УДК 517.524

Д. І. Боднар[1], Х. Й. Кучмінська[2]

БАГАТОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ g -ДРОБІВ

Зроблено огляд досліджень, присвячених багатовимірним узагальненням найбільш вивченого класу функціональних неперервних дробів – g-дробів. Розглянуто гіллясті ланцюгові g-дроби, двовимірні g-дроби і g-дроби з нерівнозначними змінними.

Найбільш вивченим класом функціональних неперервних дробів є g-дроби [10, 19, 23, 31]

$$s_0\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{g_n(1-g_{n-1})z}{1}\right)^{-1},$$

де $s_0>0$, $g_0=0$, $0<g_n<1$, $z\in\mathbb{C}$. Першим досліджував цей дріб при $z=1$ та умові $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(1-g_{n-1})=0$ І. Слешинський [18]. Пізніше Е. Ван Флек, О. Перрон, В. Скот, Г. Уолл досліджували різні типи регулярних C-дробів, так званих «g-дробів» [10, 31]. Цей клас неперервних дробів виявився важливим у застосуваннях. Зокрема, Г. Уолл охарактеризував клас $\mathcal{W}$ функцій $f(z)$, голоморфних у площині з розрізом $\{z:|\arg(1+z)|<\pi\}$ і які в цій площині задовольняють умову $\mathrm{Re}\left(\sqrt{1+z}\,f(z)\right)>0$, в термінах g-дробів і встановив інтегральне зображення цих функцій [31]. Також ці дроби використовують для аналітичного продовження функцій, знаходження нулів і полюсів, областей однолистості деяких аналітичних і мероморфних функцій [28, 29], розв’язування проблеми моментів [31], функціональних рівнянь [30].

Коефіцієнти g_n однозначно визначаються за коефіцієнтами (гаусдорфові моменти) ряду Тейлора

$$f(z)=s_0-s_1z+s_2z^2-s_3z^3+\ldots$$

і навпаки. Для їхнього обчислення маємо алгоритм Бауера [20], g_n є діагональними елементами $g_n^{(0)}$ таблиці

$$\begin{array}{cccccc}
 & g_1^{(0)} & & & & \\
g_0^{(1)} & & g_2^{(0)} & & & \\
 & g_1^{(1)} & & g_3^{(0)} & & \\
g_0^{(2)} & & g_2^{(1)} & & g_4^{(0)} & \\
 & g_1^{(2)} & & g_3^{(1)} & \vdots & \ddots \\
g_0^{(3)} & & g_2^{(2)} & & \vdots & \\
\vdots & g_1^{(3)} & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

з початковими умовами $g_0^{(m)}=0$, $g_1^{(m)}=\dfrac{s_{m+1}}{s_m}$ і для них виконується правило ромба

$$\left(1-g_{2n+1}^{(m)}\right)\left(1-g_{2n+2}^{(m)}\right)=\left(1-g_{2n}^{(m+1)}\right)\left(1-g_{2n+1}^{(m+1)}\right),$$
$$g_{2n}^{(m)}g_{2n+1}^{(m)}=g_{2n-1}^{(m+1)}g_{2n}^{(m+1)}.$$

У. Грег [23] встановив апріорні оцінки для наближення функції $f(z) \in$ $\in \mathcal{W}$ n-ми підхідними дробами g-дробу, в який вона розвивається в усій області збіжності дробу, використовуючи при цьому запроваджене ним поняття π-дробу.

Запроваджені В. Я. Скоробогатьком в середині 60-х років XX століття гіллясті ланцюгові дроби як узагальнення неперервних дробів [19] відкрили можливість узагальнення і цього найбільш вивченого класу функціональних дробів.

Конструкція багатовимірного g-дробу вперше розглянута в роботі [2]. Техніка g-дробів і зв'язаних з ними ланцюгових послідовностей була використана при доведенні багатьох ознак збіжності неперервних дробів, зокрема, ознак збіжності Перрона, Ван Флека, Пейдона – Уолла, Слешинського – Прінгсгейма, Коха та ін. У монографії [1] розглянуто багатовимірні узагальнення цих результатів.

