

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

Излагается методика определения осесимметричного геометрически нелинейного термовязкоупругопластического состояния слоистых оболочек вращения с учетом повреждаемости материала. Методика основана на геометрически нелинейных соотношениях теории тонких оболочек, учитывающих деформации поперечного сдвига. В качестве уравнений состояния используются соотношения термовязкопластичности, описывающие деформирование элемента тела по траекториям малой кривизны. Входящее в кинетические уравнения повреждаемости и ползучести эквивалентное напряжение определяется критерием длительной прочности, учитывающим влияние вида напряженного состояния. Методика иллюстрируется численными результатами.

1. Введение. В различных областях техники находят применение слоистые оболочки вращения, состоящие из изотропных и анизотропных материалов. В процессе неизотермического нагружения в них могут накапливаться пластические деформации и деформации ползучести, развитие которых может привести к разрушению конструкции. Определению напряженно-деформированного состояния (НДС) однослойных оболочек вращения с учетом повреждаемости материала посвящены работы [1–3, 6, 17, 18], среди которых в работах [1, 2, 6] задачи решались с учетом пластических деформаций в геометрически линейной постановке. В отличие от этого, изложим методику определения осесимметричного термовязкоупругопластического геометрически нелинейного НДС тонких слоистых оболочек вращения с учетом повреждаемости материала. Методика основана на геометрически нелинейных соотношениях теории тонких оболочек, полученных при малых удлинениях и сдвигах, а также на уравнениях состояния, описывающих деформирование элемента тела по траекториям малой кривизны [14–16].

2. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку вращения, составленную из последовательно соединенных звеньев с различной формой меридиана. В пределах одного звена оболочка состоит из N изотропных и ортотропных слоев с переменной вдоль меридиана толщиной и свойствами материалов, зависящими от температуры. Предполагается, что слои собраны без натяга и деформируются без проскальзывания и отрыва. Положение произвольной точки оболочки определим в системе криволинейных ортогональных до деформации координат s, φ, ζ , где $s, s_0 \leq s \leq s_n$, – длина дуги координатного меридиана; φ – окружная координата; $\zeta, \zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_N$, – расстояние точки от координатной поверхности. Координаты ζ_0 и ζ_N соответствуют внутренней и наружной поверхностям, а координаты $\zeta_k, k = 1, \dots, N-1$, – поверхностям контакта смежных слоев.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ оболочка находится в естественном недеформированном состоянии при температуре $T = T_0$, а затем подвергается действию осесимметричных тепловых и силовых нагрузок, вызывающих осесимметричное НДС и кручение. Предположим, что в изотропных слоях развиваются пластические деформации и деформации ползучести, а ортотропные слои деформируются упруго. Задачу будем решать

в геометрически нелинейной, квазистатической постановке. Будем рассматривать консервативные нагрузки, отнесенные к недеформированной системе координат. Повреждаемость материала при термовязкоупругопластическом деформировании будем описывать при помощи скалярного параметра ω . Процесс нагружения разобьем на ряд малых этапов, а величины этапов выберем так, чтобы наилучшим образом отразить историю процесса нагружения и скорость его протекания.

3. Геометрические и статические уравнения. Для вывода уравнений геометрически нелинейного деформирования оболочки, учитывающих поперечные сдвиги, воспользуемся соотношениями нелинейной теории упругости [11] и следующими допущениями.

1. Выполняется гипотеза прямолинейного элемента для всего пакета слоев [9], в соответствии с которой перемещения u_i , $i = s, \varphi, \zeta$, по толщине оболочки изменяются по линейному закону

$$u_s = u + \zeta \psi_s, \quad u_\varphi = v + \zeta \psi_\varphi, \quad u_\zeta = w,$$

где u, v – перемещения точек координатной поверхности в направлениях s и φ ; w – прогиб координатной поверхности; ψ_s и ψ_φ – углы поворота прямолинейного элемента, изначально нормального к недеформированной координатной поверхности.

2. Линейные части тензора деформаций e_{ss} , $e_{\varphi\varphi}$, $e_{\zeta\zeta}$ и поворот ω_ζ в выражениях для компонент деформаций [11] таковы, что ими можно пренебречь по сравнению с единицей, а компоненты $e_{s\zeta}$, $e_{\varphi\zeta}$ и повороты ω_s , ω_φ таковы, что можно пренебречь по сравнению с единицей лишь их квадратами и произведениями [8].

3. Нормальное напряжение $\sigma_{\zeta\zeta}$ мало по сравнению с остальными нормальными напряжениями и им можно пренебречь, т. е. $\sigma_{\zeta\zeta} = 0$.

4. Рассматриваются тонкие оболочки, для которых величинами ζk_s , ζk_φ , можно пренебречь по сравнению с единицей, где k_s и k_φ – главные кривизны координатной поверхности оболочки.

