УДК 539.3

В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина

РІВНЯННЯ ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА З УРАХУВАННЯМ НЕОБОРОТНОСТІ ЛОКАЛЬНОГО ЗМІЩЕННЯ МАСИ

З використанням основних принципів термодинаміки нерівноважних процесів і механіки суцільного середовища отримано повну систему рівнянь для опису взаємозв'язаних термомеханічних процесів у деформівному твердому тілі з урахуванням необоротності процесу локального зміщення маси. Просторовий ґрадієнт $\nabla\mu'_\pi$ *зведеної величини енергетичної міри впливу зміщення маси на внутрішню енергію подано сумою оборотної і необоротної складових. Це дозволило для визначення вектора* $\boldsymbol{\pi}_m$ *зміщення маси отримати інтегральне співвідношення типу згортки з експоненційним ядром релаксації. При цьому вектор* $\boldsymbol{\pi}_m$ *визначається історією не лише* $\nabla\mu'_\pi$, *а й ґрадієнта температури* ∇T. *Ключові рівняння побудованої моделі записано в лінеаризованому наближенні та сформульовано відповідні крайові умови.*

Вступ. Локальне зміщення маси пов'язують, як правило, з деякою перебудовою структури матеріалу тіла – впорядкуванням молекул чи зміщенням електронів і ядер атомів внаслідок поляризації, відносним зсувом складових підсистем гетерогенного тіла, зміною розташування атомів в околі поверхні при її утворенні тощо. Уперше увагу на процес зміщення маси в термомеханічних процесах звернуто в роботі [2], у якій, зокрема, показано, що врахування локального зміщення маси приводить до нелокальності термодинамічного стану. Надалі такі дослідження розвивалися, здебільшого, стосовно приповерхневих явищ і проблем міцності [3, 4]. У праці [5] локальне зміщення маси враховано при вивченні темомеханічних процесів у в'язкій рідині. З'ясовано, зокрема, що у цьому випадку опис термодинамічного стану рідини потребує введення двох пар додаткових параметрів – наведеної маси й зведеної енергетичної міри впливу зміщення маси на внутрішню енергію системи, а також просторового ґрадієнта цієї енергетичної міри та вектора локального зміщення маси. Показано також, що виключення з теорії параметрів, які характеризують зміщення маси, приводить до просторово нелокальної термомеханіки рідини. Однак в усіх перелічених вище дослідженнях процес локального зміщення маси приймали оборотним. При описі приповерхневої неоднорідності це приводило до миттєвості її утворення.

Метою цієї роботи є врахування необоротності локального зміщення маси при дослідженні взаємозв'язаних термомеханічних процесів у деформівному твердому тілі.

1. Об'єкт дослідження. Розглядаємо ізотропне термопружне тіло, яке займає область (V) евклідового простору та обмежене гладкою поверхнею (Σ). Тіло перебуває під впливом зовнішніх силової і теплової дій. У результаті цього в ньому протікають механічні та теплові процеси, а також відбувається структурне упорядкування, яке проявляється у виникненні ефективного потоку маси $\mathbf{J}_*$ і відповідній зміні внутрішньої енергії.

Базові співвідношення математичної моделі розглядуваного тіла будемо формулювати у змінних Ейлера з орієнтацією на лабораторну систему координат.

2. Рівняння балансу маси. Рівняння балансу маси в інтегральній формі має вигляд

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} \rho\, dV = -\int\limits_{(\Sigma)} \mathbf{J}_* \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma\,, \tag{1}$$

де ρ – густина маси; $\mathbf{J}_*$ – вектор густини потоку маси; $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні (Σ); « $\cdot$ » – символ скалярного добутку.

