

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

Приведены некоторые подходы к решению нелинейных краевых задач теории гибких оболочек, описываемых дифференциальными уравнениями в обыкновенных и частных производных. Рассматриваются одномерные задачи для системы из анизотропных оболочек вращения в докритической и закритической областях деформирования и двумерные задачи для оболочек канонической и неканонической формы. Решение нелинейных задач проводится на основе численных и численно-аналитических методов с использованием дискретной ортогонализации и дискретных рядов Фурье.

Тонкие оболочки широко применяются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях современной техники, в частности, в ракетно-космической отрасли, авиастроении, судостроении, приборостроении и др. [3, 5, 8].

Исследования напряженно-деформированного состояния тонких гибких оболочек под действием различных видов нагрузок при произвольных способах закрепления контуров приводит к формированию и решению нелинейных краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях и уравнениях в частных производных с переменными коэффициентами.

Применение того или иного метода для решения задачи с достаточной степенью точности в значительной мере зависит от геометрических и механических параметров, которые характеризуют некоторые особенности задачи, вида нагружения и закрепления контуров. Также в задачах теории тонких оболочек имеют место локальные и краевые эффекты, что приводит к плохой обусловленности краевой задачи, следствием чего является неустойчивость вычислительного процесса.

В ряде своих работ [12–14] академик НАН Украины Я. С. Подстригач уделял большое внимание исследованию напряженно-деформированного состояния оболочек при силовых и тепловых нагрузках. В монографии [14] отмечается, что «Целесообразность этого, наряду с общетеоретическим интересом, обусловлена тем, что оболочки – весьма распространенный элемент современных конструкций, работающих в сложных условиях эксплуатации, в частности, в условиях неравномерного нагрева, определяющего дополнительные деформации элементов и возникновение в них температурных напряжений, существенно влияющих на несущую способность конструкций».

В настоящей статье излагаются некоторые подходы к решению нелинейных одномерных и двумерных краевых задач для гибких анизотропных и ортотропных оболочек различной формы и структуры в докритической и закритической областях деформирования и приводятся результаты решения задач.

1. Исходные уравнения, описывающие деформацию гибких оболочек вращения. Будем рассматривать тонкие гибкие оболочки вращения произвольной формы меридиана под действием неосесимметричных нагрузок. При этом предполагается, что выполняется гипотеза Кирхгофа – Лява и принимается вариант геометрически нелинейной теории тонких оболочек в квадратичном приближении [2, 4, 6, 16]. Основные исходные уравнения запишем в следующем виде.

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial s}(rN_s) - \cos \varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r q_s = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s} (\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r q_\theta = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial s} (r Q_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R_s} N_s - \sin \varphi N_\theta + r q_\gamma = 0, \\
& \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial s} (r M_s) - \cos \varphi M_\theta - r Q_s - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \vartheta_s - r S \vartheta_\theta = 0, \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta - r \left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s \right) \vartheta_\theta - r S \vartheta_s = 0, \\
& S = N_{\theta s} - \frac{1}{R_s} M_{s\theta} = N_{s\theta} - \frac{\sin \varphi}{r} M_{\theta s}, \quad H = M_{s\theta} = M_{\theta s}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Выражения для деформаций:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \vartheta_s^2, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \vartheta_\theta^2, \\
\varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right) + \vartheta_s \vartheta_\theta, & \alpha_s &= \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} - \frac{1}{2R_s} \vartheta_s^2, \\
\alpha_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s - \frac{\sin \varphi}{2r} \vartheta_s^2, \\
2\alpha_{s\theta} &= \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_\theta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s},
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}, \quad \vartheta_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} v. \tag{3}$$

Соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
N_s &= C_{11} \varepsilon_s + C_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \alpha_s + K_{12} \alpha_\theta, \\
N_\theta &= C_{12} \varepsilon_s + C_{22} \varepsilon_\theta + K_{12} \alpha_s + K_{22} \alpha_\theta, \\
S &= C_{66} \varepsilon_{s\theta} + 2K_{66} \alpha_{s\theta}, \\
M_s &= K_{11} \varepsilon_s + K_{12} \varepsilon_\theta + D_{11} \alpha_s + D_{12} \alpha_\theta, \\
M_\theta &= K_{12} \varepsilon_s + K_{22} \varepsilon_\theta + D_{12} \alpha_s + D_{22} \alpha_\theta, \\
H &= K_{66} \varepsilon_{s\theta} + 2D_{66} \alpha_{s\theta}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Коэффициенты C_{ij} , K_{ij} и D_{ij} определяются по известным формулам [4]. В случае однослойных изотропных оболочек из (4) получаем

$$\begin{aligned}
C_{11} = C_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & C_{12} &= \nu C_{11}, & C_{66} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \\
D_{11} = D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & D_{12} &= \nu D_{11}, & D_{66} &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu)},
\end{aligned} \tag{5}$$

$$C_{16}, C_{26}, D_{16}, D_{26}, K_{11}, K_{12}, K_{22}, K_{16}, K_{26}, K_{66} = 0.$$

В выражениях (1)–(5) s, θ – ортогональные координаты, s – длина дуги по меридиану, θ – центральный угол в поперечном сечении; N_s, S, Q_s – усилия; M_s – изгибающий момент; u, v, w – перемещения; Q_s – угол поворота нормали; φ – угол, образованный нормалью к поверхности и осью вращения; h – толщина; q_s, q_θ, q_γ – компоненты нагрузки; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Соотношения (1)–(5) представляют собой замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую напряженно-деформированное состояние оболочки. Для определения произволов, содержащихся в общем интеграле этой системы, необходимо задать граничные условия на контурах оболочки.