Теорема 1 (Узагальнення теореми Перрона [1]). *Нехай для ГЛД*

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де b_0, $a_{i(k)}$ *– комплексні числа, при всіх можливих наборах індексів виконуються умови*

$$|a_{i(k)}| \le \frac{1}{N} g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}), \tag{2}$$

$g_{i(k)} \in \mathbb{R},\ 0 \le g_{i(k)} < 1,\ i_k = 1,\dots,N,\ k \ge 1$, *або* $0 < g_{i(k)} \le 1,\ i_k = 1,\dots,N,\ k \ge 1$, *причому* $g_{i(0)} = g_0 = 0$.

Тоді ГЛД (1) *абсолютно збігається і його областю значень є круг* $|z - b_0| \le 1$.

Теорема 2 (Узагальнення теореми Ван Флека [1]). *Нехай елементи ГЛД*

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1} \tag{3}$$

є комплексними числами такими, що послідовність $\{c_k\}$, $c_k = N\max\left(|a_{i(k)}| :\right.$ $\left. i_p = 1,\dots,N,\ p = 1,\dots,k\right)$, $k \ge 1$, *є ланцюговою послідовністю з мінімальними параметрами* m_p, $p \ge 0$, *які задовольняють умови* $0 \le m_p < 1$, $p \ge 1$.

Тоді ГЛД (3) *абсолютно збігається, якщо збігається ряд*

$$T = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} m_i (1 - m_i)^{-1}.$$

Значення ГЛД (3) *і всіх його підхідних дробів належать області*

$$|z - T(2T-1)^{-1}| \le T(T-1)(2T-1)^{-1}.$$

Теорема 3 (Узагальнення теореми Пейдона – Уолла [1]). *Нехай елементи* $a_{i(k)}$ *ГЛД* (3) *є комплексними числами, що задовольняють умови* (2), $g_{i(k)} \in \mathbb{R}$, $0 \le g_{i(k)} < 1$, $i_k = 1,\dots,N$, $k \ge 1$, $i_0 = 0$, *причому* $g_{i(0)} = g_0 = 0$.

Тоді ГЛД (3) *збігається, якщо існує таке натуральне число* n *і набір індексів* $i_1, i_2, \dots, i_n$, $i_k = 1,\dots,N$, $k = 1,\dots,n$, *що* $g_{i(n)} = 0$ *або* $Na_{i(n)} \ne$ $\ne -g_{i(n)}(1 - g_{i(n-1)})$.

Після запровадження поняття двовимірного неперервного дробу (ДНД) [17] почалося вивчення його властивостей та властивостей різних конструкцій ДНД в залежності від вигляду частинних чисельників чи знаменників

ДНД. Перші двовимірні узагальнення g-дробу розглянуто в роботах [3, 24]. Так, у [3] введено двовимірний неперервний g-дріб (ДНg-Д) вигляду

$$\frac{1}{2} g_{00} z_{00} \left(1 + \frac{1}{2} \Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4} g_{i-1,i-1} g_{ii} z_{ii}}{1 + \frac{1}{2} \Phi_i} \right)^{-1},$$

де

$$\Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{j+k-1,k}) g_{j+k,k} z_{j+k,k}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{k,j+k-1}) g_{k,j+k} z_{k,j+k}}{1}, \quad k \ge 0,$$

g_{ij}, $i \ge 0,\ j \ge 0$, – дійсні сталі такі, що $0 \le g_{ij} \le 1$, z_{ij} – комплексні змінні, та доведено, що такий ДНg-Д абсолютно збіжний при $i \ge 0,\ j \ge 0$. Цей дріб використано для доведення збіжності парної і непарної частини ДНД

$$\left(1 + \Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}}{1 + \Phi_i} \right)^{-1}, \qquad \Phi_i = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+i,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,j+i}}{1}. \tag{4}$$

Збіжність ДНg-Д вигляду

$$g_{00} \left(1 + \Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{i-1,i-1}) g_{ii} z_{ii}}{1 + \Phi_i} \right)^{-1}, \tag{5}$$

де

$$\Phi_k = \frac{(1 - g_{kk}) g_{k+1,k} z_{k+1,k}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{j+k,k}) g_{j+k+1,k} z_{j+k+1,k}}{1}} + \frac{(1 - g_{kk}) g_{k,k+1} z_{k,k+1}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{k,j+k}) g_{k,j+k+1} z_{k,j+k+1}}{1}},$$

g_{ij}, $i \ge 0,\ j \ge 0$, – дійсні сталі такі, що $0 \le g_{ij} \le 1$, z_{ij} – комплексні змінні, досліджено в роботі [24]. ДНg-Д (5) використано для доведення одного з узагальнень теореми Слешинського – Прінгсгейма для ДНД.

