

## НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА

*Предложен метод исследования свободных нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек со сложной формой плана. Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории первого порядка типа теории Тимошенко. Отличительной особенностью работы является применение теории R-функций и вариационных методов для нахождения собственных функций, принимаемых в качестве базиса для построения искомого решения нелинейной задачи. Выполнено тестирование предложенного метода и решены новые задачи, в результате которых построены амплитудно-частотные зависимости для сферических оболочек со сложной формой плана.*

Многослойные пластины и оболочки широко применяются в качестве расчетных схем многих элементов современных конструкций. Имеется обширная литература, посвященная вопросам расчета композитных многослойных оболочек, в том числе с учетом их нелинейного деформирования. Достаточно полный обзор по исследованиям, выполненным в данном направлении, представлен в работах как отечественных ученых [3, 4], так и зарубежных [9, 11]. Следует заметить, что и сегодня данная проблема, в частности исследование нелинейных колебаний многослойных оболочек, привлекает внимание многих ученых [8, 10, 12]. Анализ имеющихся исследований позволяет сделать вывод о практическом отсутствии работ, в которых бы исследовались геометрически нелинейные колебания многослойных пологих оболочек со сложной формой плана. Это связано со сложностью подобного типа задач и недостаточной разработкой методов для их решения. Одним из основных методов, применяемых для решения как статических, так и динамических задач многослойных оболочек, является метод конечных элементов (МКЭ).

В настоящей работе предложен новый численно-аналитический метод для исследования геометрически нелинейных свободных колебаний пологих многослойных оболочек открытого типа. В основу метода положена теория R-функций и вариационные методы.

**1. Математическая постановка.** Задача о свободных геометрически нелинейных колебаниях пологих оболочек с учетом сдвиговых деформаций сводится к необходимости решения следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} &= m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ &+ 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_x &= m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, & \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_y &= m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

которые дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. В уравнении (1) усилия  $N_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , моменты  $M_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , и перерезывающие силы  $Q_x, Q_y$  выражаются через перемещения  $u, v, w$  и функции сдвига  $\psi_x, \psi_y$  как

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ Q_y \\ Q_x \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & C_{16} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & C_{26} & K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & 0 & 0 & C_{26} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ K_{12} & K_{12} & 0 & 0 & K_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ K_{12} & K_{22} & 0 & 0 & K_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ K_{16} & K_{26} & 0 & 0 & K_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \partial w / \partial y + \psi_y \\ \partial w / \partial x + \psi_x \\ \varepsilon_{12} \\ \partial \psi_x / \partial x \\ \partial \psi_y / \partial y \\ \partial \psi_x / \partial y + \partial \psi_y / \partial x \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Жесткостные коэффициенты  $C_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $D_{ij}$  и коэффициенты  $m_k$ ,  $k = 1, 2$ , определяются с помощью интегралов

$$(C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}) = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} B_{ij}^{(m)}(1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

$$C_{ij} = k_i^2 \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} B_{ij}^{(m)} dz, \quad i, j = 4, 5,$$

$$m_1 = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \rho_m dz, \quad m_2 = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \rho_m z dz.$$

Коэффициенты сдвига обозначены как  $k_i$ ,  $i = 4, 5$ . Величину  $k_i^2$ ,  $i = 4, 5$ , чаще всего принимают равной  $5/6$ .

**Метод решения.** Для решения нелинейной задачи, прежде всего, найдем собственные функции и собственные частоты линейных колебаний рассматриваемой оболочки. В общем случае эта задача может быть решена с помощью теории  $R$ -функций и вариационных методов, т.е. с помощью метода  $RFM$  [5, 6].

Вариационная формулировка линейной задачи сводится к нахождению минимума функционала

$$I = U_{\max} - K_{\max}, \quad (2)$$

т.е. к решению следующего вариационного уравнения

$$\delta I = 0,$$

где  $U_{\max}$  и  $K_{\max}$  – максимальная потенциальная и кинетическая энергии.