2. Закритическая осесимметричная деформация оболочек вращения. Учитывая что при осесимметричной деформации механические и геометрические характеристики изменяются лишь вдоль меридиана, из общих уравнений (1)–(5) можно получить исходные уравнения. Будем рассматривать анизотропные оболочки вращения. В случае докритической деформации оболочек систему разрешающих обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = A(s)\mathbf{N} + \Phi(\mathbf{N}) + \mathbf{q}(s), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \{N_r, N_z, \hat{S}, M_r, u_r, u_z, v, \vartheta_s\}^\top, \\ N_r &= N_s \cos \varphi + \hat{Q}_s \sin \varphi, & N_z &= N_s \sin \varphi - \hat{Q}_s \cos \varphi, \\ u_r &= u \cos \varphi + w \sin \varphi, & u_z &= u \sin \varphi - w \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (6) первое слагаемое в правой части содержит линейные члены, второе слагаемое $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_8\}^\top$ содержит нелинейные члены, зависящие от компонент вектора \mathbf{N} , вектор $\mathbf{q}(s)$ содержит компоненты нагрузки, $A(s)$ – квадратная матрица.

Добавляем к системе уравнений (6) граничные условия на торцах оболочки (рассматриваем замкнутые в окружном направлении оболочки), в виде

$$\Psi_1(\mathbf{N}(s_0)) = 0, \quad \Psi_2(\mathbf{N}(s_N)) = 0, \quad (8)$$

где $\Phi(\mathbf{N}(s))$, $\Psi_1(\mathbf{N}(s))$, $\Psi_2(\mathbf{N}(s))$ – в общем случае нелинейные вектор-функции.

Тогда уравнения (6) и (8) образуют нелинейную краевую задачу. Алгоритм решения этой задачи в докритической области строится на основе совместного применения метода линеаризации [1, 7] и метода дискретной ортогонализации [3, 4], что позволяет получить решение задачи с высокой точностью.

Для решения нелинейной задачи в закритической области нужно учесть, что при прохождении через критическую точку для нагрузки возникают значительные трудности, обусловленные тем, что некоторые компоненты искомого решения являются неоднозначными функциями нагрузки. Для преодоления указанных трудностей как принципиального, так и вычислительного характера предлагается некоторая модификация вычислительной схемы метода линеаризации [6].

Преобразуем краевую задачу (6), (8), дополнив систему (6) уравнением

$$\frac{dq}{dy} = 0, \quad (9)$$

где q – параметр нагрузки в векторе $\mathbf{q}(s)$, и введем в рассмотрение следующую вектор-функцию:

$$\mathbf{Z} = \{N_r, N_z, \hat{S}, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s, q\}^\top = \{z_1, z_2, \dots, z_8, z_9\}^\top, \quad (10)$$

т.е. рассматриваем параметр нагрузки q в качестве одной из разрешающих функций.

Тогда преобразованная система обыкновенных дифференциальных уравнений становится однородной и ее можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{ds} = A^{*(s)}\mathbf{Z} + \Phi^*(\mathbf{Z}). \quad (11)$$

Так как порядок системы уже равен девяти, то для корректной постановки двухточечной краевой задачи необходимо сформулировать дополнительно еще одно условие на одном из концов интервала интегрирования, после чего граничные условия можно представить в виде

$$\Psi_1^*(\mathbf{Z}(s_0)) = 0, \quad \Psi_2^*(\mathbf{Z}(s_N)) = 0, \quad (12)$$

где Ψ_1^* и Ψ_2^* – нелинейные векторы размерности m и $9 - m$ соответственно.

При формулировке граничных условий (12) следует учитывать, что первые восемь компонент z_i вектора $\mathbf{Z}(s)$ зависят от девятой компоненты $z_9 = q$. Если компоненты решения z_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, – однозначные функции q в окрестности значения параметра нагрузки q_0 , то в качестве дополнительного краевого условия следует выбрать условие

$$z_9 = q_0. \quad (13)$$

Если же некоторые компоненты z_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, являются неоднозначными функциями $z_9 = q$, то определяем ту существенную компоненту решения из числа не заданных при $s = s_0$ или $s = s_N$, для которой обратная функция является однозначной. Пусть, не уменьшая общности, $q = q(z_5(s_0))$ является однозначной функцией перемещения $u_r = z_5(s_0)$. Тогда в качестве дополнительного краевого условия выбираем

$$z_5(s_0) = u_0. \quad (14)$$

Процесс построения решения модифицированной краевой задачи (11), (12), эквивалентной исходной, состоит в следующем.

Используя метод линеаризации, строим итерационную вычислительную схему

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}_{k+1}}{ds} &= A^*(s)\mathbf{Z}_{k+1} + \Gamma(\mathbf{Z}_k)\mathbf{Z}_{k+1} + \Phi^*(\mathbf{Z}_k) - \Gamma(\mathbf{Z}_k)\mathbf{Z}_k, \\ \Gamma_1(\mathbf{Z}_k(s_0))\mathbf{Z}_{k+1}(s_0) &= -\Psi_1^*(\mathbf{Z}_k(s_0)) + \Gamma_1(\mathbf{Z}_k(s_0))\mathbf{Z}_k(s_0), \\ \Gamma_2(\mathbf{Z}_k(s_N))\mathbf{Z}_{k+1}(s_N) &= -\Psi_2^*(\mathbf{Z}_k(s_N)) + \Gamma_2(\mathbf{Z}_k(s_N))\mathbf{Z}_k(s_N), \\ \mathbf{Z}_0, \quad k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Gamma(\mathbf{Z}_k)$, $\Gamma_1(\mathbf{Z}_k(s_0))$, $\Gamma_2(\mathbf{Z}_k(s_N))$ – матрицы Якоби от Φ^* , Ψ_1 и Ψ_2 .

Для фиксированного значения параметра нагрузки $q = q_0$ по этой схеме решается последовательность линейных краевых задач с помощью метода дискретной ортогонализации, и определяется решение исходной нелинейной краевой задачи (11), (12). В качестве начального приближения \mathbf{Z}_0 выбирается нулевой вектор. Затем параметр нагрузки q изменяется на величину Δq и находится решение краевой задачи для значения $q = q_0 + \Delta q$ по той же схеме.

