

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Предлагается методика аналитического исследования особенностей контактных напряжений в окрестности нестационарно-подвижной границы области контакта в плоских нестационарных контактных задачах с подвижными границами, основанная на сведении граничного двумерного сингулярного интегрального уравнения, разрешающего задачу, к системе двух одномерных сингулярных уравнений. В качестве инструментов исследования используется методика сведения сингулярных интегральных уравнений к эквивалентной задаче типа Римана для кусочно-аналитических функций и техника дробного интегро-дифференцирования. Показано, что на подвижной границе области контакта имеет место степенная особенность, порядок которой зависит от скорости движения границы.

**1. Постановка задачи.** Абсолютно жесткий ударник, ограниченный гладкой выпуклой поверхностью, двигаясь вертикально с некоторой начальной скоростью  $V_0$ , вектор которой направлен по направлению внешней нормали к его боковой поверхности, входит в контакт с однородным изотропным линейно упругим полупространством (рис. 1). Для ударника используется уравнение движения абсолютно твердого тела, записанное в интегральной форме

$$h(\tau) = V_0 \tau + \frac{1}{m} I_s[\tau, b(\tau)],$$

$$I_s(\tau, b) = \int_0^\tau dt \int_{-b(t)}^{b(t)} (\tau - t) \sigma(\xi, t) d\xi, \quad (1)$$

где  $\tau$  – безразмерное время;  $h(\tau)$  – глубина погружения ударника в полупространство;  $m$  – погонная масса ударника;  $b(\tau)$  – зависящая от времени полуширина области контакта;  $\sigma(x, \tau) = \sigma_{33}|_{z=0}$  – нормальные контактные напряжения. Ударник предполагается бесконечно длинным, поэтому рассматривается плоская постановка задачи.

Движение полупространства описывается уравнениями плоской задачи линейной теории упругости

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi, \quad \eta^2 \ddot{\psi} = \Delta\psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – скалярный потенциал и ненулевая компонента векторного потенциала смещений, точками обозначены производные по времени.

Здесь и далее все параметры приведены в безразмерной форме (штрихами обозначены безразмерные величины, в последующем изложении штрихи опущены)

$$x' = \frac{x}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad u' = \frac{u}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L},$$

$$\varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \psi' = \frac{\psi}{L^2}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad i, j = 1, 3, \quad \eta^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad V'_0 = \frac{V_0}{c_1},$$

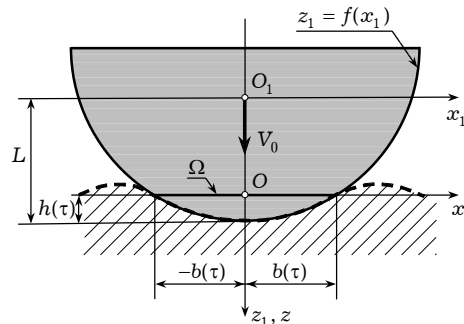


Рис. 1

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad m' = \frac{m}{\rho L^2}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu},$$

где  $u$  и  $w$  – перемещения вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  (тангенциальное и нормальное перемещения);  $L$  – расстояние от центра масс  $O_1$  до лобовой точки ударника;  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  – упругие постоянные Ламе и плотность среды;  $m$  – погонная масса ударника.

Ниже приведены соотношения, связывающие компоненты вектора перемещений и тензора напряжений с упругими потенциалами:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \sigma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\sigma_{22} = \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{33} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{13} = \frac{1 - \alpha}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3)$$

В линейной постановке задачи область контакта приближенно заменяется отрезком  $\Omega = [-b(\tau), b(\tau)]$ , принадлежащим невозмущенной свободной поверхности полупространства  $z = 0$  (рис. 1). Полуширина области контакта определяется из условия пересечения недеформированной поверхности полупространства с граничной поверхностью ударника

$$b(\tau) = f^{-1}[1 - h(\tau)]. \quad (4)$$

Здесь  $f$  – функция в уравнении  $z_1 = f(x_1)$  границы ударника в собственной системе координат  $O_1x_1z_1$  ( $x_1 = x$ ,  $z_1 = z + 1 - h$ , см. рис. 1).