Используя данные допущения и зависимость между деформациями и перемещениями [11], получаем следующие геометрические уравнения, устанавливающие связь между параметрами деформации координатной поверхности оболочки и перемещениями этой поверхности [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= u' + k_s w + \frac{\vartheta_s^2}{2}, & \varepsilon_\varphi &= \rho u + k_\varphi w + \frac{\vartheta_\varphi^2}{2}, \\ \alpha_s &= \psi_s', & \alpha_\varphi &= \rho \psi_s, & \Omega &= v' - \rho v + \vartheta_s \vartheta_\varphi, & \tau &= \psi_\varphi' - \rho \psi_\varphi, \\ \vartheta_s &= k_s u - w', & \vartheta_\varphi &= k_\varphi v, & \gamma_s &= \psi_s - \vartheta_s, & \gamma_\varphi &= \psi_\varphi - \vartheta_\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$k_s = \theta', \quad k_\varphi = \frac{\sin \theta}{r}, \quad \rho = \frac{\cos \theta}{r}, \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{ds}. \quad (2)$$

В равенствах (1), (2) обозначено: $\varepsilon_s, \varepsilon_\varphi$ – компоненты деформации координатной поверхности в направлениях s и φ ; α_s, α_φ – параметры, характеризующие изменение кривизны координатной поверхности в тех же направлениях; Ω, τ – параметры, характеризующие изменение угла между осями s и φ ; $\vartheta_s, \vartheta_\varphi$ – углы поворота нормали к координатной поверхности; γ_s и γ_φ – углы поворота, обусловленные поперечными сдвигами; r –

радиус параллельного круга координатной поверхности; $(\pi - \theta)$ – угол между нормалью к этой поверхности и осью вращения z .

Связь между компонентами деформации в произвольной точке оболочки с параметрами деформации ее координатной поверхности представляется в виде

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_s + \zeta \alpha_s, \quad 2\varepsilon_{s\varphi} = \Omega + \zeta \tau, \quad 2\varepsilon_{s\zeta} = \gamma_s, \quad (s, \varphi),$$

где символ (s, φ) означает круговую перестановку индексов s и φ .

Уравнения равновесия и статические граничные условия получим из принципа возможных перемещений [11]. Уравнения равновесия имеют вид [7]

$$\begin{aligned} (rN_s)' - r\rho N_\varphi + rk_s \widehat{Q}_s + rq_s &= 0, \\ (rN_{s\varphi})' + r\rho N_{s\varphi} + rk_\varphi Q_\varphi - rk_\varphi N_{s\varphi} \vartheta_s - rk_\varphi N_\varphi \vartheta_\varphi + rq_\varphi &= 0, \\ (r\widehat{Q}_s)' - rk_s N_s - rk_\varphi N_\varphi + rq_\zeta &= 0, \\ (rM_s)' - r\rho M_\varphi - r\widehat{Q}_s - rN_s \vartheta_s - rN_{s\varphi} \vartheta_\varphi + rm_s &= 0, \\ (rM_{s\varphi})' + r\rho M_{s\varphi} - rQ_\varphi + rm_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\widehat{Q}_s = Q_s - N_s \vartheta_s - N_{s\varphi} \vartheta_\varphi$. В уравнениях (3) обозначено: N_s , Q_s , M_s – нормальное, перерезывающее усилия и изгибающий момент, действующие в сечении $s = \text{const}$; N_φ , Q_φ , M_φ – аналогичные усилия и момент, действующие в сечении $\varphi = \text{const}$; $N_{s\varphi}$, $M_{s\varphi}$ – сдвигающее усилие и крутящий момент, действующие в этих сечениях; q_s , q_φ , q_ζ – приведенные к координатной поверхности распределенные нагрузки; m_s , m_φ – распределенные моменты. В рамках принятых допущений усилия и моменты определяются по формулам

$$\begin{aligned} N_s &= F(\sigma_{ss}), \quad N_{s\varphi} = F(\sigma_{s\varphi}), \quad Q_s = F(\sigma_{s\zeta}), \quad (s, \varphi), \\ M_s &= F(\sigma_{ss}\zeta), \quad M_{s\varphi} = F(\sigma_{s\varphi}\zeta), \quad (s, \varphi), \quad F(\cdot) = \sum_{i=1}^N \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} (\cdot) d\zeta. \end{aligned} \quad (4)$$

Статические граничные условия на контуре $s = \text{const}$ задаются в виде линейных комбинаций усилий и моментов N_s , $N_{s\varphi}$, \widehat{Q}_s , M_s , $M_{s\varphi}$, а кинематические граничные условия – в виде линейных комбинаций величин u , v , w , ψ_s , ψ_φ .

4. Определяющие уравнения. В качестве уравнений состояния для изотропных слоев воспользуемся соотношениями термовязкопластичности, описывающими деформирование элемента тела по траекториям малой кривизны [14–16], линеаризованными методом дополнительных деформаций. Эти уравнения построены на основе закона упругого изменения объема

$$\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T), \quad (5)$$

условия аддитивности девиаторов упругих e_{ij}^e и необратимых e_{ij}^n деформаций, а также условия соосности девиаторов напряжений и скоростей неупругих деформаций. В равенстве (5) обозначено: σ_0 – среднее нормальное напряжение; ε_0 – среднее относительное удлинение; $\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$ – чис-