Последовательно решая краевые задачи (6), (7) по итерационной схеме (15) для фиксированных значений

$$q_0, \quad q_0 + \Delta q, \quad q_0 + 2\Delta q, \quad \dots \quad q_0 + i\Delta q, \quad \dots, \quad (16)$$

и используя при решении последующей задачи в качестве нулевого при-

ближения решение предыдущей задачи, определяем равновесные состояния оболочки в докритической области, т.е. вплоть до первой предельной точки. В качестве дополнительного граничного условия при выполнении условий однозначности принимаем условие $q(s_0) = q_0$. При подходе к предельной точке на основе указанных соображений заменяем это граничное условие другим, например, $u(s_0) = u_0$, и продолжаем вычислительный процесс, изменяя величину u_0 в меньшую или большую сторону. После прохождения предельной точки можно снова заменить дополнительное граничное условие на прежнее и продолжать описанный процесс, давая приращение (положительное или отрицательное) правой части дополнительного граничного условия. При этом все остальные граничные условия остаются без изменения. Это позволяет построить зависимость нагрузка – значение характерной функции на контуре и определить все равновесные состояния оболочки во всей области деформирования, включая предельные точки.

В некоторых задачах в качестве дополнительного граничного условия можно использовать значение одной из первых восьми компонент вектора \mathbf{Z} на левом или правом конце отрезка интегрирования с самого начала построения диаграммы нагрузка – значение этой функции на контуре, не заменяя его другим во всей области деформирования как докритической, так и за критической, включая предельные точки.

С помощью предложенного подхода решена задача о деформировании анизотропной оболочечной системы при совместном действии внутреннего давления и осевой сжимающей силы. Упругая система образована из конической, параболической и цилиндрической оболочек вращения и находится под действием внутреннего давления q_0 и силы P_0 (рис. 1). Геометрия оболочек задается в виде: для конического участка $-r = Az + B$, $z_0 \leq z \leq z_1$; для параболического участка $-r = b - az^2$, $z_1 \leq z \leq z_2$; для цилиндрического участка $-r = b$, $z_2 \leq z \leq z_3$. При этом $A = 3.873$; $B = 136.3$; $b = 100$; $a = 0.097$; $z_0 = -30$; $z_2 = 0$; $z_1 = -25$; $z_3 = 10$. Толщина оболочки изменяется по закону $h = 20 \frac{1}{r}$. Оболочечная система изготовлена из ортотропного материала, главные направления упругости которого не совпадают с координатными линиями срединной поверхности, что приводит к соотношениям упругости для анизотропного материала. Механические характеристики стекловолокна в системе координат главных направлений упругости имеют значения: $E_1 = E_0$, $E_2 = \frac{1}{3} E_0$, $G_{12} =$

$= \frac{1}{12} E_0$, $\nu_1 = 0.2$, $E_0 = 0.75 \cdot 10^6$. Здесь линейные размеры даны в см, усилия – в кг·с/см, моменты – в кг·с, модули упругости, модуль сдвига, напряжения и нагрузка – в кг/см². При этом линейные размеры отнесены к единице длины, а величины напряжений к единице давления. Так как стекловолокно укладывается по геодезическим линиям, то $\sin \psi = c/r$, где c определяется начальным углом армирования ψ_0 в полюсе при $z = z_0$. Правый контур оболочки жестко закреплен, а на левом контуре равны нулю радиаль-

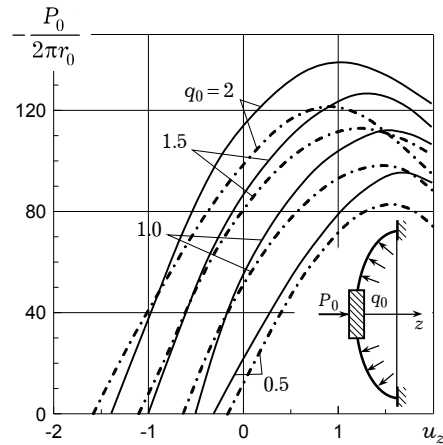


Рис. 1

ное усилие и изгибающий момент. На рис. 1 представлены графики зависимости перемещения левого контура u_z от осевой силы $P_0 \frac{1}{2\pi r_0}$, при фиксированных значениях давления $q_0 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Сплошными линиями обозначены кривые при $\psi_0 = \pi/6$, а штрихпунктирными – при $\psi_0 = \pi/2$. Приведенные результаты характеризуют взаимовлияние внутреннего давления q_0 и осевой сжимающей силы P_0 на деформирование оболочечной системы. В частности, при некоторых сочетаниях значений q_0 и P_0 левый контур не смещается, т. е. $u_z = 0$.

3. Решение двумерных нелинейных краевых задач для оболочек вращения. В качестве исходных принимаем уравнения (1)–(5). Тогда разрешающую систему уравнений запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = \mathbf{F} \left(s, \theta, \mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \mathbf{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \mathbf{N}}{\partial \theta^4} \right), \quad (17)$$

а граничные условия можно представить следующим образом:

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{N}(s_0, \theta)) = 0, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{N}(s_N, \theta)) = 0, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{N} = \{N_s, \hat{S}, \hat{Q}_s, M_s, u, v, w, \vartheta_s\}^\top, \quad \mathbf{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_8\}^\top, \quad (19)$$

\mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 – нелинейные вектор-функции.

Неосесимметричная деформация гибких слоистых ортотропных оболочек вращения сводится к решению двумерной нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (17) с краевыми условиями (18). Для решения задач данного класса применим следующий подход, основанный на совместном использовании трех методов: прямых, линеаризации и дискретной ортогонализации. С помощью метода прямых, примененного в окружном направлении, двумерная краевая задача сводится к одномерной. Одномерная нелинейная краевая задача путем применения метода линеаризации заменяется последовательностью линейных краевых задач, которые интегрируются численно устойчивым методом дискретной ортогонализации.