Приймаємо, що вектор $\mathbf{J}_*$ визначається сумою складової $\mathbf{J}_{mc} = \rho \mathbf{v}_*$ ($\mathbf{v}_*$ – вектор середньої швидкості переміщення частинок тіла) та складової $\mathbf{J}_{ms}$, пов'язаної з упорядкуванням структури фізично малого елемента (частинки) тіла, тобто

$$\mathbf{J}_* = \mathbf{J}_{mc} + \mathbf{J}_{ms}. \tag{2}$$

Якщо ввести вектор $\mathbf{\Pi}_m$ локального зміщення маси

$$\mathbf{\Pi}_m = \int_0^t \mathbf{J}_{ms}\, dt,$$

так що

$$\mathbf{J}_{ms} = \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}, \tag{3}$$

то співвідношення (2) набуде вигляду

$$\mathbf{J}_* = \rho \mathbf{v}_* + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}.$$

Співвідношенням

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left(\rho \mathbf{v}_* + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}\right) \tag{4}$$

означимо вектор $\mathbf{v}$ швидкості центра мас частинок тіла. Тоді рівняння (1) балансу маси у локальній формі набуває стандартного вигляду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{5}$$

де ∇ – оператор Гамільтона. Якщо врахувати подання (4) і ввести вектор

$$\mathbf{J}_m = \rho(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}),$$

то рівняння (5) балансу маси можна записати так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} + \mathbf{J}_m + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}\right) = 0.$$

Введемо величину $\rho_{m\pi}$, яка має розмірність густини маси, і яку аналогічно до наведеного заряду [1] назвемо густиною наведеної маси. Приймаємо, що для довільного тіла скінченних розмірів (область (V)) вектор $\mathbf{\Pi}_m$ локального зміщення маси (який має розмірність густини масового дипольного моменту) і густина $\rho_{m\pi}$ наведеної маси є такими, що [1]

$$\int_{(V)} \mathbf{\Pi}_m\, dV = \int_{(V)} \rho_{m\pi} \mathbf{r}\, dV, \tag{6}$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор.

Інтеграл у правій частині формули (6) не залежить від вибору системи відліку, а тому повинна справджуватися така рівність:

$$\int_{(V)} \rho_{m\pi}\, dV = 0.$$

З формули (6), враховуючи довільність області інтегрування (V), також можна показати [1], що

$$\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m. \tag{7}$$

Якщо співвідношення (7) продиференціювати за часом і врахувати формулу (3), то отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0 \,,$$

яке має форму закону збереження наведеної маси.

3. Рівняння балансу ентропії. Швидкість зміни ентропії елемента тіла визначається конвективною складовою потоку, притоком ентропії ззовні, виникненням ентропії σ_s за одиницю часу та джерелами тепла $\Re$. В інтегральній формі рівняння балансу ентропії є таким [5]:

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)} \rho s \, dV = -\oint_{(\Sigma)} \rho s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma - \oint_{(\Sigma)} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma + \int_{(V)} \sigma_s \, dV + \int_{(V)} \rho \frac{\Re}{T} dV \,, \qquad (8)$$

де s – питома ентропія; $\mathbf{J}_s$ – вектор густини потоку ентропії; T – абсолютна температура.

У локальній формі рівняння (8) має вигляд

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma_s + \rho \frac{\Re}{T} \,, \qquad (9)$$

або

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + T\sigma_s + \rho \Re \,, \qquad (10)$$

де $\mathbf{J}_q$ – вектор густини потоку тепла, пов'язаний з вектором $\mathbf{J}_s$ густини потоку ентропії співвідношенням $\mathbf{J}_q = T\mathbf{J}_s$, а $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ – оператор повної похідної за часом.

4. Рівняння балансу енергії. Приймаємо, що повна енергія системи у довільний момент часу є сумою внутрішньої ρu (u – питома внутрішня енергія) і кінетичної $\rho \mathbf{v}^2/2$ енергій і зміна її відбувається внаслідок конвективного перенесення енергії, роботи внутрішніх поверхневих сил $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}$, потоку тепла $\mathbf{J}_q$, роботи, затраченої на масоперенесення $\mu \mathbf{J}_m$ й «упорядкування» структури тіла $\mu_\pi \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}$, дії масових сил $\mathbf{F}$ і розподілених джерел тепла $\Re$:

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)} \rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) dV = -\oint_{(\Sigma)} \left[\rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{J}_q + \mu \mathbf{J}_m + \mu_\pi \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma + \int_{(V)} (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \rho \Re)\, dV \,. \qquad (11)$$

Тут $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напружень Коші; μ, μ_π – хімічний потенціал і міра зміни питомої внутрішньої енергії системи, спричиненої локальним зміщенням маси.