Полагая, что контакт происходит в условиях свободного проскальзывания и вне зоны контакта граница полупространства свободна от напряжений, а также допуская ограниченность решения на бесконечности, приходим к следующим граничным условиям:

$$\sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \sigma_{33}|_{z=0} = 0, \quad |x| > b(\tau),$$

$$w|_{z=0} = w_0(x, \tau), \quad |x| \leq b(\tau), \quad w_0(x, \tau) = f(x) - 1 + h(\tau),$$

$$\varphi, \psi = O(1), \quad r \rightarrow \infty, \quad r^2 = x^2 + z^2. \quad (5)$$

Замыкают математическую постановку задачи начальные условия

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0.$$

**2. Разрешающая система уравнений.** Разрешающая система уравнений строится с помощью принципа суперпозиции для линейных задач. При этом используется граничное условие в перемещениях (см. (5)) и интегральная связь контактных напряжений и нормальных перемещений

$$w|_{z=0} = G(x, \tau) ** \sigma(x, \tau). \quad (6)$$

Здесь символом \*\* обозначена свертка по координате  $x$  и времени  $\tau$ ;  $G(x, \tau)$  – поверхностная функция влияния, которая есть нормальное перемещение на границе полупространства, соответствующее решению системы уравнений (2), (3) с однородными начальными условиями и следующими граничными условиями ( $\delta$  – дельта-функция Дирака):

$$\sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = \delta(\tau)\delta(x).$$

Функция  $G(x, \tau)$  имеет вид [2] ( $H(\tau)$  – функция Хевисайда)

$$G(x, \tau) = G_1(x, \tau)H(\tau - |x|) + G_2(x, \tau)H(\tau - \eta|x|),$$

$$G_1(x, \tau) = \frac{(\eta^2 x^2 - 2\tau^2)^2 \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi \eta^4 (x^2 - c_R^2 \tau^2) P_2(x^2, \tau^2)}, \quad P_2(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 x\tau + \beta^2 \tau^2,$$

$$G_2(x, \tau) = \frac{4\tau^2 (\tau^2 - x^2) \sqrt{\tau^2 - \eta^2 x^2}}{\pi \eta^4 (x^2 - c_R^2 \tau^2) P_2(x^2, \tau^2)}, \quad \alpha^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = \frac{8(1 + \alpha)}{\eta^6 c_R^2}.$$

Отметим, что она является однородной степени  $(-1)$  и имеет сингулярную особенность порядка  $(-1)$  на фронтах волн Рэлея  $x = \pm c_R \tau$ .

Из (5) и (6) вытекает разрешающее двумерное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестных контактных напряжений

$$\int_0^\tau \int_{-b(t)}^{b(t)} G(x - \xi, \tau - t) \sigma(\xi, t) dt d\xi = w_0(x, \tau). \quad (7)$$

До замкнутой системы оно дополняется уравнениями (1) и (4).

**3. Методика исследования.** Вводя новые переменные

$$\xi = x + r \sin \varphi, \quad t = \tau - r \cos \varphi$$

и используя указанные выше свойства ядра интегрального уравнения (7), представим его в следующей форме:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\beta(\psi; x, \tau)} \frac{g(\psi)}{\psi^2 - \psi_R^2} q(r, \psi; x, \tau) d\psi dr = w_0(x, \tau), \quad (8)$$

где

$$\psi = \operatorname{tg} \varphi, \quad q(r, \psi; x, \tau) = p(r, \operatorname{arctg} \varphi; x, \tau),$$

$$p(r, \varphi; x, \tau) = \sigma(x + r \sin \varphi, \tau - r \cos \varphi),$$

$$g(\psi) = \frac{\sqrt{1 + \psi^2}}{\pi \eta^4 P_2(\psi^2, 1)} \cdot \begin{cases} R_2(\psi^2), & |\psi| \leq \frac{1}{\eta}, \\ R_1(\psi^2), & \frac{1}{\eta} < \psi \leq 1, \end{cases}$$

$$R_2(\psi) = R_1(\psi) + 4(1 - \psi) \sqrt{1 - \eta^2 \psi}, \quad R_1(\psi) = (\eta^2 \psi - 2)^2 \sqrt{1 - \psi}, \quad (9)$$