Для многослойных пологих оболочек выражения для максимальной потенциальной и кинетической энергий определяются в общем случае с помощью ниже представленных выражений [1, 2]:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + 2N_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + M_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \right. \\ \left. + 2M_{12} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + Q_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \right] d\Omega,$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (m_1(u^2 + v^2 + w^2) + m_2(\Psi_x^2 + \Psi_y^2)) dx dy.$$

Системы координатных функций, с помощью которых отыскивается стационарное значение функционала (2) строятся с помощью теории  $R$ -функций. Примеры некоторых последовательностей координатных функций будут приведены ниже при решении конкретных задач.

При решении нелинейной задачи ограничимся рассмотрением пологих оболочек симметричного строения, пренебрегая при этом силами инерции в срединной плоскости. Разрешающая система уравнений в этом случае существенно упрощается благодаря тому, что приведенные жесткостные коэффициенты  $K_{ij}$  будут равны нулю. Учитывая сделанные предположения, запишем систему уравнений движения (1) в операторной форме

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= -Nl_1(w) + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= -Nl_2(w) + m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) + L_{34}(\Psi_x) + L_{35}(\Psi_y) &= -Nl_3(w) + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ L_{43}(w) + L_{44}(\Psi_x) + L_{45}(\Psi_y) &= -Nl_4(w) + m_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}, \\ L_{53}(w) + L_{54}(\Psi_x) + L_{55}(\Psi_y) &= -Nl_5(w) + m_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь линейные операторы  $L_{ij}$  определяются как

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{12} = L_{21} &= C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{13} = -L_{31} &= -\left( (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{\partial}{\partial x} + (k_1 C_{16} + k_2 C_{26}) \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{23} = L_{32} &= \left( (k_1 C_{16} + k_2 C_{26}) \frac{\partial}{\partial x} + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_{33} &= k_5^2 C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{45} (k_4^2 + k_5^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + k_4^2 C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (C_{11} k_1^2 + 2C_{12} k_1 k_2 + C_{22} k_2^2), \\ L_{34} = L_{43} &= k_5^2 C_{55} \frac{\partial}{\partial x} + k_4^2 C_{45} \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_5^2 C_{55}, \\ L_{45} = L_{54} &= D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{55} &= -\left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{226} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_4^2 C_{44} \right). \end{aligned}$$

Нелинейные операторы  $N\ell_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
N\ell_1(w) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} C_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} C_{16} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right], \\
N\ell_2(w) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} C_{16} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right], \\
N\ell_3(u, v, w, \Psi_x, \Psi_y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} (k_1 C_{16} + k_2 C_{26}) + \\
&\quad + N_{11} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Зная собственные вектора  $\mathbf{U}_i = (u_i, v_i, w_i, \Psi_{x_i}, \Psi_{y_i})$ , решение нелинейной задачи (3) представим в виде

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{i=1}^n y_i(t) w_i(x, y), & \Psi_x &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \Psi_{x_i}(x, y), \\
\Psi_y &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \Psi_{y_i}(x, y), \\
u &= \sum_{i=1}^n y_i(t) u_i(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j u_{ij}, \\
v &= \sum_{i=1}^n y_i(t) v_i(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j v_{ij}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Функции  $u_i, v_i, \Psi_{x_i}, \Psi_{y_i}$  являются компонентами собственного вектора  $\mathbf{U}_i$ , а функции  $u_{ij}, v_{ij}$  должны быть решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
L_{11} u_{ij} + L_{12} v_{ij} &= -N\ell_1^{(2)}(w_i, w_j), \\
L_{21} u_{ij} + L_{22} v_{ij} &= -N\ell_2^{(2)}(w_i, w_j).
\end{aligned} \tag{5}$$

