УДК 517.958: 536.2

Є. Я. Чапля[1,2], О. Ю. Чернуха[1], П. Р. Пелех[1]

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ З ВИКОРИСТАННЯМ ДІАГРАМ ФЕЙНМАНА

Робота присвячена математичному моделюванню процесів теплопровідності в багатофазних тілах випадково неоднорідної структури. Нестаціонарну крайову задачу теплопровідності сформульовано з використанням закону Фур'є для цілого тіла. Для дослідження усереднених температурних полів застосовано техніку діаграм Фейнмана. Отримано рівняння Дайсона та нелокальне рівняння теплопровідності для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз температурного поля в багатофазних випадково неоднорідних тілах.

Дослідження температурних полів в елементах конструкцій з композиційних матеріалів, що знаходяться в умовах нерівномірного нагріву, пов'язане з побудовою розв'язків рівнянь теплопровідності, які описують теплові процеси у макрооб'ємах таких середовищ. Така потреба виникає, зокрема, при знаходженні розподілів температурних полів у магнітодіелектриках, які використовуються в електро- і радіотехнічних приладах [8], де різниця фізико-механічних властивостей складових елементів (фаз) зумовлює нерівність їхніх температур.

При дослідженні температурних полів у випадково неоднорідних тілах, як правило, застосовують метод гомогенізації гетерогенного середовища [8, 10, 11]. При цьому накладається умова ергодичності (квазіергодичності) досліджуваних процесів [3, 5]. Якщо ж розміри випадкових неоднорідностей співвимірні з розмірами тіла, тоді виникає необхідність побудови нових моделей, підходів і методів, які дозволяють описувати експериментально спостережувані процеси та явища.

У пропонованій роботі з використанням діаграм Фейнмана [5] отримано нелокальні рівняння теплопровідності для усередненого температурного поля у багатофазних випадково неоднорідних тілах.

1. Постановка задачі. Нехай в N-фазному тілі з випадково розміщеними неоднорідностями протікають процеси теплопровідності. Матеріал тіла розглядаємо як середовище, фізичні характеристики якого є випадковими функціями, тобто коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\mathbf{r})$, теплоємність $c(\mathbf{r})$ і густина $\rho(\mathbf{r})$ є випадковими функціями просторових координат. Розподіл випадкового температурного поля $T(\mathbf{r},t)$ у такому тілі описує рівняння теплопровідності [4, 8]

$$L(\mathbf{r},t)T(\mathbf{r},t) \equiv c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}(\lambda(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla} T(\mathbf{r},t)) = f(\mathbf{r},t), \tag{1}$$

де $f(\mathbf{r},t)$ – густина джерел тепла (детермінована функція); $\boldsymbol{\nabla}$ – оператор Гамільтона; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор біжучої точки; t – час.

Нехай на поле $T(\mathbf{r},t)$ накладено необхідні детерміновані крайові умови. Наприклад, якщо задано умови І-го роду [4], тоді маємо

$$T(\mathbf{r},t)\big|_{t=0} = b_1(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in (V),$$

$$T(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = b_2(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)}, \tag{2}$$

де $b_1(\mathbf{r})$, $b_2(\mathbf{r},t)$ – відомі функції; (∂V) – границя тіла (V).

2. Еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння. Введемо у розгляд випадкову функцію $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ типу одиничної східчастої функції Гевісайда, яка визначає конфігурацію (розташування) фаз в області тіла та означена таким чином:

$$\eta_{ij}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in (V_i^{(j)}), \\ 0, & \mathbf{r} \notin (V_i^{(j)}), \end{cases} \qquad \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(\mathbf{r}) = 1 , \tag{3}$$

де $(V_i^{(j)})$ – i-та однозв'язна область (i-те включення) j-ї фази; i – номер включення, $i = 1, \ldots, n_j$; n_j – кількість однозв'язних областей сорту j, $j = 1, \ldots, N$. Тоді

$$\lambda(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_j \eta_{ij}(\mathbf{r}), \qquad c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} c_j \rho_j \eta_{ij}(\mathbf{r}) . \tag{4}$$