то тепловая деформация; α_T – коэффициент линейного температурного расширения; $K = 2G(1 + \nu)/(1 - 2\nu)$ – модуль всестороннего объемного расширения; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Компоненты девиатора упругих деформаций e_{ij}^e связаны с компонентами девиатора напряжений s_{ij} законом Гука: $e_{ij}^e = \frac{s_{ij}}{2G}$. Компоненты девиатора необратимых деформаций определяются равенствами

$$e_{ij}^n = \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^n, \quad \Delta_k e_{ij}^n = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma_n, \quad S = \left(\frac{1}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где S – интенсивность касательных напряжений; угловые скобки означают осреднение за k -й этап нагружения; $\Delta_k \Gamma_n$ – приращение накопленной необратимой составляющей интенсивности деформаций сдвига, которое является функционалом процесса нагружения [15]

$$\Delta_k \Gamma_n = \Phi[S(t), T(t), t].$$

Приращение $\Delta_k \Gamma_n$ состоит из приращения интенсивности пластических деформаций сдвига $\Delta_k \Gamma_p$ и приращения интенсивности деформаций сдвига ползучести $\Delta_k \Gamma_c$. Приращение $\Delta_k \Gamma_p$ конкретизируется на основе уравнения мгновенной термомеханической поверхности $\sigma = f(\varepsilon^*, T)$ по методике, изложенной в работе [5]. Здесь σ – напряжение в образце; ε^* – мгновенная составляющая деформации образца. Приращение $\Delta_k \Gamma_c$ конкретизируется на основе диаграмм ползучести, полученных при различных фиксированных значениях температуры с такой скоростью предварительного нагружения, с которой снимались диаграммы мгновенного деформирования, а также на основе диаграмм длительной прочности, полученных в опытах на одноосное растяжение и чистое кручение. При одноосном растяжении $\Delta_k \Gamma_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_k \varepsilon_c$, где $\Delta_k \varepsilon_c$ – приращение деформации ползучести за k -й этап. Полная деформация ползучести ε_c определяется как сумма приращений за все этапы нагружения.

Будем рассматривать такие изотропные материалы и такие условия их нагружения, для которых первые два участка экспериментальных диаграмм ползучести хорошо описываются степенными зависимостями от напряжения и времени. При фиксированном значении температуры T скорость деформации ползучести будем описывать выражением [4, 6]

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{A m \sigma_e^n t^{m-1}}{(1 - \omega)^p}, \quad (7)$$

где σ_e – эквивалентное напряжение; ω – параметр повреждаемости; A, n, m – коэффициенты, зависящие от температуры, которые находятся из условия наилучшей аппроксимации первых двух участков экспериментальных кривых ползучести; p – коэффициент, зависящий от эквивалентного напряжения и температуры, который определяется из условия наилучшей аппроксимации третьего, неустановившегося участка диаграмм ползучести [4].

Параметр ω является функционалом процесса нагружения [15]

$$\omega = \omega[\sigma_e(t), T(t), t].$$

Для его определения воспользуемся кинетическим уравнением Работнова [12], записанным в предположении, что при сжатии повреждениями в эле-

менте тела можно пренебречь по сравнению с возникающими повреждениями при растяжении:

$$\dot{\omega} = \begin{cases} C \left(\frac{\sigma_e}{1 - \omega} \right)^Q, & \sigma_0 \geq 0, \\ 0, & \sigma_0 < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь C и Q – коэффициенты, зависящие от температуры [15], которые определяются из диаграмм длительной прочности.

Эквивалентное напряжение σ_e определяется критерием длительной прочности [15]

$$\sigma_e = \chi(\tau_{\text{oct}} - \sigma_{\text{max}}) + \sigma_{\text{max}}, \quad (9)$$

где τ_{oct} – октаэдрическое касательное напряжение; σ_{max} – максимальное главное нормальное напряжение; χ – функция, зависящая от интенсивности касательных напряжений S и температуры T и учитывающая влияние вида напряженного состояния. Эта функция находится из условия совпадения диаграмм длительной прочности при одноосном растяжении и чистом кручении. Методика определения параметров A, n, m, p, C, Q и функции χ при неизотермических процессах нагружения изложена в работе [4].

Отметим, что коэффициенты C и Q в кинетическом уравнении (8) определяются из диаграмм длительной прочности, которые учитывают повреждаемость материала при первоначальном упругопластическом деформировании, а эквивалентное напряжение σ_e в процессе решения задачи определяется с учетом пластических деформаций и деформаций ползучести. Следовательно, уравнение (8) описывает повреждаемость материала при термовязкоупругопластическом деформировании.

Отметим также, что для построения модели повреждаемости (7)–(9) требуется значительный объем информации о свойствах материала, в частности, диаграммы длительной прочности при одноосном растяжении и чистом кручении. В случае отсутствия такой информации будем пользоваться другими кинетическими уравнениями и другими критериями длительной прочности.

В качестве уравнений состояния для ортотропных слоев воспользуемся соотношениями термоупругости ортотропного тела [9]. В качестве критерия прочности воспользуемся простейшим критерием максимальных напряжений, в соответствии с которым разрушение ортотропного материала происходит при достижении одной из компонент тензора напряжений своего предельного значения.

В общем случае изотропного и ортотропного материала уравнения связи между напряжениями и деформациями для оболочки вращения с учетом принятых допущений представим в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [B] \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^\delta, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_{ss}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{s\varphi}, \sigma_{s\zeta}, \sigma_{\varphi\zeta}\}^\top, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, 2\varepsilon_{s\varphi}, 2\varepsilon_{s\zeta}, 2\varepsilon_{\varphi\zeta}\}^\top, \\ [B] &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{55} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^\delta = [B](\boldsymbol{\varepsilon}^n - \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T), \end{aligned} \quad (10)$$

где символ « \top » в верхнем индексе означает операцию транспонирования. Входящие в равенства (10) величины $[B]$, $\boldsymbol{\sigma}^\delta$, $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ и $\boldsymbol{\alpha}_T$ означают, соответственно, матрицу жесткости и векторы дополнительных напряжений,