Итак, на первом этапе двумерную краевую задачу (17), (18) методом прямых приведем к одномерной. При этом целесообразно применить метод прямых в направлении координаты θ , так как координатная поверхность оболочки замкнута в окружном направлении, и поэтому искомое решение является периодической функцией по θ с периодом 2π . Численное интегрирование будем осуществлять по координате s .

Проведем на координатной поверхности ℓ координатных линий $\theta = \theta_i$, где $\theta_i = (i-1)2\pi/\ell$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, (рис. 2). Предполагая, что решение краевой задачи (17), (18) является достаточно гладким в окружном направлении, аппроксимируем его с помощью решений вдоль этих ℓ линий, т. е. исходную краевую задачу (17), (18) приближенно заменяем следующей:

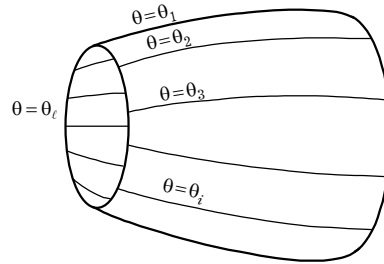


Рис. 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}(s, \theta_i)}{\partial s} = \\ = \mathbf{F} \left(s, \theta_i, \mathbf{N}(s, \theta_i), \frac{\partial \mathbf{N}(s, \theta_i)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \mathbf{N}(s, \theta_i)}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \mathbf{N}(s, \theta_i)}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \mathbf{N}(s, \theta_i)}{\partial \theta^4} \right), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{N}(s_0, \theta_i)) = 0, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{N}(s_N, \theta_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell, \quad (21)$$

где $\mathbf{N}(s, \theta_i)$ – вектор-функция на i -й линии.

Содержащиеся в правой части системы (20) частные производные заменим приближенно разностными аналогами, которые представляют собой линейные комбинации решений на линиях $\theta = \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}(s, \theta_j)}{\partial \theta} &= \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} \mathbf{N}(s, \theta_j), & \frac{\partial^2 \mathbf{N}(s, \theta_j)}{\partial \theta^2} &= \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij} \mathbf{N}(s, \theta_j), \\ \frac{\partial^3 \mathbf{N}(s, \theta_j)}{\partial \theta^3} &= \sum_{j=1}^{\ell} c_{ij} \mathbf{N}(s, \theta_j), & \frac{\partial^4 \mathbf{N}(s, \theta_j)}{\partial \theta^4} &= \sum_{j=1}^{\ell} d_{ij} \mathbf{N}(s, \theta_j). \end{aligned} \quad (22)$$

Коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , задаются с помощью формул численного дифференцирования. В частности, они могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(s, \theta_i)}{\partial \theta} &= \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\delta} = \nabla_1 \varphi_i, \\ \frac{\partial^2 \varphi(s, \theta_i)}{\partial \theta^2} &= \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\delta^2} = \nabla_2 \varphi_i, \\ \frac{\partial^3 \varphi(s, \theta_i)}{\partial \theta^3} &= \frac{\varphi_{i+2} - 3\varphi_{i+1} + 3\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}}{2\delta^3} = \nabla_3 \varphi_i, \\ \frac{\partial^4 \varphi(s, \theta_i)}{\partial \theta^4} &= \frac{\varphi_{i+2} - 4\varphi_{i+1} + 6\varphi_{i-1} - 4\varphi_{i-1} - \varphi_{i+2}}{\delta^4} = \nabla_4 \varphi_i, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\delta = \theta_{i+1} - \theta_i$, $\varphi_i = \varphi(s, \theta_i)$, $\varphi_{i+1} = \varphi(s, \theta_{i+1})$.

Подставим выражения (22) в систему (20) и введем обозначение $\mathbf{N}_i(s) = \mathbf{N}(s, \theta_i)$, тогда исходная двумерная нелинейная краевая задача (17), (18) сведется к одномерной нелинейной краевой задаче более высокого порядка вида

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{ds} = \mathbf{F} \left(s, \theta_i, \mathbf{N}_i, \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} \mathbf{N}_j, \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij} \mathbf{N}_j, \sum_{j=1}^{\ell} c_{ij} \mathbf{N}_j, \sum_{j=1}^{\ell} d_{ij} \mathbf{N}_j \right), \quad (24)$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{N}_i(s_0)) = 0, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{N}_i(s_N)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell. \quad (25)$$

Векторы $\mathbf{N}_1(s)$, $\mathbf{N}_2(s)$, ..., $\mathbf{N}_\ell(s)$ – решения исходной краевой задачи на выбранных координатных линиях $\theta = \theta_i$ координатной поверхности оболочки.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \{ \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_\ell \} &= \{ N_{s1}, \hat{S}_1, \mathbf{Q}_{s1}^*, M_{s1}, u_1, v_1, w_1, \vartheta_{s1}, \dots, \\ &\dots, N_{s\ell}, \hat{S}_\ell, \mathbf{Q}_{s\ell}^*, M_{s\ell}, u_\ell, v_\ell, w_\ell, \vartheta_{s\ell} \}^\top, \end{aligned}$$

то полученную одномерную нелинейную краевую задачу запишем в виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \Phi(s, \mathbf{R}, \ell), \quad (26)$$

$$\mathbf{g}_1^*(\mathbf{R}(s_0)) = 0, \quad \mathbf{g}_2^*(\mathbf{R}(s_N)) = 0. \quad (27)$$

В случае, когда граничные условия для исходной задачи будут линейными, они преобразуются в следующие:

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{R}(s_N) = \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{C}_2 \mathbf{R}(s_N) = \mathbf{c}_2, \quad (28)$$

где матрицы \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 имеют диагонально-клеточную структуру с матрица-

ми $A_1(\theta_i)$ и $A_2(\theta_i)$ на диагоналях соответственно, а компоненты векторов \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 формируются с помощью компонент вектора $\mathbf{a}_1(\theta_i)$ и $\mathbf{a}_2(\theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, \ell$. Система (26) является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами порядка 8l.