Зазначимо, що індексом j при коефіцієнтах рівняння (1) позначено відповідні значення теплофізичних характеристик j-ї фази. Підставимо таке подання коефіцієнтів (4) у рівняння (1) та врахуємо, що [2]

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} \nabla\big(\lambda_j \eta_{ij}(\mathbf{r})\big) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} [\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}) , \tag{5}$$

де $[\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}}$ – вектор-функція стрибка коефіцієнта теплопровідності на границі Γ_{ij} однозв'язної області $(V_j^{(j)})$; $\mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}$ – радіус-вектор точок границі Γ_{ij}. Тоді отримаємо

$$L(\mathbf{r},t)T(\mathbf{r},t) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} \left\{ \left(c_j \rho_j \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_j \Delta T \right) \eta_{ij}(\mathbf{r}) - [\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}) \nabla T \right\} = f(\mathbf{r},t) . \tag{6}$$

До одержаного рівняння додамо і віднімемо невипадковий оператор теплопровідності $\bar{L}(\mathbf{r},t)$, коефіцієнти якого є усередненими величинами:

$$\bar{L}(\mathbf{r},t) \equiv \overline{c\rho} \frac{\partial}{\partial t} - \bar{\lambda}\, \Delta , \tag{7}$$

де $\overline{c\rho} = \overline{c(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r})}$, $\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\mathbf{r})}$ – усереднені за ансамблем реалізацій структури тіла характеристики (у випадку рівномірного розподілу фаз співпадають із середніми за об'ємом тіла).

Тоді з урахуванням умови суцільності тіла (3) рівняння (6) набуде вигляду

$$\bar{L}(\mathbf{r},t)T(\mathbf{r},t) - f(\mathbf{r},t) = \big(\bar{L}(\mathbf{r},t) - L(\mathbf{r},t)\big)T(\mathbf{r},t) . \tag{8}$$

Розв'язок крайової задачі (8), (2) шукатимемо у вигляді нескінченного інтегрального ряду Неймана [5]. Вважаємо праву частину рівняння (8) джерелом, тобто неоднорідність середовища розглядаємо як внутрішні джерела для процесу теплопровідності у випадково неоднорідному N-фазному тілі. Тоді розв'язок неоднорідної крайової задачі можна подати у вигляді

$$T(\mathbf{r},t) = T_0(\mathbf{r},t) + \int_0^t \int_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') L_s(\mathbf{r}',t') T(\mathbf{r}',t')\, d\mathbf{r}'\, dt' . \tag{9}$$

Тут $T_0(\mathbf{r},t)$ – розв'язок такої крайової задачі:

$$\bar{L}(\mathbf{r},t)T_0(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r},t) ,$$

$$T_0(\mathbf{r},t)\Big|_{t=0} = b_1(\mathbf{r}), \qquad T_0(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = b_2(\mathbf{r},t) , \tag{10}$$

$$L_s(\mathbf{r},t) \equiv \widetilde{c\rho}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(\tilde{\lambda}(\mathbf{r})\nabla) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{c\rho} - c_j\rho_j)\eta_{ij}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t} -$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{\lambda} - \lambda_j)\eta_{ij}(\mathbf{r})\Delta + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}[\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}})\nabla, \tag{11}$$

де $\widetilde{c\rho}(\mathbf{r}) = \overline{c\rho} - c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})$; $\tilde{\lambda}(\mathbf{r}) = \bar{\lambda} - \lambda(\mathbf{r})$ – флуктуації відповідних коефіцієнтів; $G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')$ – детермінована функція Гріна задачі (8), (2) [6].

Отже, вихідну крайову задачу зведено до еквівалентного їй інтегро-диференціального рівняння (9). Його розв'язок будуємо методом послідовних наближень, вибираючи за нульове наближення розв'язок задачі (10). Тоді маємо

$$T(\mathbf{r},t) = T_0(\mathbf{r},t) + \int_0^t\int_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')L_s(\mathbf{r}',t')T_0(\mathbf{r}',t')d\mathbf{r}'dt' +$$

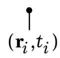
$$+\int_0^t\int_{(V)}\int_0^{t'}\int_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')L_s(\mathbf{r}',t')G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',t',t'')\times$$

$$\times L_s(\mathbf{r}'',t'')T_0(\mathbf{r}'',t'')\,d\mathbf{r}''\,dt''\,d\mathbf{r}'\,dt' + \ldots. \tag{12}$$

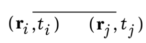
Зазначимо, що ряд Неймана (12) є розвиненням випадкового температурного поля за збуреннями, які виникають у системі через наявність включень з іншими, ніж у матриці, теплофізичними характеристиками.