Правые части системы (5), обозначенные как операторы  $N\ell_k^{(2)}(w_i, w_j)$ ,  $k = 1, 2$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
N\ell_1^{(2)}(w_i, w_j) &= \frac{\partial w_i}{\partial x} \left( C_{11} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial w_i}{\partial y} \left( C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right), \\
N\ell_2^{(2)}(w_i, w_j) &= \frac{\partial w_i}{\partial x} \left( C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial w_i}{\partial y} \left( C_{66} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что система уравнений (5), дополненная соответствующими граничными условиями, совпадает с разрешающей системой уравнений равновесия для плоской задачи теории упругости анизотропной пластины. При этом правые части этой системы играют роль фиктивных массовых сил. Решения этой задачи будем также выполнять с помощью метода *RFM* [5, 6]. Вариационную постановку задачи представим с помощью функционала Лагранжа

$$\begin{aligned}
J(u_{ij}, v_{ij}) = & \iint_{\Omega} \left[ C_{11} \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left( \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} \right)^2 + 2C_{12} \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} \right) + \right. \\
& + C_{66} \left( \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} \right)^2 + 2C_{16} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} \left( \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} \right) + \\
& + 2C_{26} \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} \left( \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} \right) - 2(N\ell_1^{(2)}(w_i, w_j) + \\
& \left. + N\ell_2^{(2)}(w_i, w_j)) \right] d\Omega - 2 \int_{\partial\Omega} (F_1^{(0)} u_{ij}^{(n)} + F_2^{(0)} v_{ij}^{(n)}) ds, \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1^{(0)} = & - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} (C_{11}\ell^2 + C_{12}m^2 + 2C_{16}\ell m) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} (C_{12}\ell^2 + C_{22}m^2 + 2C_{26}\ell m) + \\
& \left. + \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_i}{\partial y} \right) (C_{16}\ell^2 + C_{26}m^2 + 2C_{66}\ell m) \right], \\
F_2^{(0)} = & - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} (C_{16}(\ell^2 - m^2) - (C_{11} - C_{12})\ell m) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} (C_{26}(\ell^2 - m^2) + (C_{22} - C_{12})\ell m) + \\
& \left. + \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_i}{\partial y} \right) (C_{66}(\ell^2 - m^2) + (C_{26} - 2C_{16})\ell m) \right], \\
u_{ij}^{(n)} = & u_{ij}\ell + v_{ij}m, \quad v_{ij}^{(n)} = -u_{ij}m + v_{ij}\ell.
\end{aligned}$$

Направляющие косинусы внешней нормали  $\ell$  и  $m$  к границе области  $\partial\Omega$  могут быть заменены на частные производные функции  $\omega(x, y)$ , если уравнение границы области  $\omega(x, y) = 0$  является нормализованным [5, 6]. В этом случае

$$\ell = -\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad m = -\frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Решение задачи о свободных колебаниях оболочки и задачи теории упругости со специальной правой частью является базовой подготовкой для сведения исходной задачи к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. к задаче Коши. Действительно, подставляя выражения (4) для неизвестных функций  $u, v, w, \psi_x, \psi_y$  в третье из уравнений системы (3) и применяя процедуру Бубнова – Галеркина, приходим к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $y_m(t)$  следующего вида:

$$\begin{aligned}
& y_m''(t) + \alpha_m y_m(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^{(m)} y_i(t) y_j(t) + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk}^{(m)} y_i(t) y_j(t) y_k(t) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты уравнения (7) определяются согласно формулам, представленным ниже:

$$\alpha_m = \frac{\omega_{Lm}^2}{\omega_{L1}^2},$$

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}^{(m)} = & \frac{-1}{\omega_{L1}^2 \cdot \|w_m\|^2 m_1} \iint_{\Omega} \left[ L_{31} u_{ij} + L_{32} v_{ij} + N_{11}^L(u_i, v_i, w_i, \Psi_{x_i}, \Psi_{y_i}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \right. \\
& + N_{22}^L(u_i, v_i, w_i, \Psi_{x_i}, \Psi_{y_i}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + 2N_{12}^L(u_i, v_i, w_i, \Psi_{x_i}, \Psi_{y_i}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + \\
& + \frac{1}{2}(k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{1}{2}(k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \frac{\partial w_j}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \\
& \left. + (k_1 C_{16} + k_2 C_{26}) \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right] w_m d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{ijk}^{(m)} = & \frac{-1}{\omega_{L1}^2 \cdot \|w_m\|^2 m_1} \iint_{\Omega} \left( N_{11p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + N_{22p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i) \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. + 2N_{12p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} \right) w_m d\Omega,
\end{aligned}$$