Враховуючи рівняння балансу маси (5) та ентропії (10), а також те, що $\mathbf{J}_m = -\frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}$, з (11) отримаємо рівняння балансу енергії у локальній формі

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\mathbf{e}}{dt} - \mu'_\pi \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} - \nabla \mu'_\pi \cdot \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} -$$

$$- \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T\sigma_s - \mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{F} \right).$$

Тут $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla)$ − тензор деформації; $\mathbf{u}$ − вектор переміщення; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; «$\otimes$» − символ операції діадного добутку.

Якщо врахувати означення (7) і рівняння балансу маси (5), а також ввести питомі величини $\boldsymbol{\pi}_m = \frac{\boldsymbol{\Pi}_m}{\rho}$, $\rho_m = \frac{\rho_{m\pi}}{\rho}$, то прийдемо до такого рівняння балансу внутрішньої енергії:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\sigma}_* : \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \rho\mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} - \rho \nabla \mu'_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} -$$
$$- \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T\sigma_s - \mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_* - \rho \mathbf{F}_* \right), \tag{12}$$

де

$$\boldsymbol{\sigma}_* = \boldsymbol{\sigma} - \rho(\rho_m \mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla \mu'_\pi)\mathbf{I},$$

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{F} - \rho_m \nabla \mu'_\pi + \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla \otimes \nabla \mu'_\pi,$$

$\mathbf{I}$ − одиничний тензор.

Подамо вектор $\nabla \mu'_\pi$ як суму оборотної $\nabla \mu'^r_\pi$ і необоротної $\nabla \mu'^i_\pi$ складових: $\nabla \mu'_\pi = \nabla \mu'^r_\pi + \nabla \mu'^i_\pi$. Тоді рівняння (12) балансу внутрішньої енергії набуде вигляду

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\sigma}_* : \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \rho\mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} - \rho \nabla \mu'^r_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} -$$
$$- \rho \nabla \mu'^i_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T\sigma_s - \mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_* - \rho \mathbf{F}_* \right). \tag{13}$$

Перейдемо у співвідношенні (13) до питомої узагальненої вільної енергії Гельмгольца $f = u - Ts + \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla \mu'^r_\pi$. Враховуючи інваріантність рівняння (13) відносно просторових трансляцій і приймаючи, що вільна енергія f визначається скалярними T, ρ_m, векторним $\nabla \mu'^r_\pi$ і тензорним $\mathbf{e}$ параметрами, тобто $f = f(T, \mathbf{e}, \rho_m, \nabla \mu'^r_\pi)$, отримаємо таке узагальнене рівняння Ґіббса:

$$df = -s dT + \rho^{-1} \boldsymbol{\sigma}_* : d\mathbf{e} + \mu'_\pi d\rho_m + \boldsymbol{\pi}_m \cdot d\nabla \mu'^r_\pi, \tag{14}$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = -\rho \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} \cdot \frac{\nabla \mu'^i_\pi}{T} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \tag{15}$$

та рівняння балансу імпульсу

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_* + \rho \mathbf{F}_*. \tag{16}$$

Зазначимо, що у простір параметрів стану тепер, окрім температури та тензора деформації, які визначають термодинамічний стан у класичній механіці термопружного твердого тіла, введено два нових параметри: питому густину наведеної маси ρ_m і оборотну складову $\nabla \mu'^r_\pi$ просторового ґрадієнта різниці хімічного потенціалу μ та енергетичної міри μ_π впливу зміщення маси на внутрішню енергію системи, які зумовлені врахуванням локального зміщення маси.

5. Рівняння стану. Враховуючи, що $f = f(T, \mathbf{e}, \rho_m, \nabla \mu'^r_\pi)$, з рівняння Ґіббса (14) отримуємо

$$\left(\frac{df}{dT}+s\right)dT+\left(\frac{df}{d\mathbf{e}}-\rho^{-1}\boldsymbol{\sigma}_*\right):d\mathbf{e}+$$

$$+\left(\frac{df}{d\rho_m}-\mu'_\pi\right)d\rho_m+\left(\frac{df}{d\nabla\mu'^r_\pi}-\boldsymbol{\pi}_m\right)\cdot d\nabla\mu'^r_\pi=0\,. \tag{17}$$