а функция  $r = \beta(\psi; x, \tau)$  неявно задается системой уравнений

$$r \psi = (\xi - x) \sqrt{1 + \psi^2}, \quad r = (\tau - t) \sqrt{1 + \psi^2}, \quad \xi^2 = b^2(t).$$

Отметим, что функция  $g(\psi)$  в (9) удовлетворяет условию Гельдера на отрезке  $[-1, 1]$ . Уравнение (8), очевидно, эквивалентно системе из двух следующих уравнений:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(\psi)}{\psi^2 - c_R^2} Q(\psi; x, \tau) d\psi = w_0(x, \tau),$$

$$\int_0^{\beta(\psi; x, \tau)} q(r, \psi; x, \tau) dr = Q(\psi; x, \tau). \quad (10)$$

Рассмотрим первое из уравнений (10). Разложим его ядро на элементарные дроби:

$$\int_{-1}^1 \frac{\tilde{Q}(\psi; x, \tau)}{\psi - c_R} d\psi - \int_{-1}^1 \frac{\tilde{Q}(\psi; x, \tau)}{\psi + c_R} d\psi = 2w_0(x, \tau)c_R, \quad (11)$$

$$\tilde{Q}(\psi; x, \tau) = g(\psi)Q(\psi; x, \tau).$$

На плоскости комплексной переменной  $z = c_R + iy$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  действительной оси рассматриваем две аналитические везде,

кроме точек этого отрезка, функции  $\Phi(z; x, \tau)$  и  $\tilde{\Phi}(z; x, \tau)$ , представленные интегралами типа Коши

$$\Phi(z; x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{Q}(\psi; x, \tau)}{\psi - z} d\psi,$$

$$\tilde{\Phi}(z; x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{Q}(\psi; x, \tau)}{\psi + z} d\psi.$$

Для их граничных значений  $\Phi^+(c_R; x, \tau)$ ,  $\tilde{\Phi}^+(c_R; x, \tau)$  и  $\Phi^-(c_R; x, \tau)$ ,  $\tilde{\Phi}^-(c_R; x, \tau)$  на верхнем и нижнем берегу разреза соответственно выполняются формулы Сохоцкого

$$\begin{cases} \Phi^+(c_R; x, \tau) - \Phi^-(c_R; x, \tau) = \tilde{Q}(c_R; x, \tau), \\ \Phi^+(c_R; x, \tau) + \Phi^-(c_R; x, \tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{Q}(c_R; x, \tau)}{\psi - c_R} d\psi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}^+(c_R; x, \tau) - \tilde{\Phi}^-(c_R; x, \tau) = \tilde{Q}(-c_R; x, \tau), \\ \tilde{\Phi}^+(c_R; x, \tau) + \tilde{\Phi}^-(c_R; x, \tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{Q}(c_R; x, \tau)}{\psi + c_R} d\psi. \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда следует, что уравнение (11) эквивалентно следующему функциональному уравнению

$$\begin{aligned} \Phi^+(c_R; x, \tau) - \tilde{\Phi}^+(c_R; x, \tau) + \Phi^-(c_R; x, \tau) - \tilde{\Phi}^-(c_R; x, \tau) = \\ = -\frac{1}{\pi} 2c_R w_0(x, \tau) i. \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме того, заметим, что для граничных значений функции

$$\Psi(c_R; x, \tau) = \Phi(c_R; x, \tau) - \tilde{\Phi}(c_R; x, \tau)$$

имеют место аналогичные (12), (13) формулы:

$$\begin{aligned} \Psi^+(c_R; x, \tau) + \Psi^-(c_R; x, \tau) &= -\frac{1}{\pi} 2c_R w_0(x, \tau) i, \\ \Psi^+(c_R; x, \tau) - \Psi^-(c_R; x, \tau) &= \tilde{Q}(c_R; x, \tau) - \tilde{Q}(-c_R; x, \tau) = \hat{Q}(c_R; x, \tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Так как  $\Psi(z; x, \tau)$  – аналитическая в комплексной плоскости с указанным разрезом, то из второго из уравнений (14) следует, что она может быть представлена интегралом типа Коши с плотностью  $\hat{Q}(c_R; x, \tau)$ :

$$\Psi(z; x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\hat{Q}(c_R; x, \tau)}{\psi - z} d\psi.$$

Первое уравнение в (14) есть задача Римана [1, 3] на разомкнутом контуре. Ее решение имеет вид [4]

$$\Psi(z; x, \tau) = -\frac{w_0(x, \tau)}{\pi^2 \sqrt{1 - z^2}} \int_{-1}^1 \frac{\psi \sqrt{1 - \psi^2}}{\psi - z} d\psi.$$

Теперь по второй из формул (14) может быть найдено выражение для  $\hat{Q}(c_R; x, \tau)$  (сингулярный интеграл вычисляется аналитически [3]):

$$\hat{Q}(\psi; x, \tau) = -\frac{w_0(x, \tau)}{\pi^2 \sqrt{1 - \psi^2}} \int_{-1}^1 \frac{t \sqrt{1 - t^2}}{t - \psi} dt = -\frac{w_0(x, \tau)}{\pi \sqrt{1 - \psi^2}} \sqrt{1 - 2\psi^2}.$$

Пользуясь тем, что  $\widehat{Q}(\psi; x, \tau)$  является четной по  $\psi$ , получаем решение первого из уравнений (10):

$$Q(\psi; x, \tau) = - \frac{w_0(x, \tau)}{\pi g(\psi) \sqrt{1 - \psi^2}} \sqrt{1 - 2\psi^2}. \quad (15)$$

Рассмотрим второе из уравнений (10). С учетом (15) оно имеет вид

$$\int_0^{\beta(\psi; x, \tau)} q(r, \psi; x, \tau) dr = - \frac{w_0(x, \tau)}{\pi g(\psi) \sqrt{1 - \psi^2}} \sqrt{1 - 2\psi^2}. \quad (16)$$

Оно будет обладать единственным решением, если подынтегральная функция имеет следующую структуру [5]:

$$q(r, \psi; x, \tau) = \frac{\tilde{q}(r, \psi; x, \tau)}{[\beta(\psi; x, \tau) - r]^\alpha},$$

где  $\tilde{q}(r, \psi; x, \tau)$  – ограниченная на границе области контакта функция. В этом случае оно – обобщенное уравнение типа Абеля, обладающее единственным решением, которое может быть получено с помощью техники дробного интегро-дифференцирования [5].

Из вышеизложенного следует, что решение основного интегрального уравнения обладает следующей структурой, имеющей степенную особенность на границе [5]:

$$q(r, \psi; x, \tau) = - \frac{\sin \pi \alpha w(x, \tau)}{\pi r^{1-\alpha} g(\psi) [\beta(\psi; x, \tau) - r]^\alpha \sqrt{1 - \psi^2}} (1 - 2\psi^2), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Приведем один частный случай, в котором порядок особенности  $\alpha$  может быть определен точно. Рассмотрим в качестве ударника штамп с прямоугольным основанием шириной  $2b$ . В этом случае область контакта известна заранее и, в плоской постановке, представляет собой отрезок  $[-b, b]$ . Исследуем поведения контактных напряжений в окрестности угловых точек штампа. Для этого введем малый параметр  $\varepsilon$  (рис. 2).