Теорема 4 (Узагальнення теореми Слешинського – Прінгсгейма [25]). *Нехай елементи дробу* (4) – *комплексні числа, які задовольняють умови*

$$|a_{ii}| \le \frac{1}{3} g_{ii} (1 - g_{i-1,i-1}), \qquad |a_{00}| \le g_{00},$$

$$|a_{i+1,i}| \le \frac{1}{3} g_{i+1,i} (1 - g_{ii}), \qquad |a_{i,i+1}| \le \frac{1}{3} g_{i,i+1} (1 - g_{ii}),$$

$$|a_{ij}| \le g_{ij} (1 - g_{i-1,j}), \quad i > j, \qquad |a_{ij}| \le g_{ij} (1 - g_{i,j-1}), \quad i < j, \quad i, j = 0, 1, \ldots,$$

де $g_{ij} \in \mathbb{R},\ 0 \le g_{ij} < 1,\ g_{-1,-1} = 0$ *або* $g_{ij} \in \mathbb{R},\ 0 < g_{ij} \le 1$.

Тоді ДНД (4) *абсолютно збіжний і його значення належить кругу* $|z| \le 1$.

Багатовимірними g-дробами називають гіллясті ланцюгові дроби вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1} \tag{6}$$

або вигляду

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1} \right)^{-1}, \tag{7}$$

де $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $0 \le g_{i(k)} \le 1$. Використовуючи теореми 1–3, можна сформулювати ознаки збіжності таких дробів.

Теорема 5 [**1**]. *ГЛД* (6), *для якого виконуються умови* $0 \le g_{i(k)} < 1$ *або* $0 < g_{i(k)} \le 1$, *причому* $g_{i(0)} = g_0 = 0$, *збігається абсолютно, якщо* $\sum_{k=1}^{N} |z_k| \le \le 1$. *Дріб* (6) *збігається абсолютно та рівномірно, якщо, крім цього,*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - m_k}{m_k} = 0, \quad \textit{де} \quad m_k = \min\left(g_{i(k)} : i_p = 1,\ldots,N,\ p = 1,\ldots,k\right).$$

Справджується оцінка швидкості збіжності $|f - f_n| \le \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - m_k}{m_k}$, *де* f *− значення нескінченного дробу* (6), f_n *− його* n*-й підхідний дріб.*

Багатовимірним g-дробам присвячена дисертаційна робота Р. І. Дмитришина. Він побудував алгоритм розвинення кратного степеневого ряду в багатовимірний g-дріб і, навпаки, − гіллястого ланцюгового g-дробу в кратний степеневий ряд, означив і дослідив властивості багатовимірних ланцюгових послідовностей, довів існування і єдиність мінімальних і максимальних параметрів цієї послідовності [6, 12, 13]. Були також встановлені параболічні та еліптичні області збіжності g-дробів (6), (7) [16, 21, 22].

Важливою була задача отримання оцінок похибок апроксимацій дробів (6), (7), для цього в [5, 11] було запроваджено поняття допоміжного багатовимірного π-дробу, встановлено зв'язок між π- і g-дробами, який і використано для встановлення апріорних оцінок.

Теорема 6 [**11**]. *Багатовимірний* g*-дріб* (6) *збігається в області* $Q_\alpha \cap P_\alpha$ *до голоморфної функції* $g(z)$. *Для похибок апроксимації виконуються оцінки*

$$|g(z) - g_n(z)| \le$$
$$\le K\left(\sum_{k=1}^{N} |z_k|\right)^n \left(4\cos^2\alpha - 2T\sum_{k=1}^{N}\left(|z_k| - \operatorname{Re}(z_k e^{-2i\alpha})\right)\right)^{-n}, \quad n \ge 1,$$