3. Діаграми Фейнмана. Щоб дослідити структуру цього ряду, введемо графічне зображення його елементів у вигляді діаграм Р. Фейнмана [7].

Співставимо функціям $T(\mathbf{r},t)$, $T_0(\mathbf{r},t)$ та оператору $L_s(\mathbf{r},t)$, що входять у рівняння (12), такі діаграми (використовуються типові позначення [5]):

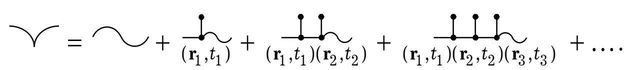
$T(\mathbf{r},t) \sim$ , $T_0(\mathbf{r},t) \sim$ , $L_s(\mathbf{r}_i,t_i) \sim$ ,

а функції Гріна $G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j,t_i,t_j)$ – відрізок прямої лінії, кінцям якої припишемо координати $(\mathbf{r}_i,t_i)$ та $(\mathbf{r}_j,t_j)$:

$G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j,t_i,t_j) \sim$ .

Точки $(\mathbf{r}_i,t_i)$, $(\mathbf{r}_j,t_j)$, у яких сходяться лінії, що зображають T, T_0, G та L_s, є вершинами діаграми. Приймемо, що за координатами внутрішніх вершин відбувається інтегрування. Кількість таких вершин у діаграмі визначає порядок діаграми.

Тоді ряд (12) у графічному вигляді буде таким:



(13)

Усереднимо випадкове температурне поле (12) (або в графічному вигляді (13)) за ансамблем конфігурації фаз із заданою функцією розподілу. Тоді для аналітичного розв'язку маємо

$$\left\langle T(\mathbf{r},t)\right\rangle = T_0(\mathbf{r},t) + \int_0^t\int_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')\left\langle L_s(\mathbf{r}',t')\right\rangle T_0(\mathbf{r}',t')\,d\mathbf{r}'\,dt' +$$

$$+\int_0^t\int_{(V)}\int_0^{t'}\int_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')\left\langle L_s(\mathbf{r}',t')\,G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',t',t'')\,L_s(\mathbf{r}'',t'')\right\rangle\times$$

$$\times T_0(\mathbf{r}'',t'')\,d\mathbf{r}''\,dt''\,d\mathbf{r}'\,dt' + \ldots. \tag{14}$$

При цьому, враховуючи вигляд оператора L_s, необхідно визначити вирази типу $\langle \eta_{ij}(\mathbf{r}') \rangle$, $\langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma}) \rangle$, $\langle \eta_{ij}(\mathbf{r}')\eta_{k\ell}(\mathbf{r}'') \rangle$, $\langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma})\delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_{k\ell}^{\Gamma}) \rangle$, $\langle \eta_{ij}(\mathbf{r}') \times$ $\times\, \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_{k\ell}^{\Gamma}) \rangle$ і т. д. Тобто для розрахунку усередненого температурного поля потрібно знати моменти $\langle \eta_{ij}(\mathbf{r}') \ldots \eta_{k\ell}(\mathbf{r}^{(n)}) \rangle$, $\langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma}) \ldots \delta(\mathbf{r}^{(n)} - \mathbf{r}_{k\ell}^{\Gamma}) \rangle$, $\langle \eta_{ij}(\mathbf{r}') \ldots \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_{k\ell}^{\Gamma}) \rangle$ будь-якого порядку. При довільній статистиці це проблемна задача, яка, крім цього, вимагає розробки методів підсумовування усереднених рядів. Враховуючи характерні часи релаксації теплових процесів, у випадку малої об'ємної частки включень у певних випадках можна обмежитися «борнівським наближенням» [1], тобто враховувати два перші члени ряду Неймана.