необратимых деформаций и коэффициентов линейного температурного расширения, которые определяются по-разному в зависимости от используемых уравнений состояния. В изотропных слоях имеют место равенства

$$B_{11} = B_{22} = \frac{2G}{1-\nu}, \quad B_{12} = \nu B_{11}, \quad B_{44} = B_{55} = B_{66} = G,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^n = \{\varepsilon_{ss}^n, \varepsilon_{\varphi\varphi}^n, 2\varepsilon_{s\varphi}^n, 2\varepsilon_{s\zeta}^n, 2\varepsilon_{\varphi\zeta}^n\}^\top, \quad \boldsymbol{\alpha}_T = \{\alpha_T, \alpha_T, 0, 0, 0\}^\top,$$

где ε_{ij}^n , $i, j = s, \varphi, \zeta$, – компоненты тензора необратимых деформаций.

В ортотропных слоях указанные величины определяются зависимостями

$$B_{11} = \frac{E_s}{1-\nu_{s\varphi}\nu_{\varphi s}}, \quad B_{22} = \frac{E_\varphi}{1-\nu_{s\varphi}\nu_{\varphi s}}, \quad B_{12} = \nu_{s\varphi}B_{11} = \nu_{\varphi s}B_{22},$$

$$B_{44} = G_{s\zeta}, \quad B_{55} = G_{\varphi\zeta}, \quad B_{66} = G_{s\varphi},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^n = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}_T = \{\alpha_{Ts}, \alpha_{T\varphi}, 0, 0, 0\}^\top,$$

где E_i и α_{Ti} , $i = s, \varphi$, – модуль упругости и коэффициент линейного температурного расширения в направлении i ; G_{ij} , $i, j = s, \varphi, \zeta$, – модуль сдвига в плоскости ij ; ν_{ij} , $i, j = s, \varphi$, – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечную деформацию в направлении i при растяжении в направлении j .

Отметим, что уравнения (10) по виду совпадают с соответствующими уравнениями работы [7], в которой использовались физические соотношения теории простых процессов нагружения. Различие состоит лишь в конкретизации коэффициентов матрицы жесткости $[B]$. Следовательно, переходя в равенствах (10) к усилиям и моментам (4), получим физические соотношения такого же вида, что и в работе [7]. Эти соотношения имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_s \\ \mathbf{X}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ [K]^\top & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_s^\partial \\ \mathbf{X}_\varphi^\partial \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = [L]\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{Q}^\partial,$$

$$\mathbf{X}_s = \{N_s, N_{s\varphi}, M_s, M_{s\varphi}\}^\top, \quad \mathbf{X}_\varphi = \{N_\varphi, M_\varphi\}^\top, \quad \mathbf{Q} = \{Q_s, Q_\varphi\}^\top,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \{\varepsilon_s, \Omega, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{\tau}\}^\top, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\varphi = \{\varepsilon_\varphi, \boldsymbol{x}_\varphi\}^\top, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_s, \gamma_\varphi\}^\top, \quad (11)$$

где $[C]$, $[K]$, $[D]$, $[L]$ – матрицы жесткостных характеристик; \mathbf{X}_s^∂ , $\mathbf{X}_\varphi^\partial$, \mathbf{Q}^∂ – векторы дополнительных усилий и моментов. Выражения для коэффициентов матриц жесткости приведены в работе [7]. Из равенств (11) можно найти величины γ_s и Q_φ :

$$\gamma_s = \ell_{11}(Q_s + Q_s^\partial) - \ell_{12}\gamma_\varphi, \quad Q_\varphi = \ell_{12}(Q_s + Q_s^\partial) + \ell_{22}\gamma_\varphi - Q_\varphi^\partial,$$

$$\ell_{11} = \frac{1}{L_{11}}, \quad \ell_{12} = L_{12}\ell_{11}, \quad \ell_{22} = L_{22} - \ell_{12}L_{12}. \quad (12)$$

5. Разрешающая система уравнений. Для вывода разрешающей системы уравнений воспользуемся следующими разрешающими функциями:

$$\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_{10}\}^\top = \{\mathbf{N}, \mathbf{u}\}^\top,$$

$$\mathbf{N} = \{rN_s, rN_{s\varphi}, rM_s, rM_{s\varphi}, r\hat{Q}_s\}^\top, \quad \mathbf{u} = \{u, v, \psi_s, \psi_\varphi, w\}^\top. \quad (13)$$

На основе приведенных геометрических, статических и физических соотношений систему разрешающих уравнений сведем к системе нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{Y}' = [P]\mathbf{Y} + \mathbf{f} + \Phi(\mathbf{Y}), \quad (14)$$

где $[P]$ – матрица геометрически линейной задачи; \mathbf{f} – вектор свободных членов геометрически линейной задачи, зависящий от дополнительных усилий и моментов, которые определяются посредством дополнительных напряжений σ^0 ; $\Phi(\mathbf{Y})$ – вектор, нелинейно зависящий от разрешающих функций y_i . Применяя для линеаризации системы уравнений (14) метод Ньютона, приходим к линеаризованной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y}' = ([P] + [P^n])\mathbf{Y} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^n, \quad (15)$$

где $[P^n]$ и \mathbf{f}^n – матрица и вектор свободных членов геометрически нелинейной задачи, зависящие от компонент разрешающих функций на предыдущем приближении. Выражения для компонент матриц $[P]$, $[P^n]$ и векторов \mathbf{f} , \mathbf{f}^n приведены в работе [7].