Применяя к решению нелинейной краевой задачи (26), (27) метод линеаризации, получаем последовательность линейных краевых задач в виде следующей итерационной схемы:

$$\frac{d\mathbf{R}_{k+1}}{ds} = \Phi(s, \mathbf{R}_k, \ell) + \Gamma(\mathbf{R}_k, \ell)(\mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{R}_k), \quad (29)$$

$$\mathbf{g}_1^*(\mathbf{R}_k(s_0)) + \Gamma_1^*(\mathbf{R}_k(s_0))(\mathbf{R}_{k+1}(s_0) - \mathbf{R}_k(s_0)) = 0,$$

$$\mathbf{g}_2^*(\mathbf{R}_k(s_N)) + \Gamma_2^*(\mathbf{R}_k(s_N))(\mathbf{R}_{k+1}(s_N) - \mathbf{R}_k(s_N)) = 0, \quad (30)$$

где $\Gamma, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*$ – матрицы Якоби соответственно правой части системы уравнений (26) и левых частей граничных условий (27).

В случае, когда граничные условия линейны, в итерационной схеме они принимают вид

$$C_1 \mathbf{R}_{k+1}(s_0) = \mathbf{c}_1, \quad C_2 \mathbf{R}_{k+1}(s_N) = \mathbf{c}_2. \quad (31)$$

Запишем выражения (29) и (30) в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{R}_{k+1}}{ds} = \mathbf{G}(s, \mathbf{R}_k, \mathbf{R}_{k+1}, \ell), \quad (32)$$

$$B_1(\mathbf{R}_k(s_0), \ell) \mathbf{R}_{k+1}(s_0) = \mathbf{b}_1(\mathbf{R}_k(s_0), \ell),$$

$$B_2(\mathbf{R}_k(s_N), \ell) \mathbf{R}_{k+1}(s_N) = \mathbf{b}_2(\mathbf{R}_k(s_N), \ell), \quad \mathbf{R}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (33)$$

где $\mathbf{G} = \{g_{11}, g_{21}, \dots, g_{81}, g_{12}, g_{22}, \dots, g_{1\ell}, g_{2\ell}, \dots, g_{8\ell}\}^T$.

Компоненты правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (32) представляют собой линейные комбинации искомых функций в $(k+1)$ -м приближении, которые зависят от геометрических и механических параметров, действующих на оболочку нагрузок и значений факторов напряженно-деформированного состояния в k -м приближении. Их конкретные выражения приведены в монографии [6]. Матрицы B_1 и B_2 имеют размерности $4l \times 8l$, а векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 – 4ℓ . Полученную последовательность линейных краевых задач решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

С помощью предложенного подхода получим решение задачи о деформировании тороидальной оболочки эллиптического поперечного сечения, подверженной действию поверхностного давления. Срединная поверхность оболочки образована вращением четверти эллипса вокруг оси Oz (рис. 3). Уравнение образующей запишем в параметрической форме: $r = R + a \cos t$, $z = b \sin t$, $t_0 \leq t \leq t_N$. Толщина оболочки изменяется в окружном направлении симметрично плоскости, проходящей через ось вращения и сечение $\theta = 0$, по закону

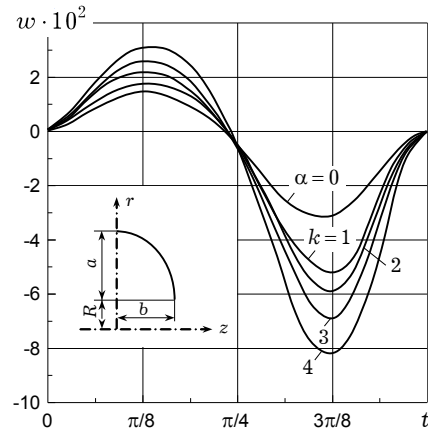


Рис. 3

$h = h_0(1.5 + \alpha \cos k\theta)$. Поэтому решение краевой задачи будем определять на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$. Материал оболочки изотропный с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . Оболочка находится под действием внешнего нормального давления q , контуры оболочки жестко закреплены. Задача решена при следующих значениях параметров: $R = 18$; $a = 9$; $b = 6$; $t_0 = 0$; $t_N = \pi/2$; $h_0 = 0.1$; $\beta = 1/\pi$; $E = 2.1 \cdot 10^6$; $\nu = 0.3$; $\alpha = 0, -0.5$; $k = 1, 2, 3, 4$; $q = -13.5$.

На рис. 3, 4 приведены распределения прогиба соответственно по образующей и по направляющей для различных значений номера k при $\alpha = -0.5$ и $a = 0$ (оболочка постоянной толщины). Из рис. 4 видно, что с увеличением показателя изменяемости прогибы уменьшаются. Различия между решениями по нелинейной (сплошная линия) и линейной (штриховая линия) теориям для $k = 1, 2, 3, 4$ соответственно составляют 35, 30, 26, 24%. При заданном уровне поверхностной нагрузки максимальные прогибы в оболочках переменной толщины больше, чем в оболочке постоянной толщины одинакового веса (осесимметричная задача). Наибольшее отличие наблюдается в сечении $\theta = 0$, где оболочка наиболее тонкая.