Тоді випадкове поле є лінійним функціоналом від флуктуацій $\tilde{\lambda}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) - \langle \lambda(\mathbf{r}) \rangle$, $\widetilde{c\rho}(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}) - \langle c(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}) \rangle$. Тому всі моменти поля лінійно визначаються через моменти $\tilde{\lambda}(\mathbf{r})$, $\widetilde{c\rho}(\mathbf{r})$ того ж самого порядку.

Усереднене температурне поле у борнівському наближенні є таким:

$$\langle T(\mathbf{r},t) \rangle = T_0(\mathbf{r},t) + \int\limits_0^t \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') \langle L_s(\mathbf{r}',t') \rangle\, T_0(\mathbf{r}',t')\, d\mathbf{r}'\, dt' .$$

Кореляційна (автокореляційна) функція за означенням визначається як

$$\psi_T(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t) \equiv \langle T(\mathbf{r}_1,t) T(\mathbf{r}_2,t) \rangle - \langle T(\mathbf{r}_1,t) \rangle \langle T(\mathbf{r}_2,t) \rangle . \tag{15}$$

Якщо покладемо тут $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, то отримаємо дисперсію випадкового поля $D[T]$ (тобто середній квадрат флуктуації) в точці $\mathbf{r}$:

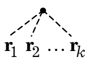
$$D[T] \equiv \sigma_T^2(\mathbf{r},t) \equiv \left\langle \left| \tilde{T}(\mathbf{r},t) \right|^2 \right\rangle = \left\langle\, [T(\mathbf{r},t) - \langle T(\mathbf{r},t) \rangle]^2 \right\rangle .$$

Зазначимо, що співвідношення (15) та аналогічні вирази для вищих моментів поля $T(\mathbf{r},t)$ дають повний статистичний розв'язок задачі.

Дослідимо в графічному вигляді усереднене поле температури. Позначимо

$$\langle T(\mathbf{r},t) \rangle \sim \rule{2em}{3pt}\,.$$

Статистичні властивості визначаються кумулянтними (або кореляційними) функціями усіх порядків. Співставимо їм пунктирні лінії, причому порядок кумулянтної функції $\psi_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_k)$ співпадає з порядком діаграми

$\psi_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_k) \sim$ 

.

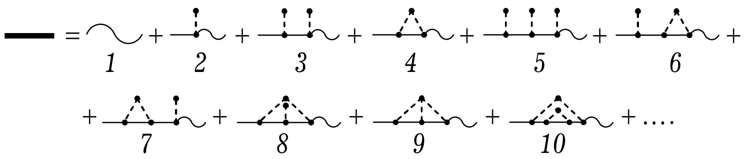
Оскільки поле температури детерміноване за часом, то в кумулянтних функціях час фігурує як параметр. Зазначимо, що

$$\langle L_s(\mathbf{r}_1,t_1) \ldots L_s(\mathbf{r}_k,t_k) \rangle = \psi_k(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_k,t_k) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{k} \langle L_s(\mathbf{r}_\ell,t_\ell) \rangle \langle L_s(\mathbf{r}_1,t_1) \ldots L_s(\mathbf{r}_{\ell-1},t_{\ell-1}) L_s(\mathbf{r}_{\ell+1},t_{\ell+1}) \ldots L_s(\mathbf{r}_k,t_k) \rangle + \ldots .$$

Зауважимо, що, оскільки за координатами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ внутрішніх вершин відбувається інтегрування, то аналітичний вираз, який зображається діаграмою, не залежить від координат внутрішніх вершин. У зв'язку з цим надалі ці координати на діаграмах не зазначаються.

Тоді усереднений ряд (14) можна подати таким чином:



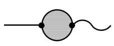
(16)

Зазначимо, що відповідність між діаграмами Фейнмана та аналітичними виразами є взаємно однозначною.