де

$$Q_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |z_k| \le 4\cos^2\alpha - 2T\sum_{k=1}^{N}\left(|z_k| - \operatorname{Re}(z_k e^{-2i\alpha})\right) \right\},$$

$$P_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N}\left(|z_k| - \operatorname{Re}(z_k e^{-2i\alpha})\right) < 2\cos^2\alpha \right\}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$T = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ 1 - \left(1 + \sum_{r=n}^{\infty} \mu_n \mu_{n+1} \ldots \mu_r\right)^{-1} \right\},$$

$$\mu_r = \max\left\{ g_{i(r)} (1 - g_{i(r-1)})^{-1} : i_p = 1,\ldots,N,\ p = 1,\ldots,r \right\},$$

$g_n(z)$ *−* n*-не наближення дробу* (6).

Теорема 7 [**21**]. *Дріб* (6) *збігається в кожній точці області*

$$P = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} P_\alpha,$$

$$P_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |z_k| - \operatorname{Re}\left(z_k e^{-2i\alpha}\right) \right\} < 2\cos^2\alpha,$$

до голоморфної в цій області функції. Збіжність рівномірна на компактах цієї області.

Поряд з багатовимірними g-дробами (6), (7) та ДНg-Д (5) вивчаються ДНg-Д вигляду

$$s_0\left(1+\Phi_0(\mathbf{z})+\cfrac{g_{11}z_1z_2}{1+\Phi_1(\mathbf{z})+\underset{j=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\dfrac{g_{j-1,j-1}g_{jj}z_1z_2}{1+\Phi_j(\mathbf{z})}}\right)^{-1}, \tag{8}$$

де $s_0>0$,

$$\Phi_k(\mathbf{z})=\underset{j=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\frac{(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}z_1}{1}+\underset{j=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\frac{(1-g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}z_2}{1},$$

$k\ge 0$, $g_{00}=0$, $0<g_{kj}<1$, $k\ge 0,\ j\ge 0,\ k+j\ge 1$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$.

Зазначимо, що ДНД не є ГЛД із числом гілок розгалуження $N=2$, а, отже, і ДНg-Д не є багатовимірним g-дробом.

ДНg-Д (8) введено в роботі С. М. Возної [7]. У роботах [8, 9, 26, 27] побудувано алгоритм розвинення подвійного степеневого ряду у ДНg-Д і, навпаки, – ДНg-Д у подвійний степеневий ряд, досліджено збіжність ДНg-Д і деяких його спеціальних виглядів, встановлено оцінки похибок наближення двовимірними неперервними g-дробами.

Теорема 8 [**8**]. *Для ДНg-Д* (8) *існує єдиний формальний подвійний степеневий ряд*

$$\sum_{k+\ell=0}^{\infty}(-1)^{k+\ell}s_{k\ell}z_1^kz_2^\ell,\quad s_{k\ell}\in\mathbb{R},\qquad k\ge 0,\quad \ell\ge 0,\quad \mathbf{z}=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,$$

до якого цей дріб буде відповідним. Порядок відповідності дорівнює n.

У роботі [8] встановлено аналог алгоритму Бауера розвинення подвійного степеневого ряду у ДНg-Д (8).

Теорема 9 [**7**]. *ДНg-Д* (8) *збігається в області*

$$Q=\{\mathbf{z}:|z_1|+|z_2|+2|z_1z_2|<1\}.$$

Теорема 10 [**7**]. *ДНg-Д* (8) *збігається до голоморфної функції в області*

$$D=\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)}P_\alpha,$$

$$P_\alpha=\{\mathbf{z}:|z_1|+|z_2|+2|z_1z_2|-\operatorname{Re}((z_1+z_2+2z_1z_2)e^{-2i\alpha})<2\cos^2\alpha\}.$$

Збіжність рівномірна на кожній компактній підмножині цієї області.