З огляду на незалежність параметрів T, $\mathbf{e}$, ρ_m, $\nabla\mu'^r_\pi$ зі співвідношення (17) одержуємо такі рівняння стану:

$$s=-\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\mathbf{e},\rho_m,\nabla\mu'^r_\pi}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_*=\rho\left.\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}}\right|_{T,\rho_m,\nabla\mu'^r_\pi},$$

$$\mu'_\pi=\left.\frac{\partial f}{\partial\rho_m}\right|_{T,\mathbf{e},\nabla\mu'^r_\pi}, \qquad \boldsymbol{\pi}_m=\left.\frac{\partial f}{\partial(\nabla\mu'^r_\pi)}\right|_{T,\mathbf{e},\rho_m}. \tag{18}$$

Якщо розкласти вільну енергію в ряд за збуреннями параметрів стану відносно вихідного стану, у якому $\boldsymbol{\sigma}_*=0$, $\mathbf{e}=0$, $T=T_0$, $s=s_0$, $\rho_m=0$, $\mu'_\pi=\mu'_{\pi0}$, $\nabla\mu'^r_\pi=0$, $\boldsymbol{\pi}_m=0$, і для малих збурень обмежитися в цьому розвиненні квадратичними членами, то з формул (18) отримаємо лінійні рівняння

$$s=s_0-\left[a_T^s(T-T_0)+\rho_0^{-1}a_{eT}e+a_{\rho T}\rho_m\right],$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*=2a_2^\sigma\mathbf{e}+\left[a_1^\sigma e+a_{eT}(T-T_0)+a_{e\rho}\rho_m\right]\mathbf{I},$$

$$\mu'_\pi=\mu'_{\pi0}+a_\rho^\mu\rho_m+\rho_0^{-1}a_{e\rho}e+a_{\rho T}(T-T_0),$$

$$\boldsymbol{\pi}_m=a_\mu^\pi\nabla\mu'^r_\pi\,. \tag{19}$$

Тут e – кульова складова тензора деформації; a_T^s, a_{eT}, $a_{\rho T}$, $a_{e\rho}$, a_ρ^μ, a_μ^π, a_1^σ, a_2^σ – характеристики матеріалу.

6. Кінетичні співвідношення. Подамо рівняння (15) для виробництва ентропії у вигляді

$$\sigma_s=\sum_{k=1}^{2}\mathbf{j}_k\cdot\mathbf{X}_k\,, \tag{20}$$

де $\mathbf{j}_k$, $\mathbf{X}_k$ – термодинамічні потоки та сили:

$$\mathbf{j}_1=\rho\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}, \qquad \mathbf{X}_1=-\frac{1}{T}\nabla\mu'^i_\pi, \qquad \mathbf{j}_2=\mathbf{J}_q, \qquad \mathbf{X}_2=-\frac{1}{T^2}\nabla T\,. \tag{21}$$

Зі співвідношень (20), (21) у лінійному наближенні маємо такі кінетичні рівняння:

$$\mathbf{j}_1=L_{11}\mathbf{X}_1+L_{12}\mathbf{X}_2, \qquad \mathbf{j}_2=L_{21}\mathbf{X}_1+L_{22}\mathbf{X}_2\,, \tag{22}$$

де L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} – кінетичні коефіцієнти. Згідно з принципом взаємності Онзагера $L_{12}=L_{21}$ [5].

Враховуючи позначення (21), запишемо кінетичні рівняння (22) у вигляді

$$\rho\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}=\lambda_\mu\nabla\mu'^i_\pi+\lambda_{\mu T}\nabla T, \qquad \mathbf{J}_q=\lambda_{T\mu}\nabla\mu'^i_\pi-\lambda_T\nabla T\,. \tag{23}$$

Тут $\lambda_\mu=-\dfrac{L_{11}}{T}$, $\lambda_{\mu T}=-\dfrac{L_{12}}{T^2}$, $\lambda_{T\mu}=-\dfrac{L_{21}}{T}$, а $\lambda_T=\dfrac{L_{22}}{T^2}$ – коефіцієнт теплопровідності.