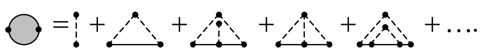
Деякі з діаграм, що входять у (16), містять як фрагменти діаграми нижчого порядку. Наприклад діаграма *6* містить діаграми *2* і *4*. Цим можна скористатися для скорочення запису. Суму ряду (16) можна виразити через суму деякої нескінченної підпослідовності цього ж ряду. Для цього класифікуємо діаграми, що входять у (16).

Діаграма називається слабко зв'язаною, якщо її можна розділити на дві окремі діаграми, розірвавши деяку одну лінію G. У формулі (16) слабко зв'язаними є діаграми *3*, *5*, *6*, *7*. Решта діаграм є сильно зв'язаними (*2*, *4*, *8*, *9*, *10*). Діаграми, що отримуються внаслідок розриву ліній G, у свою чергу, можуть виявитися сильно або слабко зв'язаними. Якщо серед «вторинних» діаграм є слабко зв'язані, то їх можна розбити на простіші діаграми. Продовжуючи цю процедуру, в результаті прийдемо до деякої кількості сильно зв'язаних діаграм. Число сильно зв'язаних діаграм, на які може бути розбита слабко зв'язана діаграма, є показником зв'язності вихідної діаграми. Так, у формулі (16) діаграми *3* та *6* мають показник зв'язності 2, а діаграма *5* – показник зв'язності 3. Для сильно зв'язаних діаграм приймемо, що показник зв'язності дорівнює 1.

У ряді (16) відберемо всі сильно зв'язані діаграми [5, 9], тобто такі, які неможливо розділити на дві окремі діаграми, розірвавши одну лінію G. Оскільки кожна з діаграм починається лінією G і закінчується хвилястою лінією T_0, то суму всіх сильно зв'язаних діаграм можна подати у вигляді

 ,

де введено позначення

$$\bar{G}^{(\text{с.зв})}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') \sim$$  (17)

В аналітичній формі (17) має вигляд

$$\overline{G}^{(\text{с.зв})}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') =$$

$$= \int_0^t \int_{(V)} \int_0^{t_1} \int_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t,t_1)\Sigma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1,t_2)G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}',t_2,t')\,d\mathbf{r}_2\,dt_2\,d\mathbf{r}_1\,dt_1\,, \quad (18)$$

де

$$\Sigma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1,t_2) = \langle L_s(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle + G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1,t_2)\psi_2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) +$$

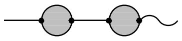
$$+ \int_0^{t_1}\int_{(V)} G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1',t_1,t_1')\langle L_s(\mathbf{r}_1',t_1')\rangle G(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2,t_1',t_2)\psi_2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_1'\,dt_1' +$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_{(V)} G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1',t_1,t_1)\,G(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',t_1',t_2)\psi_3(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_1' dt_1' + \ldots \quad (19)$$

– ядро масового оператора. Розглянемо суму всіх діаграм з показником зв'язаності 2. Кожна з них має вигляд

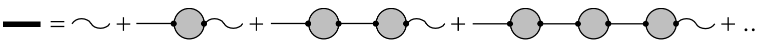
, (20)

де Σ_1 і Σ_2 – будь-які діаграми, що належать правій частині (19). Оскільки при побудові ряду (16) перебираються усі можливі способи попарного з’єднання вершин, то сума всіх можливих складових на зразок (20) дорівнює

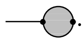
 ,

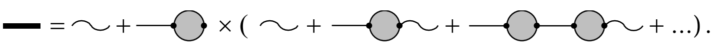
де  – повна сума (19).

Аналогічно будуємо суму всіх діаграм із показниками зв’язності 3, 4 і т. д. Тоді усереднене температурне поле можна подати у вигляді діаграмного ряду

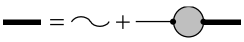
 (21)

Таке подання відрізняється від вихідного діаграмного ряду (16) тільки перегрупуванням його членів.