Теорема 11 [**27**]. *ДНg-Д* (8) *збігається в області* $\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)}Q_\alpha\cap P_\alpha$ *до голоморфної функції* $g(z)$. *Для похибок апроксимації виконуються оцінки*

$$|g(\mathbf{z})-g_n(\mathbf{z})|\le\frac{s_0}{[1-\omega(z_1)-2\omega(z_2)-2\omega(\mathbf{z})]^2\cos^2\alpha}\Bigg(L_{n0}(\mathbf{z})+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-3}\frac{L_{nj}(\mathbf{z})|z_1z_2|^j}{[(1-2\omega(\mathbf{z}))\cos\alpha]^{2j}}+\frac{(|z_1|^2+|z_2|^2)|z_1z_2|^{n-2}}{[(1-2\omega(\mathbf{z}))\cos\alpha]^{2n-4}}+$$

$$+\frac{(|z_1|+|z_2|)|z_1z_2|^{n-1}}{[(1-2\omega(\mathbf{z}))\cos\alpha]^{2n-2}}+\frac{|z_1z_2|^n}{[(1-2\omega(\mathbf{z}))\cos\alpha]^{2n-1}}\Bigg),$$

де $P_\alpha=\{\mathbf{z}:|z_1|+|z_2|+2|z_1z_2|-\operatorname{Re}((z_1+z_2+2z_1z_2)e^{-2i\alpha})<2\cos^2\alpha\}$,

$$Q_\alpha=\{\mathbf{z}:\sqrt{|z_1z_2|}\cos\alpha<\cos^2\alpha-(|z_1z_2|-\operatorname{Re}(z_1z_2e^{-2i\alpha}))\},$$

$$\omega(t)=\frac{t-\mathrm{Re}\left(te^{-2i\alpha}\right)}{2\cos^2\alpha},\quad L_{nk}(\mathbf{z})=\sum_{j=1}^{2}L_j(z_j)\left|\frac{1-\sqrt{1+z_j}}{1+\sqrt{1+z_j}}\right|^{n-2-k},\quad k=0,\ldots,n-3,$$

$$L_j(z_j)=\max\left\{1,\mathrm{tg}\,\frac{|\arg(1+z_j)|}{2}\right\}\frac{|z_j|(\cos\alpha+|z_j|)}{\mathrm{Re}\sqrt{1+z_j}\cos^2\alpha}\left|\sqrt{1+z_j}-\frac{1}{\sqrt{1+z_j}}\right|,$$

$$j=1,2.$$

У виразах $L_{nk}(\mathbf{z})$ береться головна гілка квадратного кореня.

Вивчаються також g-дроби з нерівнозначними змінними [4, 14, 15]

$$s_0\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}\right)^{-1}. \tag{9}$$

У роботі [4] встановлено аналог алгоритму Бауера розвинення подвійного степеневого ряду у двовимірний g-дріб ($i_0=2$) з нерівнозначними змінними, а в [15] для дробу (9) з N змінними ($i_0=N$) встановлено, що його областю збіжності є полікруг $|z_k|\le\frac{1}{N}$, $k=1,\ldots,N$. У роботі [14] досліджено питання, як змінити структуру дробу (9), щоб він збігався у ширшому полікрузі $\{|z_k|\le 1,\ k=1,\ldots,N\}$. Показано, що частинні ланки такого дробу матимуть вигляд $\dfrac{q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$.

Теорема 12 [**14**]. *Якщо для ГЛД*

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_n=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}, \tag{10}$$

де $z_{i(k)}$ – комплексні змінні, $i_0=N$, для усіх можливих наборів індексів виконуються умови $g_{i(k)}\in\mathbb{R},\ 0\le g_{i(k)}<1$, $i_k=1,\ldots,i_{k-1},\ k\ge 1$, або $0<g_{i(k)}\le 1$, $i_k=1,\ldots,i_{k-1},\ k\ge 1$, причому $g_{i(0)}=g_0=0$, то дріб (10) *абсолютно й рівномірно збігається в області $|z_{i(k)}|\le\frac{1}{i_{k-1}}$, $i_p=1,\ldots,i_{p-1}$, $p=1,\ldots,k,\ k\ge 1$,* і *його областю значень є круг $|z-1|\le 1$.*

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\dfrac{(1-g_{i_1i_2\ldots i_k})\hat g_{i_1i_2\ldots i_k}x_{i_1i_2\ldots i_k}}{1}$ // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 15. – С. 30–35.
3. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 30–34.
4. *Боднар Д. І., Дмитришин Р. І.* Двовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера // Доп. НАН України. – 2006. – № 2. – С. 13–18.
5. *Боднар Д. І., Дмитришин Р. І.* Оцінки похибок апроксимацій багатовимірних g-дробів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1998. – № 341. – С. 36–40.
6. *Боднар Д. І., Дмитришин Р. І.* Про багатовимірне узагальнення g-дробів // Доп. НАН України. – 1997. – № 12. – С. 11–17.
7. *Возна С. М.* Збіжність двовимірного неперервного g-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 3. – С. 28–32.