Отметим, что приведенный выбор разрешающих функций (13) дает возможность установить некоторые зависимости между компонентами матрицы $[P]$, а также между компонентами матрицы $[P^n]$, которые позволяют существенно сократить время на их формирование.

Систему разрешающих уравнений (15) следует дополнить граничными условиями на торцах оболочки

$$[G]\mathbf{Y} = \mathbf{g}, \quad (16)$$

где $[G]$ и \mathbf{g} – заданные матрица и вектор граничных условий.

Физически и геометрически нелинейная задача решается методом последовательных приближений, в каждом из которых уточняются компоненты вектора \mathbf{f} , содержащие физическую нелинейность, а также матрица $[P^n]$ и вектор \mathbf{f}^n , отвечающие за геометрическую нелинейность. Процесс последовательных приближений на этапе при решении физически нелинейной задачи заканчивается тогда, когда значения интенсивности накопленной необратимой деформации сдвига Γ_n , найденные в двух последовательных приближениях, отличаются на заданную малую величину α , определяющую точность решения задачи. Сходимость решения геометрически нелинейной задачи контролируется по значению модуля вектора перемещений. В каждом приближении произвольного этапа нагружения крайевая задача (15), (16) решается путем сведения к ряду задач Коши, для интегрирования которых применяется метод Рунге – Кутты с дискретной ортогонализацией по Годунову. В процессе поэтапного решения задачи термовязкопластичности в каждой точке оболочки определяется параметр повреждаемости ω . Он находится путем численного интегрирования методом Эйлера кинетического уравнения (8). Суждение о моменте разрушения оболочки осуществляется при достижении этим параметром критического значения ω^* хотя бы в одной точке изотропного слоя оболочки.

Следует отметить, что на основе приведенных разрешающих уравнений в случае отсутствия кручения можно также получить решение в рамках классической модели Кирхгофа – Лява. Эта модель предполагает равенство нулю деформаций поперечного сдвига $\varepsilon_{s\zeta}$ и $\varepsilon_{\varphi\zeta}$ и, следовательно, углов сдвига γ_s и γ_φ . Отсюда вытекает, что касательные напряжения $\sigma_{s\zeta}$ и $\sigma_{\varphi\zeta}$, а также соответствующие перерезывающие усилия Q_s и Q_φ , найден-

ные из физических уравнений, также обращаются в нуль. Кроме того, должно выполняться равенство $\sigma_{s\varphi} = 0$ и, как следствие – равенства $N_{s\varphi} = M_{s\varphi} = 0$. При отсутствии крутящих нагрузок и окружных перемещений эти равенства выполняются автоматически при решении краевой задачи путем задания соответствующих нулевых граничных условий. Всем перечисленным выше условиям можно удовлетворить, если при формировании матрицы разрешающей системы уравнений и вектора свободных членов обнулить величины ℓ_{ij} в равенствах (12).

6. Примеры расчета. Вначале рассмотрим апробирующий пример, в котором решение задачи о поперечном изгибе круглой пластины с учетом повреждаемости материала при ползучести в геометрически нелинейной постановке сопоставим с решением из работы [18].

Пластина имеет такие размеры: внутренний радиус $r_0 = 0.01$ м; наружный радиус $r_n = 0.04$ м; толщина $h = 0.003$ м. Граничные условия задавались следующими:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_0: \quad N_s = N_{s\varphi} = M_s = M_{s\varphi} = \hat{Q}_s = 0; \\ \text{при } r = r_n: \quad N_s = v = w = \psi_s = \psi_\varphi = 0. \end{aligned}$$

Пластина находится при температуре $T = T_0 = 573$ К под действием поверхностной нагрузки $q_\zeta = 0.3$ МПа. Она изготовлена из алюминиевого сплава Д16АТ, имеющего при данной температуре модуль упругости $E = 65$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Расчеты проводились на основе кинетического уравнения повреждаемости $\dot{\omega} = C \left(\frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right)^Q$ и уравнения ползучести (7). В качестве эквивалентного напряжения выбиралась интенсивность нормальных напряжений $\sigma_i = S\sqrt{3}$. Материальные константы имеют значения: $A = 0.335 \cdot 10^{-7}$ МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$; $C = 1.9 \cdot 10^{-7}$ МПа $^{-Q}$ ч $^{-1}$; $Q = n = p = 3$; $m = 1$; $r = 1.4$. Предельное значение параметра повреждаемости $\omega^* = 0.9$. Расчеты проводились на основе гипотез Кирхгофа – Лява. Количество точек интегрирования вдоль радиуса пластины принималось $K_s = 201$, по толщине $K_\zeta = 17$; шаг по времени $\Delta t = 0.005$ ч; точность решения задачи $\alpha = 0.001$. Такой пространственно-временной дискретизации оказалось достаточно для получения сходящихся результатов.