З останнього рівняння системи (19) і першого рівняння системи (23) за ізотермічних умов отримаємо

$$\frac{\rho}{\lambda_\mu}\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \frac{1}{a_\mu^\pi}\boldsymbol{\pi}_m = \nabla\mu_\pi'^r + \nabla\mu_\pi'^i \tag{24}$$

або

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \frac{1}{\tau_\pi}\boldsymbol{\pi}_m = \frac{\lambda_\mu}{\rho}\nabla\mu'_\pi, \tag{25}$$

де $\tau_\pi = \dfrac{\rho a_\mu^\pi}{\lambda_\mu}$ – час релаксації; $\rho = \rho_0$ з огляду на лінійність наближення.

З рівняння (25) за нульової початкової умови для вектора $\boldsymbol{\pi}_m$ випливає подання

$$\boldsymbol{\pi}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{\lambda_\mu}{\rho}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_\pi}\right)\nabla\mu'_\pi(\mathbf{r}, t')\,dt',$$

яке відображає необоротність локального зміщення маси.

Для неізотермічних умов кінетичні рівняння (23) з урахуванням рівнянь стану (19) можна подати так:

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \frac{1}{\tau_\pi}\boldsymbol{\pi}_m = \frac{\lambda_\mu}{\rho}\left(\nabla\mu'_\pi + \frac{\lambda_{\mu T}}{\lambda_\mu}\nabla T\right),$$

$$\mathbf{J}_q = -\left(\lambda_\lambda + \frac{\lambda_{\mu T}\lambda_{T\mu}}{\lambda_\mu}\right)\nabla T + \rho\frac{\lambda_{T\mu}}{\lambda_\mu}\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}. \tag{26}$$

Перше рівняння системи (26) можна записати в інтегральній формі

$$\boldsymbol{\pi}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{\lambda_\mu}{\rho}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_\pi}\right)\left[\nabla\mu'_\pi(\mathbf{r}, t') + \frac{\lambda_{\mu T}}{\lambda_\mu}\nabla T(\mathbf{r}, t')\right]dt'. \tag{27}$$

Таким чином, у загальному випадку вектор $\boldsymbol{\pi}_m$ локального зміщення маси в актуальний момент часу визначається історією не тільки ґрадієнта величини μ'_π, а й ґрадієнта температури.

7. Ключові рівняння в лінійному наближенні. Рівняння балансу маси (5), ентропії (10) та імпульсу (16), визначальні співвідношення (19) і (26) разом із відомими співвідношеннями Коші складають повну систему рівнянь термомеханіки деформівних твердих тіл за врахування необоротності процесу локального зміщення маси. Запишемо ключові рівняння в лінеаризованому наближенні відносно збурень функцій переміщення $\mathbf{u}$, температури T, зведеної величини енергетичної міри впливу зміщення маси на внутрішню енергію $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}$ щодо вихідного стану, в якому $\mathbf{u} = 0$, $T = T_0$, $\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0}$, $\nabla\mu'_\pi = 0$. Маємо

$$\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(a_1^\sigma + a_2^\sigma - \frac{a_{e\rho}^2}{\rho_0 a_\rho^\mu}\right)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{u} + a_2^\sigma\Delta\mathbf{u} +$$

$$+\left(a_{eT} - \frac{a_{\rho T}a_{e\rho}}{a_\rho^\mu}\right)\nabla T + \frac{a_{e\rho}}{a_\rho^\mu}\nabla\tilde{\mu}'_\pi + \rho_0\mathbf{F}_*, \tag{28}$$

$$-\rho_0\left[a_T^s - \frac{a_{\rho T}^2}{a_\rho^\mu}\right]\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_\lambda}{T_0}\Delta T - \frac{\lambda_{T\mu}}{T_0}\Delta\tilde{\mu}'_\pi +$$

$$
+\left[a_{eT}-\frac{a_{\rho T}a_{e\rho}}{a_{\rho}^{\mu}}\right]\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t}+\rho_0\,\frac{a_{\rho T}}{a_{\rho}^{\mu}}\,\frac{\partial\tilde{\mu}'_{\pi}}{\partial t}+
$$

$$
+\frac{\lambda_{T\mu}}{T_0\tau_{\pi}}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\pi}}\right)\left[\frac{\lambda_{\mu T}}{\lambda_{\mu}}\,\Delta T(t')+\Delta\tilde{\mu}'_{\pi}(t')\right]dt'+\rho_0\,\frac{\Re}{T_0}\,, \tag{29}
$$

$$
\frac{\lambda_{\mu}}{\rho_0}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\pi}}\right)\Delta\tilde{\mu}'_{\pi}(t')\,dt'+\frac{1}{a_{\rho}^{\mu}}\,\tilde{\mu}'_{\pi}=\frac{1}{a_{\rho}^{\mu}}\left(\frac{a_{e\rho}}{\rho_0}\,\nabla\cdot\mathbf{u}+a_{\rho T}T\right)-
$$

$$
-\frac{\lambda_{\mu T}}{\rho_0}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\pi}}\right)\Delta T(t')\,dt'\,. \tag{30}
$$

Тут Δ − оператор Лапласа.