Виділимо в рівнянні (21) елемент . Тоді

 (22)

Підсумовуючи в (22) вираз в дужках, з використанням (21) отримаємо рівняння Дайсона для усередненого температурного поля у графічній

 (23)

і відповідно аналітичній формах

$$\langle T(\mathbf{r},t)\rangle = T_0(\mathbf{r},t) + \int\limits_0^t \int\limits_{(V)} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t,t_1)\Sigma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1,t_2)\left\langle T(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle d\mathbf{r}_2\,dt_2\,d\mathbf{r}_1\,dt_1 . \quad (24)$$

4. Нелокальне рівняння теплопровідності. Якщо застосувати до рівняння Дайсона (24) оператор $\bar{L}(\mathbf{r},t)$, який визначений формулою (7), тоді з урахуванням (10) отримаємо

$$\overline{c\rho}\,\frac{\partial\langle T(\mathbf{r},t)\rangle}{\partial t} - \bar{\lambda}\,\Delta\langle T(\mathbf{r},t)\rangle = f(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{(V)} \Sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t,t_1)\langle T(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\, d\mathbf{r}_1\,dt_1 . \quad (25)$$

Із порівняння (10) і (25) випливає, що, на відміну від $T_0(\mathbf{r},t)$, функція $\langle T(\mathbf{r},t)\rangle$ задовольняє не диференціальне, а інтегро-диференціальне рівняння. З фізичної точки зору це означає, що усереднене температурне поле в деякій точці $(\mathbf{r},t)$ залежить і від неоднорідностей, які оточують цю точку.

Таким чином, для усередненого температурного поля одержано рівняння Дайсона, з якого отримано нелокальне інтегро-диференціальне рівняння теплопровідності. При цьому для дослідження усереднених температурних полів використано техніку діаграм Фейнмана. Подання розв’язку задачі у вигляді сукупності діаграм дозволило перетворювати ряд теорії збурень з використанням топологічних ознак діаграм, які входять у розв’язок. Застосування такої техніки дає можливість виразити ряд Неймана через суму деякої нескінченної підпослідовності цього ж ряду.

Зазначимо, що в подальшому за таким підходом доцільно дослідити кореляції випадкових температурних полів, отримати нелокальне рівняння для функції когерентності, а також вивчити процеси теплопровідності у випадково неоднорідних тілах у рамках теорії бінарних систем.

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – Москва: Наука, 1970. – 426 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1976. – 527 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.
4. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 463 с.
5. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. – Ч. II. Случайные поля. – Москва: Наука, 1978. – 436 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 735 с.
7. *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. – Москва: Мир, 1968. – 382 с.
8. *Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. – Киев: Наук. думка, 1984. – 112 с.
9. *Chaplia Y., Chernukha O.* Physical-mathematical modelling diffusion processes in bodies of random structure using generalized functions and Feynman diagrams // Int. J. Eng. Sci. – 2005. – **43**. – P. 1337–1348.
10. *Lidzba D.* Homogenisation theories applied to porous media mechanics // J. Theor. Appl. Mechanics. – 1998. – **36**, No. 3. – P. 657–679.
11. *Matysiak S. J., Mieszkowski R.* On homogenization of diffusion processes in microperiodic stratified bodies // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1999. – **26**. – P. 539–547.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА

Работа посвящена математическому моделированию процессов теплопроводности в многофазных телах случайно неоднородной структуры. Нестационарная задача теплопроводности сформулирована по закону Фурье для целого тела. Для исследования усредненных температурных полей применена техника диаграмм Фейнмана. Получено уравнение Дайсона и нелокальное уравнение теплопроводности для усредненного по ансамблю конфигураций фаз поля температуры в многофазных случайно неоднородных телах.

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT CONDUCTION PROCESSES IN RANDOMLY NONHOMOGENEOUS BODIES USING FEYNMAN DIAGRAMS

The work is devoted to mathematical modeling of heat conduction processes in multiphase bodies with randomly nonhomogeneous structure. A nonstationary initial-boundary-value problem is formulated on the basis of the Fourier law. The technique of Feynman diagrams is applied for investigating the averaged temperature fields. The Dyson equation is obtained as well as a nonlocal heat conduction equation for a temperature field averaged over the ensemble of phase configurations in multiphase randomly nonhomogenous bodies.

[1] Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2] Ін-т механіки середовища і прикл. інформатики
ун-ту Казиміра Великого в Бидгощі, Бидгощ, Польща

Одержано
13.06.07