В этом случае интегральное уравнение (16) примет вид

$$\int_0^{\varepsilon \sqrt{1 + \psi^2} / \psi} \frac{\tilde{q}(r; b - \varepsilon, \tau)}{[\varepsilon \sqrt{1 + \psi^2} / \psi - r]^\alpha} dr = - \frac{w(b - \varepsilon, \tau)}{\pi g(\psi) \sqrt{1 - \psi^2}} (1 - 2\psi^2),$$

$$\tilde{q}(r; b - \varepsilon, \tau) = \tilde{q}(r, \psi; b - \varepsilon, \tau). \quad (17)$$

Сделаем замену  $r = y \sqrt{1 + \psi^2} / \psi$  в (17):

$$\frac{1}{\alpha^{\alpha-1}} \int_0^\varepsilon \frac{\tilde{q}(y \sqrt{1 + \psi^2} / \psi; b - \varepsilon, \tau)}{[\varepsilon - y]^\alpha} dy = - \frac{w(b - \varepsilon, \tau)}{\pi g(\psi) \sqrt{1 - \psi^2}} (1 - 2\psi^2). \quad (18)$$

Решение (18) имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\sqrt{1 + \psi^2} / \psi \varepsilon; b - \varepsilon, \tau) &= \frac{1 - 2\psi^2}{\pi g(\psi) \sqrt{1 - \psi^2}} (\sqrt{1 + \psi^2} / \psi)^{\alpha-1} \times \\ &\times \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[ \frac{w(b, \tau)}{\varepsilon^{1-\alpha}} + \int_0^\varepsilon \frac{w'_y(b - y, \tau)}{[\varepsilon - y]^{1-\alpha}} dy \right]. \end{aligned}$$

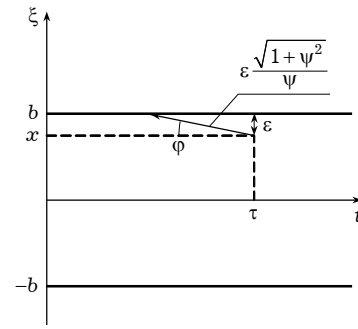


Рис. 2

Переходя в нем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{q}(a\varepsilon; b - \varepsilon, \tau) = \hat{q}(b, \tau) = ca^{\alpha-1} \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{w(b, \tau)}{\varepsilon^{1-\alpha}}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что для того, чтобы функция  $\tilde{q}(r, \psi; x, \tau)$  оставалась ограниченной в окрестности границы области контакта, порядок особенности должен быть равен  $-1$ . Отметим, что в аналогичной статической контактной задаче порядок особенности равен  $-1/2$ .

Работа выполнена в рамках грантов РФФИ 06-01-00525, 08-01-90017.

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 639 с.
2. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
4. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. – Москва: Физматлит, 2003. – 608 с.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

### АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ НАПРУЖЕНЬ У ПЛОСКИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

Пропонується методика аналітичного дослідження особливостей контактних напружень в околі нестационарно-рухомої границі області контакту в плоских нестационарних контактних задачах з рухомими границями, яка базується на зведенні граничного двовимірного сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язує задачу, до системи двох одновимірних сингулярних рівнянь. Як інструменти дослідження використовується методика зведення сингулярних інтегральних рівнянь до еквівалентної задачі типу Рімана для кусково-аналітичних функцій і техніка дробового інтегро-диференціювання. Показано, що на рухомій границі області контакту має місце степенева особливість, порядок якої залежить від швидкості руху границі.

### ANALYTIC INVESTIGATION OF FEATURES OF STRESSES IN PLANE NON-STATIONARY CONTACT PROBLEMS WITH MOVING BOUNDARIES

A method for analytic investigation of singularities in the vicinity of transitional moving boundary of the contact area in the plane non-stationary contact problems is proposed. The method is based on reduction of boundary two-dimensional singular integral equation to a system of two one-dimensional singular equations. The means of research are: the method of reduction of singular integral equations to equivalent Riemann's piece-wise smooth functions problem and the technique of rational integro-differentiation. It is shown that on the moving contact boundary there is a power singularity and the power depends on the velocity of the boundary.

Моск. авиац. ин-т (гос. техн. ун-т), Москва, Россия

Получено  
31.03.08