Зауважимо також, що з рівнянь (19), (26), використовуючи співвідношення (7), замість інтегро-диференціального рівняння (30) можна отримати таке диференціальне рівняння:

$$
\frac{\partial\tilde{\mu}'_{\pi}}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\pi}}\,\tilde{\mu}'_{\pi}=-\frac{a_{\rho}^{\mu}}{\rho_0}\left(\lambda_{\mu}\Delta\tilde{\mu}'_{\pi}+\lambda_{\mu T}\Delta T\right)+
$$

$$
+\frac{a_{e\rho}}{\rho_0}\left[\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\pi}}\,\nabla\cdot\mathbf{u}\right]+a_{\rho T}\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\pi}}(T-T_0)\right]. \tag{31}
$$

Таким чином, ключову систему співвідношень моделі термомеханіки деформівних твердих тіл за врахування необоротності локального зміщення маси складають рівняння (28)–(30) або (28), (29), (31). Для забезпечення однозначності розв'язку при постановці крайових задач ці рівняння слід доповнити відповідними початковими, граничними чи контактними умовами, а у разі необхідності − також умовами обмеженості розв'язку.

8. Крайові умови. Якщо на поверхні (Σ) тіла задано вектор переміщення $\mathbf{u}_a$ точок поверхні, то граничну умову запишемо у вигляді

$$
\mathbf{u}=\mathbf{u}_a\,. \tag{32}
$$

Якщо ж на поверхні (Σ) відоме зовнішнє силове навантаження, яке характеризується вектором зусилля $\boldsymbol{\sigma}_a$, то замість умови (32) для прийнятого лінеаризованого наближення із урахуванням рівнянь стану (19) і співвідношень Коші маємо

$$
\left\{a_2^{\sigma}(\nabla\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes\nabla)+\left[\left(a_1^{\sigma}-\rho_0^{-1}\,\frac{a_{e\rho}^2}{a_{\rho}^{\mu}}\right)(\nabla\cdot\mathbf{u})+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\left(a_{eT}-\frac{a_{e\rho}}{a_{\rho}^{\mu}}\,a_{\rho T}\right)(T-T_0)+\frac{a_{e\rho}}{a_{\rho}^{\mu}}\,\tilde{\mu}'_{\pi}\right]\mathbf{I}\right\}\cdot\mathbf{n}=\boldsymbol{\sigma}_a\,.
$$

Граничні умови можуть бути також змішаного типу, коли на частині поверхні (Σ_{σ}) задається вектор зусилля $\boldsymbol{\sigma}_a$, а на частині (Σ_u) − вектор переміщення точок $\mathbf{u}_a$. Тут $(\Sigma_{\sigma})\bigcup(\Sigma_u)=(\Sigma)$.

За граничні умови для процесу теплопровідності приймаємо граничні умови першого, другого чи третього роду [6], коли на поверхні (Σ) задано температуру T_a зовнішнього середовища або нормальну складову J_{qa} теплового потоку, або ж умову конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем температури T_c :

$$
T=T_a\,,
$$

$$\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} = J_{qa} ,$$

$$\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} = H_*(T - T_c) .$$

Тут H_* – коефіцієнт тепловіддачі, а для визначення вектора теплового потоку на основі співвідношень (26) і (27) маємо формулу

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{r},t) = -\lambda_\lambda \nabla T(\mathbf{r},t) + \lambda_{T\mu} \nabla \tilde{\mu}'_\pi(\mathbf{r},t) -$$

$$- \frac{\lambda_{T\mu}}{\tau_\pi} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_\pi}\right) \left[\frac{\lambda_{\mu T}}{\lambda_\mu} \nabla T(\mathbf{r},t') + \nabla \tilde{\mu}'_\pi(\mathbf{r},t') \right] dt' .$$

Приймемо також, що на поверхні (Σ) тіла відоме значення $\mu'_{\pi a}$ функції $\tilde{\mu}'_\pi$, тобто

$$\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_{\pi a} .$$

У разі необхідності записані вище граничні умови слід також доповнити умовами обмеженості розв'язку задачі.