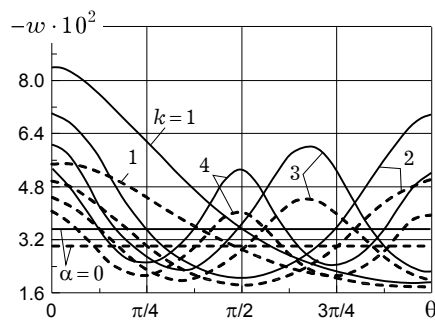


Рис. 4

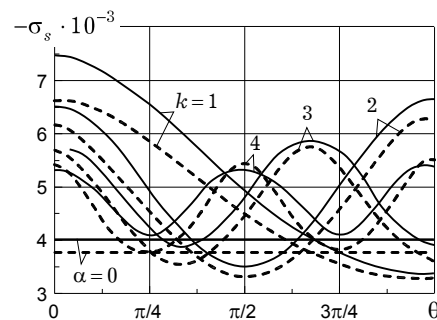


Рис. 5

На рис. 5 приведены распределения максимальных напряжений по окружной координате. Такими напряжениями являются меридиональные на внутренней поверхности оболочки. Для напряжений различия между значениями, полученными по линейной и нелинейной теориям, значительно меньше, чем для прогибов, и при $k = 1, 2, 3, 4$ составляют соответственно 11, 5, 1, 1%. Как и прогибы, напряжения в оболочках переменной в окружном направлении толщины больше, чем в оболочке постоянной толщины ($\alpha = 0$). Наибольшее отличие достигается при $k = 1$.

4. Определение неосесимметричных форм равновесия гибких круговых цилиндрических оболочек при осесимметричных нагрузках. Из физических соображений и опытных данных известно, что при деформации круговых цилиндрических оболочек в случае приложения осесимметричных нагрузок наряду с осесимметричной формой могут существовать и неосесимметричные формы равновесия [15]. С математической точки зрения это означает, что нелинейная краевая задача при некоторых значениях осесимметричной нагрузки имеет неосесимметричные решения, которые можно рассматривать как ветви нелинейной задачи на собственные значения [15]. В ряде случаев эти ветви берут начало из собственных значений соответствующей линеаризованной задачи, хотя также могут появиться ветви, не возникающие из указанных собственных значений.

Здесь исследуется деформация гибких круговых цилиндрических оболочек, подверженных действию осесимметричного нормального внешнего давления. Предлагается подход к построению точек ветвления и ветвей, со-

ответствующих неосесимметричной деформации оболочки, основанный на сведении двумерной нелинейной краевой задачи к одномерной и ее численном решении в закритической области.

Из системы дифференциальных уравнений (1), положив $r = R = \text{const}$ и $\frac{1}{R_s} = 0$, после некоторых преобразований получаем разрешающую систему

дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую деформацию гибкой круговой цилиндрической оболочки, в виде

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \left(s, \theta, \mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s}, \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial s^2}, \frac{\partial^3 \mathbf{N}}{\partial s^3}, \frac{\partial^4 \mathbf{N}}{\partial s^4} \right), \quad (34)$$

где

$$\mathbf{N} = \{N_s, S, \hat{Q}_\theta, M_\theta, N_\theta, u, v, w, \vartheta_\theta\}^\top, \quad \mathbf{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_8\}^\top,$$

s – продольная координата, θ – центральный угол в поперечном сечении.

Будем рассматривать замкнутые цилиндрические оболочки с шарнирно опертыми торцами, т.е. на них выполняются следующие граничные условия:

$$v = w = N_s = M_s = 0. \quad (35)$$

Нагрузка осесимметрична относительно оси оболочки.

После разделения переменных с помощью разложения разрешающих функций и нагрузки в ряды Фурье по продольной координате и применения метода Власова – Канторовича приходим к одномерной нелинейной краевой задаче

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\theta} = \mathbf{\Phi}(\theta, \mathbf{Y}). \quad (36)$$

В силу замкнутости оболочки по окружности нужно учесть еще условия периодичности или использовать условия симметрии.

Для решения нелинейной краевой задачи для системы уравнений (36) воспользуемся методикой изложенной в п. 2.

Для исследования неосесимметричного поведения цилиндрической оболочки, подверженной действию осесимметричной нормальной поверхностной нагрузки $q_\zeta = q_0 p(s)$, введем в рассмотрение нагрузку с малой неосесимметричной составляющей. Предполагая наличие при деформации плоскости симметрии, проходящей через ось вращения и образующую $\theta = 0$, эту нагрузку на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ будем представлять в виде

$$q_\zeta = q_0 p(s)(1 + \alpha \sin \theta) \quad (37)$$

или

$$q_\zeta = q_0 p(s)(1 + \beta \cos n\theta). \quad (38)$$

Тогда из условий симметрии задачи можно сформулировать граничные условия при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ в виде

$$v = \vartheta_\theta = S = \hat{Q}_\theta = 0. \quad (39)$$

Осуществляя интегрирование последовательности краевых задач (36), (39) по окружной координате θ , строим кривую зависимости параметра нагрузки q_0 от прогиба w_0 оболочки в точке с координатами $s = \frac{L}{2}$, $\theta = 0$, до некоторого фиксированного значения w_0 при нагрузках вида (37) или (38). При фиксированном значении w_0 осуществляем переход на закритическую ветвь, соответствующую равновесным состояниям оболочки при осесимметричной нагрузке $q_\zeta = q_0 p(s)$, путем шагового уменьшения значений α (или β) до нуля. Затем строим эту кривую, уменьшая или увеличивая значение w_0 .

Рассмотрим цилиндрическую оболочку постоянной толщины h для значений $\frac{L}{R} = 3$, $\frac{R}{h} = 100$, $h = 1$, $E = 10^5$, $\nu = 0.3$, подверженную действию осесимметричной нагрузки $q_\zeta = q_0 \sin \frac{\pi s}{L}$. При решении задачи (34), (35) использовался один член разложения искомых функций по синусам и косинусам, так как вид нагрузки дает основание считать, что в этом случае учтена главная часть решения.