$$N_{11}^L(u_i, v_i, w_i) = C_{11} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} - k_1 w_i \right) + C_{12} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} - k_2 w_i \right) + C_{16} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right),$$

$$N_{22}^L(u_i, v_i, w_i) = C_{12} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} - k_1 w_i \right) + C_{22} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} - k_2 w_i \right) + C_{26} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right),$$

$$N_{21}^L(u_i, v_i, w_i) = C_{16} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} - k_1 w_i \right) + C_{26} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} - k_2 w_i \right) + C_{66} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned}
N_{11p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) = & C_{11} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} + C_{16} \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{1}{2} C_{11} \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{1}{2} C_{12} \frac{\partial w_j}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{22p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) = & C_{12} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} + C_{26} \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{1}{2} C_{12} \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{1}{2} C_{22} \frac{\partial w_j}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} + C_{26} \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{12p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) = & C_{16} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} + C_{66} \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{1}{2} C_{16} \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{1}{2} C_{26} \frac{\partial w_j}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) может быть выполнено с помощью различных приближенных методов, наиболее распространенным из которых является метод Рунге – Кутты. Однако если ограничиться одномодовой аппроксимацией, т.е. в рядах для искомым функций удерживать только слагаемые, соответствующие основной частоте, то, применяя метод Галеркина к полученному уравнению

[2], можно получить явную зависимость отношения  $\nu = \frac{\omega_N}{\omega_L}$  нелинейной

частоты к линейной от амплитуды колебаний  $A$ . Эта зависимость определяется с помощью следующей формулы:

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi}\beta A + \frac{3}{4}\gamma A^2}.$$

**Численные примеры. Задача 1.** Исследуем собственные колебания пятислойной пологой сферической оболочки, опирающейся на квадратный план, со следующей укладкой слоев:  $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ . Слои рассматриваемой оболочки имеют одинаковые физические характеристики, но различную толщину. Толщина внешних и центрального слоев равна  $h/6$ . Слои, повернутые на  $90^\circ$ , имеют толщину  $h/4$ . Предполагается, что на участках границы, параллельных оси  $Ox$ , оболочка жестко закреплена, а на сторонах, параллельных оси  $Oy$ , шарнирно оперта (SCSC). Геометрические и физические параметры:

$$a/b = 1, \quad R_1 = R_2 = R, \quad E_1/E_2 = 30,$$

$$G_{23}/E_2 = 0.5, \quad G_{12}/E_2 = 0.6, \quad \nu_{12} = 0.25.$$

При этом значения для коэффициентов сдвига принимались такими же, как и в работе [13],  $k_4^2 = 0.87323$ ,  $k_5^2 = 0.59139$ .

В табл. 1 представлено сравнение значений безразмерного частотного параметра для первых четырех частот, полученных с помощью предложенного метода, с результатами работы [13]. Сравнение результатов подтверждает правильность разработанного алгоритма и корректность соответствующего ему программного обеспечения.

Таблица 1. Значения безразмерного частотного параметра  $\Lambda_i = \lambda_i \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$

для пятислойной сферической оболочки

$h/a$	$R/a$	Метод	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$
0.01	10	RFM	41.635	60.053	68.943	86.015
		[13]	42.048	62.256	67.540	82.949
	20	RFM	29.704	58.161	62.293	84.872
		[13]	29.885	59.916	60.711	81.525
0.1	10	RFM	18.016	31.197	36.473	47.458
		[13]	17.788	32.948	36.981	46.368
	20	RFM	17.761	31.178	36.351	47.456
		[13]	17.545	32.933	36.870	46.798

**Задача 2.** С помощью предложенного алгоритма была решена задача о свободных геометрически нелинейных колебаниях пятислойной полой сферической оболочки (рис. 1а), опирающейся на план, представленный на рис. 1б.