8. *Возна С. М., Кучмінська Х. Й.* Відповідність між формальним подвійним степеневим рядом і двовимірним неперервним g-дробом // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. – Київ: Ін-т математики НАНУ. – 2004. – **1**, № 4. – С. 130–142.
9. *Возна С. М., Кучмінська Х. Й.* Ознаки збіжності для двовимірного неперервного дробу спеціального вигляду // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191–192. – С. 22–32.
10. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
11. *Дмитришин Р. І.* Апріорні оцінки похибок апроксимацій багатовимірного g-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 4. – С. 10–12.
12. *Дмитришин Р. І.* Багатовимірний g-дріб, відповідний до формального N-кратного степеневого ряду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 3. – С. 21–23.
13. *Дмитришин Р. І.* Багатовимірні ланцюгові послідовності і g-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39,** № 2. – С. 50–54.
14. *Дмитришин Р. І.* Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 44–49.
15. *Дмитришин Р. І.* Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 121–127.
16. *Дмитришин Р. І.* Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\dfrac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 4. – С. 31–36.
17. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. – 1978. – № 7. – С. 614–618.
18. *Слешинский И. В.* К вопросу о сходимости непрерывных дробей // Мат. сб. – 1888. – **XIV**. – С. 337–343.
19. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применения в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
20. *Bauer F. L.* The g-algorithm // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1960. – **8**. – P. 1–17.
21. *Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I.* On the convergence of multidimensional g-fraction // Мат. студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 115–126.
22. *Dmytryshyn R. I.* The multidimensional generalization of g-fraction and their application // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – **164-165**. – P. 265–284.
23. *Gragg W. B.* Truncation error bounds for g-fractions // Numer. Math. – 1968. – **11**. – P. 370—379.
24. *Kuchminskaja Ch.* On the convergence of two-dimensional continued fractions// Constructive theory of functions. – Sofia: Publ. House of the Bulg. Acad. Sci. – 1984. – C. 501–506.
25. *Kuchmins'ka Kh.* Convergence criteria of two-dimensional continued fractions // Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II / Ed. Annie Cyut. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1994. – P. 423–431.
26. *Kuchmins'ka Kh.* Two-dimensional generalization of continued fractions // Diophantine Analysis and Related Fields / Eds M. Katsurada, T. Komatsu, H. Nakada): Seminar on Math. Sci. – Yokohama: Dept of Math., Keio University, 2006. – No. 35. – P. 125–140.
27. *Kuchmins'ka Kh. Yo., Vozna S. M.* Truncation error bounds for a two-dimensional continued g-fraction // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – С. 120–126.
28. *Runckel H.* Bounded analytic functions in the unit disk and the behaviour of certain analytic continued fractions near the singular line // J. reine angew. Math. – 1976. – **281**. – P. 97–125.
29. *Thale J. S.* Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – **7**, No. 2. – P. 232–244.
30. *Tsygvintsev A. V.* On the connection between g- fractions and solutions of the Feigenbaum–Cvitanović equation // Commun. in the analytic theory of continued fractions. – 2003. – **XI**. – P. 103–112.
31. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ g -ДРОБЕЙ

Сделан обзор исследований по многомерным обобщениям наиболее изученного класса функциональных непрерывных дробей – g-дробей. Рассмотрены ветвящиеся цепные g-дроби, двумерные g-дроби и g-дроби с неравнозначными переменными.

MULTIDIMENSIONAL GENERALIZATIONS OF g - CONTINUED FRACTIONS

A survey of multidimensional generalization of the best-studied class of functional continued fractions – g-fractions – has been proposed. Branched continued g-fractions, two-dimensional continued g-fractions and g-fractions with unequal variables have been considered.

[1] Тернопільськ. нац. економ. ун-т, Тернопіль,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.04.08