Початкові умови крайової задачі задамо так:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}_0, \qquad T = T_0, \qquad \tilde{\mu}'_\pi = -\mu'_{\pi 0} \qquad \text{при} \qquad t = 0 .$$

Висновки. Таким чином, подання вектора $\nabla\mu'_\pi$ ґрадієнта зведеної енергетичної міри впливу зміщення маси на внутрішню енергію системи сумою оборотної $\nabla\mu'^{r}_\pi$ і необоротної $\nabla\mu'^{i}_\pi$ складових дозволило отримати для вектора $\boldsymbol{\pi}_m$ локального зміщення маси інтегральне визначальне співвідношення типу згортки з експоненційним ядром релаксації. Характерно, що, на відміну від процесу оборотного зміщення маси, за якого вектор локального зміщення маси залежить тільки від ґрадієнта $\nabla\mu'_\pi$, тепер $\boldsymbol{\pi}_m$ визначається історією ґрадієнта не лише величини μ'_π, а й температури.

Ключові системи рівнянь (28)–(30) або (28), (29), (31), які враховують необоротність процесу зміщення маси, за відповідних крайових умов можуть бути використані, зокрема, для дослідження динаміки зміни густини наведеної маси в околі поверхні та вивчення спричинених цією зміною приповерхневих механічних напружень.

1. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – Москва: Наука, 1985. – 400 с.
2. *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
3. *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. АН України. Сер. А. – 1991. – № 11. – С. 47–51.
4. *Грицина О. Р., Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Механотермодифузійні процеси у розтягнутій пластині із врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 1. – С. 123–127.
5. *Грицина О., Кондрат В.* Термомеханічні процеси у в'язкій рідині з урахуванням локального зміщення маси // Фіз.-мат. моделювання та інформ. Технології. – 2006. – Вип. 4. – С. 39–46.
6. *Гроот де С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.
7. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ НЕОБРАТИМОСТИ ЛОКАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ МАССЫ

С использованием подходов термодинамики неравновесных процессов и механики сплошной среды получена полная система уравнений, описывающая взаимосвязанные термомеханические процессы в деформируемом твердом теле с учетом необратимости процесса локального смещения массы. Пространственный градиент $\nabla\mu'_\pi$ *приведенной величины энергетической меры влияния смещения массы на внутреннюю энергию системы записан в виде суммы обратимого и необратимого слагаемых. Вследствие этого для определения вектора* $\boldsymbol{\pi}_m$ *смещения массы получено интегральное соотношение типа свертки с экспоненциальным ядром релаксации. При этом вектор* $\boldsymbol{\pi}_m$ *определяется историей не только* $\nabla\mu'_\pi$*, но и градиента температуры* ∇T*. Ключевые уравнения построенной модели записаны в линеаризированном приближении и сформулированы соответствующие краевые условия.*

EQUATIONS OF THERMOMECHANICS OF DEFORMABLE BODIES TAKING INTO ACCOUNT IRREVERSIBILITY OF LOCAL MASS DISPLACEMENT

Using the basic principles of thermodynamics of nonequilibrium processes and continuum mechanics a complete set of equations for description of coupled thermo-mechanical processes in a deformable body taking into account irreversibility of the process of local mass displacement is obtained. A space gradient $\nabla\mu'_\pi$ *of the reduced energy measure of the effect of mass displacement on internal energy is presented as a sum of the reversible and irreversible components. It allows one to obtain an integral relation of convolution with the exponential kernel of relaxation to determine a mass displacement vector* $\boldsymbol{\pi}_m$*. In this case a vector* $\boldsymbol{\pi}_m$ *is defined not only by the history of* $\nabla\mu'_\pi$*, but also by the temperature gradient* ∇T *history. The key equations of the model are written in a linearized approximation and the corresponding boundary conditions are formulated.*

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.05.07