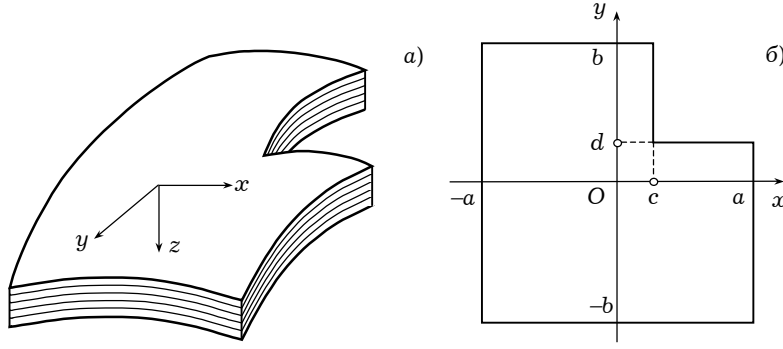


Рис. 1

Предполагается, что оболочка изготовлена из материала со следующими характеристиками:  $E_1 = 25E_2$ ,  $G_{23} = 0.2E_2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ . При этом коэффициенты сдвига принимались равными:  $k_4^2 = k_5^2 = 5/6$ .

Рассматривались три способа укладки слоев: **I** –  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , **II** –  $(30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ/30^\circ)$ , **III** –  $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ .

Геометрические параметры оболочки:

$$a/b = 1, \quad c/(2a) = d/(2a), \quad R_1/(2a) = R_2/(2a) = 10, \quad h/(2a) = 0.01.$$

Кинематические граничные условия принимались следующими (классический шарнир):

$$\begin{aligned} w = 0 & \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, & u = \psi_x = 0 & \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega^{(u)}, \\ v = \psi_y = 0 & \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega^{(v)}. \end{aligned}$$

Здесь через  $\partial\Omega$  обозначена вся граница области, через  $\partial\Omega^{(u)}$ ,  $\partial\Omega^{(v)}$  – участки границы, параллельные соответственно осям  $Oy$ ,  $Ox$ . Уравнения всей границы области  $\omega(x, y) = 0$  и ее отдельных участков  $\omega^{(u)} = 0$  и  $\omega^{(v)} = 0$  построим с помощью  $R$ -функций.

Одним из вариантов таких уравнений является следующий:

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4),$$

$$\omega^{(u)}(x, y) = f_1 \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 f_5,$$

$$\omega^{(v)}(x, y) = f_2 \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 f_6.$$

Здесь функции  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , определяются как

$$f_1 = (b^2 - y^2)/(2b) \geq 0,$$

$$f_2 = (a^2 - x^2)/(2a) \geq 0,$$

$$f_3 = (c - x) \geq 0,$$

$$f_4 = (d - y) \geq 0,$$

$$f_5 = (r_1^2 - (x - c)^2 - y_0^2)/(2r_1) \geq 0,$$

$$f_6 = (r_2^2 - x_0^2 - (y - d)^2)/(2r_2) \geq 0,$$

$$x_0 = (a + c)/2, \quad y_0 = (d + b)/2, \quad r_1 = (b - d)/2, \quad r_2 = (a - c)/2.$$

Выражения для  $R$ -операций  $\wedge_0, \vee_0$  определяются согласно [5]. Соответствующие структурные формулы для построения последовательностей координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, задаются выражениями

$$u = \omega^{(u)}P_1, \quad v = \omega^{(v)}P_2, \quad w = \omega P_3, \quad \psi_x = \omega^{(u)}P_4, \quad \psi_y = \omega^{(v)}P_5.$$



Здесь  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , – неопределенные компоненты построенных структур решения [5, 6], которые раскладываются в ряды по какой-либо полной системе функций (в данной работе – по степенным полиномам), а коэффициенты этого разложения находятся из условия стационарности соответствующего функционала.

