}u_m(t,x)\},$$

$$\{U_m^{(2)}\} \equiv \{d(2\gamma;x)\partial_t u_m(t,x)\},$$

$$\{U_m^{(3)}\} \equiv \{d(2\gamma-\beta_i-\beta_j,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(t,x)\}$$

рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в областях $\bar{Q}^{(k)}$. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{U_{m_\varepsilon}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{U_0^{(\nu)}\}$, $\nu\in\{0,1,2,3\}$. Переходячи до в задачі (6)–(9) границі при $m_\varepsilon\to\infty$, одержимо, що $u(t,x)=U_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(4), $u\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$. ♦

1. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315–328.
   Те саме: *Asanova A. T.* On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 349–365.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
3. *Зейц Ф.* Современная теория твердого тела. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 720 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., vol 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. – 248 с.
6. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
7. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 427 с. – (Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер. Математика и её применение; Т. 67.)

Те саме: *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: Multivalued right-hand sides with discontinuities. – Berlin: Walter de Gruyter Co., 2011. – 408 p.

8. *Перестюк Н. А., Ткач А. Б.* Периодические решения слаболинейной системы уравнений в частных производных с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 601–605.
   Те саме: *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions of a weakly nonlinear system of partial differential equations with pulse influence // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, No. 4. – P. 665–671.
9. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
10. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
    Те саме:*Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulse differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – x+462 p.
11. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – Москва: Наука, 1966. – 292 с.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
13. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: Stability theory and applications. – New York etc: John Wiley & Sons, 1989. – 255 p.
14. *Bainov D., Minchev E., Myshkis A.* Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems // Commun. Appl. Anal. – 1997. – **1**. – P. 1–14.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ВЫРОЖДЕНИЯМИ

При помощи принципа максимума и априорных оценок изучается первая краевая задача для линейного параболического уравнения со степенными особенностями в коэффициентах по пространственным переменным и импульсными условиями по временной переменной. В гельдеровых пространствах со степенным весом установлены существование и единственность решения поставленной задачи.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH IMPULSE CONDITIONS AND DEGENERATIONS

For linear parabolic equation with power singularities in the coefficients with respect to space variables and impulse conditions with respect to time variable, the first boundary value problem is studied with the help of the maximum principle and a priori estimates. The existence and the uniqueness of the solution to the formulated problem in Hölder spaces with power weight are established.

Чернів. нац. ун-т
ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
29.11.13