Результаты решения приведены на рис. 6, где показана зависимость параметра нагрузки q_0 от прогиба w_0 в точке $s = \frac{L}{2}$, $\theta = 0$. Сплошные линии соответствуют неосесимметричной нагрузке: кривая 2 – нагрузке вида (37) при $\alpha = -0.1$, кривые 1, 3, 4 – нагрузке вида (38) при $\beta = 0.1$ и $n = 1, 3, 5$ соответственно. Штриховая линия отвечает осесимметричному нагружению, т. е. когда $\alpha = \beta = 0$. При движении по кривой 2 от начала координат до точки A рассматривалась неосесимметричная нагрузка, т. е. $\alpha \neq 0$. При переходе от точки A к точке B параметр α устремлялся к нулю, а затем строилась закритическая ветвь BL , соответствующая осесимметричному нагружению, и определялась точка пересечения ее со штриховой линией. Аналогично строились кривые 3 и 4. Кривая 3 строилась при $n = 3$ до точки C , затем осуществлялся переход в точку D и определялась закритическая ветвь DK и точка K . При движении до точки C осуществлялась перестройка формы направляющей от трех волн к пяти. Точки L и K принадлежат также штриховой линии, отвечающей непосредственно осесимметричному нагружению оболочки. Таким же образом получена при $n = 5$ кривая 4 и определена закритическая ветвь FK . Характерным является совпадение кривых DK и FK на общем участке. Кривая 1 при $n = 1$ в исследуемой области практически совпадает со штриховой линией. Таким образом, точки K и L являются точками разветвления решений, а ветви KF и LA соответствуют закритическим неосесимметричным равновесным формам оболочки при осесимметричном нагружении. В точке K $q_0 = -0.3833$, а в точке L $q_0 = -0.4422$.

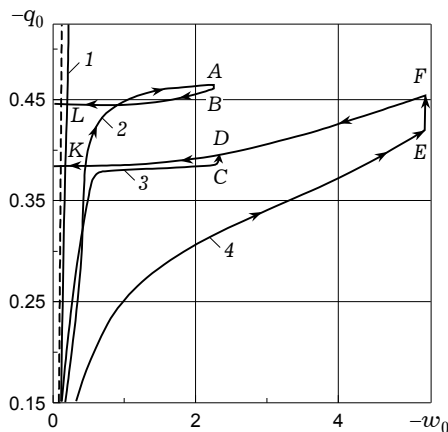


Рис. 6

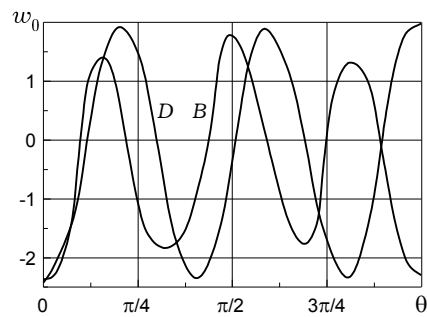


Рис. 7

На рис. 7 показаны распределения прогибов оболочки w_0 на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ в сечении $s = \frac{L}{2}$, полученные в результате непосредственного интегрирования по окружной координате θ , соответствующие точкам B и D закритических ветвей на рис. 6. Как видно, в точке B оболочка деформируется с шестью волнами по направляющей, а в точке D – с пятью.

Следует отметить, что теоретические исследования по определению числа ветвей являются весьма проблематичными. Однако, если тщательно проводить поиск ветвей указанным численным методом, то практически можно не пропустить ни одной из них.

5. Решение задач теории гибких оболочек с резными координатными поверхностями. Будем рассматривать задачи, в которых для представления координатных поверхностей оболочек используются резные (монжевы) поверхности [11], образующие широкий класс поверхностей, отнесенных к линиям главных кривизн.

Разрешающую систему дифференциальных в частных производных, описывающую рассматриваемый класс задач, в ортогональной системе координат α_1 и α_2 представим в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} = \mathbf{G} \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \mathbf{Z}}{\partial \alpha_2^k} \right), \quad k = 0, \dots, 4, \quad (40)$$

где $\mathbf{Z} = \{N_1, \hat{S}_1, \hat{Q}_1, M_1, u, v, w, \vartheta_1\}^\top$, $\mathbf{Z} = \{Z_i\}$, $\mathbf{G} = \{g_i\}$, $i = 1, \dots, 8$, – вектор правой части; $N_1, \hat{S}_1, \hat{Q}_1$ – нормальное, приведенные сдвигающее и перерезывающее усилия; M_1 – изгибающий момент; u, v, w – перемещения; ϑ_1 – угол поворота нормали. Будем рассматривать замкнутые по координате α_2 оболочки. Тогда искомое решение должно удовлетворять условиям периодичности по α_2 и граничным условиям на гребнях $\alpha_1 = \text{const}$, которые задаются четырьмя величинами по одной из каждой пары:

$$(N_1, u); \quad (\hat{S}_1, v); \quad (\hat{Q}_1, w); \quad (M_1, \vartheta_1). \quad (41)$$

Нелинейную краевую задачу для системы уравнений (40) с граничными условиями (41) с помощью метода линеаризации сведем к последовательности линейных двумерных краевых задач для систем уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^{(s+1)}}{\partial \alpha_1} = \mathbf{F} \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \mathbf{Z}^{(s)}}{\partial \alpha_2^k}, \frac{\partial^k \mathbf{Z}^{(s+1)}}{\partial \alpha_2^k} \right), \quad k = 0, \dots, 4, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{F} = \mathbf{G} \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \mathbf{Z}^{(s)}}{\partial \alpha_2^k} \right) + J \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \mathbf{Z}^{(s)}}{\partial \alpha_2^k} \right) \cdot (\mathbf{Z}^{(s+1)} - \mathbf{Z}^{(s)}), \quad (42)$$

$\mathbf{F} = \{f_i\}$, $i = 1, \dots, 8$, $J \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \mathbf{Z}}{\partial \alpha_2^k} \right)$ – матрица Якоби правой части системы (42).