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1–3. На рис. 1 изображена зависимость от времени относительного прогиба w/h при $r = r_0$. Сплошными линиями показаны результаты расчета по разработанной методике, а точками – по методике работы [18]. Кривые 1 соответствуют геометрически линейному решению, а кривые 2 – геометрически нелинейному. На рис. 2 представлена зависимость от времени изгибающего момента M_s при $r = r_n$. На рис. 3 в этом же сечении в точке внутренней поверхности пластины показано изменение во времени параметра повреждаемости ω , где он достигает критического значения ω^* . Из последнего рисунка видно, что в расчетах по разработанной методике наблюдается более интенсивный рост параметра ω , чем в работе [18]. Вследствие этого значение времени до разрушения в геометрически линейном расчете оказалось несколько меньшим, чем в работе [18]. Вместе с тем, значения изгибающего момента и прогиба, найденные по двум методикам, хорошо согласуются между собой.

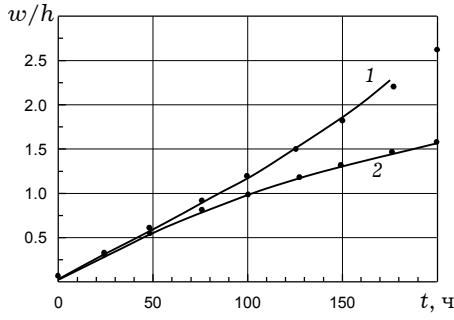


Рис. 1

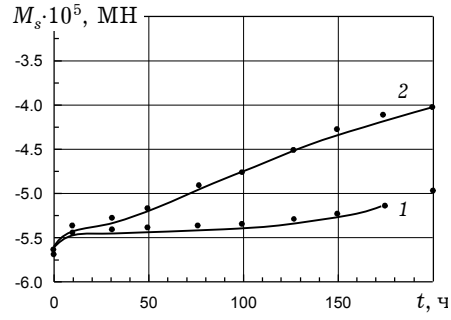


Рис. 2

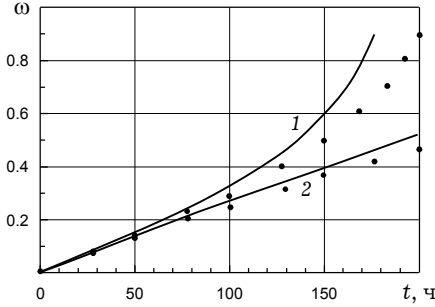


Рис. 3

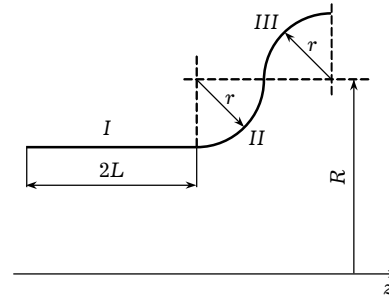


Рис. 4

Теперь рассмотрим геометрически нелинейное термовязкоупругопластическое деформирование гофрированной оболочки, срединный меридиан которой изображен на рис. 4. Геометрические размеры имеют следующие значения: $R = 0.14$ м; $r = 0.04$ м; $2L = r\pi$ м; толщина $h = 0.004$ м. Оболочка состоит из цилиндрического звена с длиной образующей $2L$ и двух тороидальных звеньев, каждое из которых имеет длину дуги L . Звенья обозначены на рисунке римскими цифрами $I - III$ и плавно соединены между собою без разрыва производной θ' .

Первоначально оболочка находится при температуре $T_0 = 273$ К, а затем подвергается действию температуры, внутреннего давления p , осевого сжимающего N_s и сдвигающего $N_{s\varphi}$ усилий, меняющихся во времени. Предполагается, что температура постоянна по толщине оболочки. Закон изменения во времени температуры и внутреннего давления задается равенствами

$$T = T_0 + (T_k - T_0)F(t), \quad p = p_k F(t), \quad F(t) = 1 - \exp(-10t).$$

Граничные условия задаются в виде

$$\begin{aligned} \text{при } s = s_0: \quad N_s = -N_k F(t), \quad N_{s\varphi} = N_k F(t), \quad M_{s\varphi} = \hat{Q}_s = \psi_s = 0; \\ \text{при } s = s_n: \quad \hat{Q}_s = u = v = \psi_s = \psi_\varphi = 0. \end{aligned}$$

Здесь время исчисляется в часах, а параметры нагрева и нагружения имеют следующие значения: $T_k = 773$ К; $p_k = 0.006$ ГПа; $N_k = 0.0006$ ГПа·м.

Оболочка изготовлена из стали 20, для которой в работе [10] приведены диаграммы одноосной ползучести и длительной прочности при температуре $T = 773$ К. На основе методики работы [4] были определены параметры ползучести и длительной прочности этой стали при постоянном значении функции $\chi = 0.5$. Их значения приведены в табл. 1. Мгновенная термомеханическая поверхность заимствована из работы [13] и в виде чисел помещена в табл. 2. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

Таблица 1

Q	$C, \text{ ГПа}^{-Q}\text{ч}^{-1}$	$A, \text{ ГПа}^{-n}\text{ч}^{-m}$	n	m	p
6.3311	949.4	18961	6.742	0.7663	4

Таблица 2

$\varepsilon^*, \%$	$\sigma, \text{ ГПа}$ при различных температурах $T, \text{ К}$				
	$T = 273$	$T = 473$	$T = 573$	$T = 673$	$T = 773$
0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.064	0.1300	0.1200	0.1152	0.1095	0.1000
0.120	0.2435	0.2240	0.2000	0.1900	0.1170
0.180	0.3650	0.3000	0.2250	0.2100	0.1320
0.260	0.3830	0.3130	0.2450	0.2300	0.1450
0.395	0.3950	0.3200	0.2700	0.2550	0.1650
0.700	0.4000	0.3350	0.3000	0.2830	0.1920
1.000	0.4000	0.3460	0.3200	0.2980	0.2050
1.500	0.4000	0.3750	0.3470	0.3210	0.2160
2.000	0.4000	0.4250	0.3730	0.3430	0.2250
$\alpha_T \cdot 10^6$	11.92	12.66	13.08	13.47	13.92