В табл. 2 приведены значения безразмерного параметра основной частоты для исследуемых пятислойных оболочек в зависимости от способа укладки слоев и глубины вреза в оболочку, определяемого значениями параметров  $c/(2a) = d/(2a)$ .

Таблица 2. Значения безразмерного частного параметра  $\Lambda_1 = \lambda_1 \frac{(2a)^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$  для пятислойных сферических оболочек симметричного строения (рис. 1)

Способ укладки слоев	$\frac{c}{2a} = 0.5$	$\frac{c}{2a} = 0.4$	$\frac{c}{2a} = 0.25$	$\frac{c}{2a} = 0$
<b>I</b> – (0°/90°/0°/90°/0°)	20.391	21.395	25.623	46.318
<b>II</b> – (30°/-30°/30°/-30°/30°)	30.173	31.213	35.822	53.242
<b>III</b> – (45°/-45°/45°/-45°/45°)	40.875	41.388	42.756	55.231

На рис. 2–5 представлены амплитудно-частотные зависимости для исследуемых пятислойных сферических оболочек при рассматриваемых трех способах укладки слоев для значений параметра  $c/2a = 0.5, 0.4, 0.25, 0.0$ .

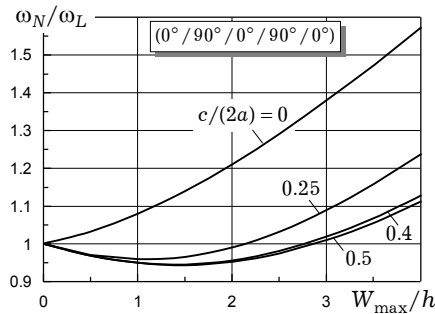


Рис. 2

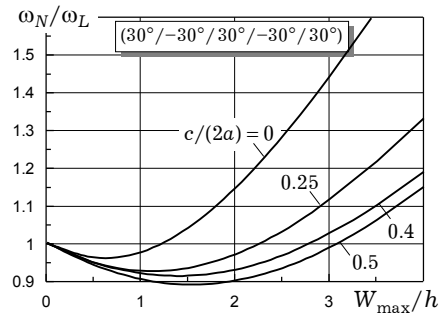


Рис. 3

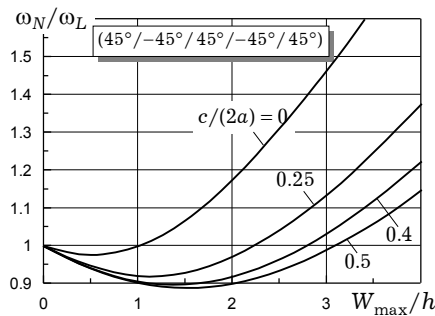


Рис. 4

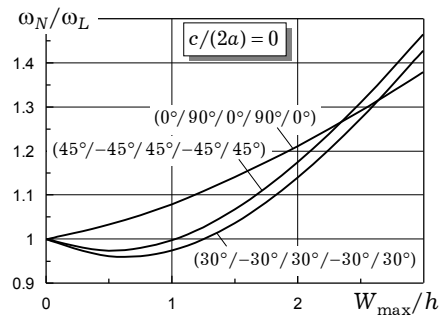


Рис. 5

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о характере поведения скелетных кривых. Только скелетные кривые для ортогонально армированной оболочки при глубине вреза, равной четверти от всей области, имеют жесткий характер. Во всех остальных случаях для данной толщины характер скелетных кривых имеет мягкий тип. При этом степень мягкости зависит от глубины вреза в пластину. Скелетные кривые имеют

практически жесткий характер при существенном врезе в оболочку. Большое влияние на характер скелетных кривых оказывает также способ укладки слоев. Наиболее мягкими оказываются кривые для перекрестно армированных оболочек с углом укладки слоев  $\theta = 30^\circ$ . В заключение заметим, что тестирование предложенного метода и соответствующего программного обеспечения было выполнено на многих примерах оболочек как изотропных, так и ортотропных, опирающихся на прямоугольный план. Сравнение полученных результатов с результатами, имеющимися в литературе, позволяет сделать вывод об эффективности и достоверности предложенного подхода.