Аналогично проводим линеаризацию граничных условий. Из каких либо соображений выбираем начальное условие, или можно применить метод продолжения решения по параметру [7]. Для решения двумерной линейной краевой задачи на каждом приближении применим метод, основанный на разложении функций, входящих в правую часть системы (42), в дискретные ряды Фурье [9, 10]. Тогда решение краевой задачи для системы уравнений (42) с соответствующими граничными условиями будем искать в виде отрезков рядов

$$X(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=0}^N X_n(\alpha_1) \cos n\alpha_2, \\ Y(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^N Y_n(\alpha_1) \sin n\alpha_2, \quad (43)$$

где

$$X = \{z_i, f_i\}, \quad Y = \{z_j, f_j\}, \quad i = 1, 3, 4, 5, 7, 8, \quad j = 2, 6.$$

Подставляя разложения (43) в систему уравнений (42) и выполняя то же для граничных условий, после некоторых преобразований приходим к связанной системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $6 + 8N$ в виде

$$\frac{dZ_{i,0}^{(s+1)}}{d\alpha_1} = f_{i,0}(\alpha_1; Z_{j,0}^{(s)}; Z_{j,0}^{(s+1)}; Z_{i,m}^{(s)}; Z_{i,m}^{(s+1)}),$$

$$\frac{dZ_{k,n}^{(s+1)}}{d\alpha_1} = f_{k,n}(\alpha_1; Z_{j,0}^{(s)}; Z_{j,0}^{(s+1)}; Z_{i,m}^{(s)}; Z_{i,m}^{(s+1)}),$$

$$i, j = 1, 3, 4, 5, 7, 8, \quad k, \ell = 1, \dots, 8, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad s = 0, 1, \dots \quad (44)$$

Решение линейной краевой задачи на каждой итерации для системы (44) проводится численным методом дискретной ортогонализации.

В качестве примера рассмотрим деформацию гибкой конической оболочки эллиптического поперечного сечения, срединная поверхность которой образована перемещением по эллипсу с полуосями A и B луча PN , проходящего через точку P , лежащую на оси Oz , и точку N , принадлежащую эллипсу (рис. 8). Малое основание конуса также является эллипсом с полуосями $a = \lambda A$, $b = \lambda B$, $\lambda = c/(\ell + c)$, $c = PO$, $\ell = OQ$. Выражения для декартовых координат точек срединной поверхности оболочки имеют вид

$$x = A \frac{\alpha_1 + c}{\ell + c} \sin \alpha_2, \quad y = B \frac{\alpha_1 + c}{\ell + c} \cos \alpha_2, \quad z = \alpha_1,$$

$$0 \leq \alpha_1 \leq \ell, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi.$$

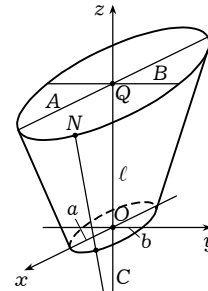


Рис. 8

Оболочка нагружена внутренним давлением $q = 1.5$ МПа. Края оболочки жестко закреплены. Решение задачи выполнялось при $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.3$, $A = 450$ мм, $B = 275$ мм, $c = 500$ мм, $\ell = 600$ мм, $h = 2.5$ мм, $N = 6$.

Таблица 1

α_2	Малое основание конуса			Большое основание конуса		
	$\sigma_{vv} \cdot 10^{-2}$, МПа			$\sigma_{vv} \cdot 10^{-2}$, МПа		
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
0	-10.404	-7.494	-7.407	-9.293	-7.989	-7.828
	6.120	4.946	4.898	9.124	8.797	8.706
$\frac{\pi}{2}$	6.623	8.614	8.544	4.474	5.079	5.048
	-0.372	-1.221	-1.183	2.385	1.987	1.995

В табл. 1 приведены значения нормальных напряжений σ_{vv} для трех приближений s при $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Над чертой указаны значения напряжений для внешней поверхности, под чертой – для внутренней. Из таблицы видно, как отличается нелинейное решение ($s = 3$) от линейного ($s = 1$).

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 184 с.
2. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.
3. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 6. – С. 3–39.

4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – Москва: Наука, 1992. – 336 с.
5. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3–23.
6. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
7. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1983. – 286 с.
8. Григоренко Я. М., Савула Я. Г., Муха И. С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 8. – С. 3–27.
9. Григоренко Я. М., Тимонин А. М. Об одном подходе к численному решению краевых задач теории оболочек в координатах общего вида // Прикл. механика. – 1994. – 30, № 4. – С. 14–20.
10. Григоренко Я. М., Тимонин А. М. Об одном подходе к численному решению двумерных задач теории пластин и оболочек с переменными параметрами // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 6. – С. 54–61.
11. Норденн А. П. Теория поверхностей. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 260 с.
12. Підстригач Я. С. Вибрані твори. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
13. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
14. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.15.
15. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под ред. Д. Келлера, С. Антмана. – Москва: Мир, 1974. – С. 19–34.
16. Шаповалов Л. А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 56–62.

ДЕЯКІ ПІДХОДИ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ГНУЧКИХ ОБОЛОНОК

Наведено деякі підходи до розв'язування нелінійних крайових задач теорії гнучких оболонок, що описуються диференціальними рівняннями у звичайних і частинних похідних. Розглядаються одновимірні задачі для системи з анізотропних оболонок обертання у докритичній і закритичній областях деформування та двовимірні задачі для оболонок канонічної і неканонічної форм. Розв'язання нелінійних задач проводиться на основі чисельних і чисельно-аналітичних методів із застосуванням дискретної ортогоналізації та дискретних рядів Фур'є.

SOME APPROACHES TO STUDYING DEFORMATION OF FLEXIBLE SHELLS

Some approaches to solving the nonlinear boundary-value problems for flexible shells, which are described by ordinary and partial differential equations, are presented. One-dimensional problems for a system of anisotropic shells of revolution within subcritical and supercritical ranges of deformation and two-dimensional problems for shells of canonical and noncanonical shape are considered. The nonlinear problems are solved using numerical, numerical-analytical, and discrete-orthogonalization methods, as well as discrete Fourier series.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
14.03.08