Предполагается, что в исследуемом процессе нагружения оболочки ниже температуры $T_1 = 473 \text{ К}$ деформациями ползучести можно пренебречь по сравнению с мгновенными упругопластическими. Это предположение основывается на анализе данных о реологических свойствах данной стали. Для обеспечения этого предположения в расчетах при температуре T_1 задавались следующие значения параметров ползучести и длительной прочности: $Q = 10$; $C = 10^{-500}$; $p = 4$; $A = 10^{-50}$; $m = n = 1$, а для значений температуры, лежащих в диапазоне $T_1 \leq T \leq T_k$, значения указанных параметров определялись путем интерполяции по методике, изложенной в работе [4].

Расчеты проводились на основе сдвиговой модели теории оболочек при использовании соотношений (7)–(9); критическое значение параметра повреждаемости принималось $\omega^* = 0.9$; точность решения задачи $\alpha = 0.001$. Было рассмотрено два варианта расчета: первый – в геометрически нелинейной, а второй – в геометрически линейной постановке. Задача решалась с переменным шагом по времени. Параметры пространственно-временной дискретизации варьировались и выбирались такими, чтобы обеспечить сходимость полученных результатов.

В результате расчетов было установлено, что при решении геометрически нелинейной задачи разрушение оболочки произошло в точке внутренней поверхности второго звена в сечении со значением меридиональной координаты $s_1^* = 2.615L$. Время разрушения составило $t^* = 73116.1 \text{ ч}$. При решении геометрически линейной задачи разрушение также наступило в точке внутренней поверхности, но в сечении с координатой $s_2^* = 2.625L$ и в момент времени $t^* = 403833.8 \text{ ч}$. Из приведенного следует, что если сечения, в которых происходит разрушение оболочки, в двух вариантах расчета оказались очень близкими, то время до разрушения отличается в пять с половиной раз. Анализ напряженно-деформированного состояния и разру-

шения в данных сечениях, показал, что внутренние волокна оболочки являются растянутыми, а наружные – сжатыми. Во внутренних волокнах накапливается повреждаемость и развиваются деформации ползучести, а пластические деформации не возникают. В отличие от этого, в наружных (сжатых) волокнах уровень напряжений выше и в них развиваются оба типа неупругих деформаций, но в силу уравнения (8) повреждаемость в них не накапливается.

Некоторые результаты решения геометрически нелинейной задачи представлены на рис. 5–7. На этих рисунках результаты, соответствующие последнему этапу нагружения, отвечают моменту времени $t_1^* = 73116$ ч, которому соответствует значение параметра повреждаемости $\omega_1^* = 0.8956$.

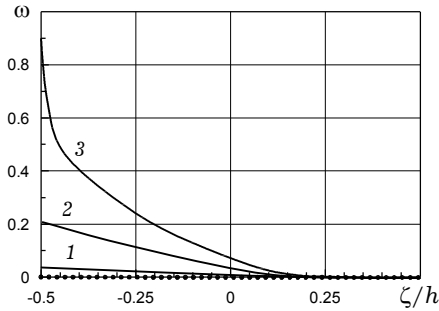


Рис. 5

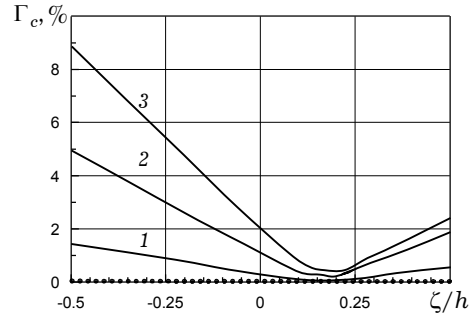


Рис. 6

На рис. 5 показано изменение во времени параметра повреждаемости по толщине оболочки в сечении $s = s_1^*$. Здесь и далее точками представлены результаты в момент времени $t = 500$ ч; кривая 1 соответствует моменту времени $t = 40000$ ч; кривая 2 – моменту времени $t = 70000$ ч; кривая 3 – моменту времени t_1^* . На рис. 6 и 7 изображены графики изменения по толщине оболочки в этом же сечении интенсивности деформаций ползучести Γ_c и меридиональных напряжений σ_{ss} . Из графиков видно, что в опасном сечении происходит интенсивное накопление неупругих деформаций, что, в свою очередь, приводит к существенному перераспределению напряжений по толщине оболочки и к значительному падению напряжений на внутренней поверхности.