**Заключение.** Для многослойных пологих оболочек симметричного строения в рамках уточненной теории, учитывающей сдвиговые деформации, предложен численно-аналитический метод, позволяющий строить амплитудно-частотные зависимости для оболочек, опирающихся на план сложной формы и имеющих различные виды закрепления края. В основу предложенного метода положена теория  $R$ -функций и вариационные методы. Разработан алгоритм перехода от нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены в аналитическом виде выражения для коэффициентов полученной системы. Приведены примеры амплитудно-частотных характеристик для пятислойных шарнирно опертых сферических оболочек с различным способом укладки слоев и опирающихся на план сложной формы.

Представленные численные расчеты были получены при одномодовой аппроксимации неизвестных функций с помощью системы «POLE-RL» [7].

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
3. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3–23.
4. Григоренко Я. М., Савула Я. Г., Муха И. С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 8. – С. 3–27.
5. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Рвачев В. Л., Курна Л. В.  $R$ -функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.
7. Рвачев В. Л., Шевченко А. Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – Киев: Техника, 1988. – 198 с.
8. Abe A., Kijfuyashi Y., Yamada G. Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance // J. Sound and Vibr. – 2007. – 304. – P. 957–968.
9. Amabili M., Pandoussis M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // Appl. Mech. Rev. – 2003. – No. 56. – P. 349–381.
10. Haldar S. Free vibration of composite skewed cylindrical shell panel by finite element method // J. Sound and Vibr. – 2008. – 311. – P. 9–19.
11. Moussaoi F., Benamar R. Non-linear Vibrations of shell-type structures review with Bibliography // J. Sound and Vibr. – 2002. – 225 (1). – P. 345–355.
12. Nayak A. K., Moy S. S. J., Sheno R. A. Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory // Composites. – 2002. – Part B. 33. – P. 505–519.
13. Wang J., Schweizerhof K. Boundary domain element method for free vibration of moderately thick laminated orthotropic shallow shells // Int. J. Solids Struct. – 1996. – 33, No. 1. – P. 11–18.

## НЕЛІНІЙНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК СИМЕТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ

Запропоновано метод дослідження вільних нелінійних коливань багатошарових пологих оболонок зі складною формою плану. Математичну постановку задачі виконано в рамках уточненої теорії першого порядку типу теорії Тимошенка. Особливістю роботи є застосування теорії  $R$ -функцій і варіаційних методів для знаходження власних функцій, які приймаються в нелінійній задачі як базисні функції. За допомогою створеного програмного забезпечення виконано тестування запропонованого методу та розв'язано нові задачі, внаслідок яких побудовано амплітудно-частотні залежності для сферичних оболонок, які опираються на план складної форми.

## NONLINEAR FREE VIBRATIONS OF SYMMETRICALLY LAMINATED SHALLOW SHELLS WITH COMPLEX PLAN-FORM

To investigate nonlinear free vibrations of the laminated shallow shells with complex plan form a new method is proposed. The mathematical statement is carried out by first-order shear deformation theory like Timoshenko theory. The distinctive feature of this approach is application of the  $R$ -functions theory and variational methods for finding eigenfunctions. These functions are used as basis functions for solving a nonlinear problem. To check the validity of the proposed method some test problems have been solved. New numerical results have been obtained for spherical shallow shells with complex plan form as the backbone curves.

Нац. техн. ун-т  
«Харьков. политехн. ин-т», Харьков

Получено  
22.03.08