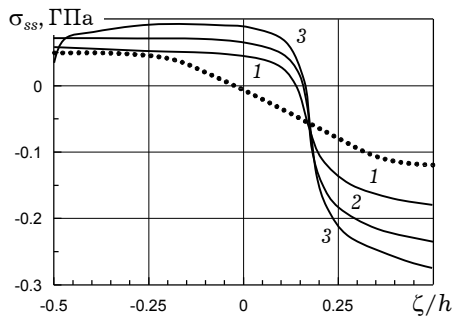


Рис. 7

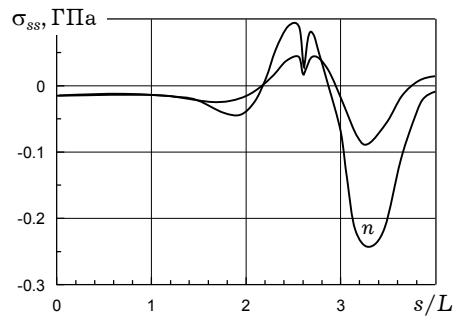


Рис. 8

На рис. 8 приведено сопоставление результатов решения геометрически нелинейной и линейной задачи в моменты времени, предшествующие разрушению. Геометрически линейному решению соответствуют результаты расчета, полученные при $t_2^* = 403830$ ч и $\omega_2^* = 0.8963$. На этом рисунке изображены графики изменения вдоль меридиана оболочки напряжений σ_{ss} на внутренней поверхности. Кривая, отвечающая геометрически нелинейному решению, помечена буквой n , а кривая без обозначений соответствует линейному решению.

Из приведенных результатов видно, что учет геометрической нелинейности в задачах с учетом повреждаемости материала оболочек вращения может существенно повлиять не только на их напряженно-деформированное состояние, но и на время до разрушения.

1. Белов А. В. Разрушение в условиях ползучести неравномерно нагретой вращающейся конической оболочки переменной жесткости // Тр. XIV научной конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР. – Киев, 1989. – Ч. 2. – С. 226–230. – Деп. в ВИНТИ 2.08.89, № 5165-В89 ДЕП.
2. Белов А. В. Упругопластическое напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженных оболочек вращения с учетом повреждаемости материала при ползучести. – Киев: Инженерно-строительный институт, 1989. – 33 с. – Деп. в УкрНИИТИ 81.05.89, № 1456-УК89.
3. Бурлаков А. В., Львов Г. И., Морачковский О. К. Длительная прочность оболочек. – Харьков: Вища шк., 1981. – 104 с.
4. Галишин А. З. Методика определения параметров ползучести и длительной прочности изотропных материалов при неизотермических процессах нагружения // Проблемы прочности. – 2004. – № 4. – С. 21–30.
5. Галишин А. З. Определение осесимметричного геометрически нелинейного термовязкоупругопластического состояния слоистых оболочек на основе теории процессов деформирования малой кривизны // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 7. – С. 114–122.
6. Галишин А. З. Определение термовязкопластического состояния оболочек вращения с учетом повреждаемости материала при ползучести // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 5. – С. 71–79.
7. Галишин А. З., Мерзляков В. А., Шевченко Ю. Н. Применение метода Ньютона к расчету осесимметричного термоупругопластического состояния гибких слоистых разветвленных оболочек на основе сдвиговой модели // Механика композитных материалов. – 2001. – **37**, № 3. – С. 307–322.
8. Ганеева М. С. Прочность и устойчивость оболочек вращения. – Москва: Наука, 1992. – 161 с.
9. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – Москва: Наука, 1992. – 336 с.
10. Кац Ш. Н. Исследование длительной прочности углеродистых труб // Теплоэнергетика. – 1955. – № 11. – С. 37–40.
11. Новожилов В. В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
12. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
13. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат и др. – Москва: Машиностроение, 1965. – 567 с.
14. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. Физические уравнения термовязкопластичности. – Киев: Наук. думка, 1982. – 240 с.
15. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г., Брайковская Н. С., Захаров С. М. Исследование процессов разрушения элементов тела в результате повреждаемости материала при ползучести // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 4. – С. 21–30.
16. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г., Тормахов Н. Н. Определяющие уравнения для описания процессов деформирования элементов тела по траекториям малой кривизны с учетом вида напряженного состояния материала // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 4. – С. 62–72.
17. Altenbach H. Topical problems and applications of creep theory // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 6. – P. 631–655.
18. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A. Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions // Archive of Appl. Mech. – 1997. – **67**. – P. 339–352.

**ВИЗНАЧЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО
ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ТОНКИХ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК
З УРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖУВАНОСТІ МАТЕРІАЛУ**

Викладено методику визначення осесиметричного геометрично нелінійного термов'язкопружнопластичного стану шаруватих оболонок обертання з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. Методика базується на геометрично нелінійних співвідношеннях теорії тонких оболонок, що враховують деформації поперечного зсуву. Як рівняння стану використовуються співвідношення термов'язкопластичності, що описують деформування елемента тіла по траєкторіях малої кривини. Еквівалентне напруження, що входить до кінетичних рівнянь пошкоджуваності і повзучості, визначається критерієм довготривалої міцності, який враховує вплив виду напруженого стану. Методика ілюструється чисельними результатами.

**DETERMINATION OF AXISYMMETRIC GEOMETRICALLY NONLINEAR
THERMOVISCOELASTOPLASTIC STATE OF THIN LAMINATED SHELLS WITH DAMAGE
OF MATERIAL TAKEN INTO ACCOUNT**

A technique for determination of axisymmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastoplastic state of laminated shells of revolution with damage of material taken into account is stated. The technique is based on geometrically nonlinear equations of the theory of thin shells with transverse-shear deformations taken into account. As the constitutive equations the relations of the theory of deformation processes along the trajectories of small curvature are used. The equivalent stress in the kinetic equations of damage and creep is defined by the criterion of long-duration strength with accounting for a kind of stress state. The technique is illustrated by numerical results.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
05.03.08