

ВДАВЛЮВАННЯ НАПІВБЕЗМЕЖНОГО ШТАМПА В ПРУЖНУ СМУГУ ЗА НАЯВНОСТІ ТЕРТЯ І ЗЧЕПЛЕННЯ

Розглянуто задачу про контактну взаємодію напівбезмежного штампа з прямолінійною основою і пружної смуги, одна грань якої жорстко закріплена. Враховано сили тертя в області контакту, які приводять до розділення останньої на зони проковзування і зчеплення. З використанням процедур методу Вінера – Гопфа система інтегральних рівнянь задачі зведена до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Наведено результати обчислень напружень і переміщень як на межі, так і у внутрішніх точках пружної смуги.

При контактній взаємодії пружних тіл з урахуванням сил тертя, які діють в області контакту, остання, як правило, розділяється на зони проковзування і зчеплення [3]. Уперше контакт зі зчепленням і проковзуванням розглянуто Л. А. Галінім [1] в задачі про вдавлювання штампа з прямолінійною основою в пружну півплощину. Ним було отримано наближений розв'язок цієї задачі [1, 2]. Подальші дослідження задачі Галіна виконано в роботах [8–10, 12, 17], в яких застосовано чисельні [17] та аналітичні [8–10, 12] методи. Показано, що зона зчеплення займає значну частину області контакту. Так, при значеннях коефіцієнта тертя 0.25 і коефіцієнта Пуассона 0.3 її відносний розмір дорівнює 0.54. На краях штампа точки межі півплощини проковзують, як і у випадку гладкого контакту, в напрямку до середини штампа.

Аналог задачі Галіна для смуги розглянуто в статтях [5, 6] і монографії [7], де розв'язок отримано асимптотичним методом. У випадку гладкого контакту напівбезмежного штампа з пружною смугою, одна грань якої закріплена, задача розв'язана точно методом Вінера – Гопфа [15]. На відміну від задачі про гладкий контакт штампа з пружною півплощиною [3], розв'язок останньої задачі показує, що точки незакріпленої межі смуги рухаються у напрямку під штамп тільки в малому околі краю штампа, причому у випадку значення коефіцієнта Пуассона $1/3$ цей окіл простягається на відстань 0.1 ширини смуги перед краєм штампа і 0.01 – вглибину основи штампа.

Нижче розглядається контакт зі зчепленням і проковзуванням напівбезмежного штампа з пружною смугою, одна грань якої закріплена. Спираючись на наведені вище результати в задачі про гладкий контакт, слід очікувати, що відношення розміру зони проковзування до ширини смуги буде величиною малою, порядку 0.01. [Робота доповідалась і обговорювалась на Міжнародній науково-технічній конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» у Дніпропетровську, 17–19 жовтня 2007 р.]

Постановка задачі. Нехай напівбезмежний штамп ($x \geq 0$), який має прямолінійну основу, під дією тиску p вдавлюється у верхню грань $y = h$ пружної смуги $|x| < \infty$, $|y| \leq h$, нижня грань $y = -h$ якої жорстко закріплена (рис. 1). З урахуванням сил тертя область контакту $x \geq 0$, $y = h$ розділяється на зону зчеплення $x \geq \ell$ і зону проковзування $0 < x < \ell$, у якій нормальні та дотичні напруження підпорядковані закону тертя Амонтона і розмір ℓ якої заздалегідь невідомий.

Отже, в умовах плоскої деформації маємо змішану задачу теорії пружності для смуги $|x| < \infty$, $|y| \leq h$ з такими крайовими умовами:

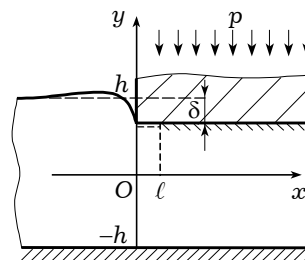


Рис. 1

$$u_y|_{y=h} = -\delta, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$\tau_{yx}|_{y=h} = \mu_0 \sigma_y|_{y=h}, \quad 0 < x < \ell, \quad (2)$$

$$u_x|_{y=h} = 0, \quad x \geq \ell, \quad (3)$$

$$\sigma_y|_{y=h} = 0, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = 0, \quad x < 0, \quad (4)$$

$$u_x|_{y=-h} = 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

де δ – осадка під штапом; μ_0 – коефіцієнт тертя. З умов на нескінченності ($\sigma_y = -p$, $\varepsilon_x = 0$, $x \rightarrow \infty$) осадку δ виражаємо через тиск p таким чином:

$$\frac{1}{2h} \delta = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1-\nu} p, \quad (6)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; G – модуль зсуву.

Система інтегральних рівнянь. Розглянемо основну крайову задачу для смуги, в якій на верхній межі задано напруження:

$$\frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=h} = g_1(x), \quad \frac{1}{2G} \tau_{yx}|_{y=h} = g_2(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (7)$$

а на нижній грані – нульові переміщення (5).

Загальний розв'язок рівнянь рівноваги для смуги знаходимо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за координатою x [14]:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu, & u_y &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu, \\ \frac{1}{2G} \sigma_y &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu, & \frac{1}{2G} \tau_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\mu, y) e^{-i\mu x} d\mu, \\ \mu^2 u(\mu, y) &= \mu A(\mu) \operatorname{ch} \mu y + \mu B(\mu) \operatorname{sh} \mu y + C(\mu) [(3-4\nu) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y] - \\ &\quad - D(\mu) [(3-4\nu) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y], \\ v(\mu, y) &= A(\mu) \operatorname{sh} \mu y + B(\mu) \operatorname{ch} \mu y + C(\mu) y \operatorname{ch} \mu y - D(\mu) y \operatorname{sh} \mu y, \\ \sigma(\mu, y) &= \mu A(\mu) \operatorname{ch} \mu y + \mu B(\mu) \operatorname{sh} \mu y + C(\mu) [(1-2\nu) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y] - \\ &\quad - D(\mu) [(1-2\nu) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y], \\ \mu \tau(\mu, y) &= \mu A(\mu) \operatorname{sh} \mu y + \mu B(\mu) \operatorname{ch} \mu y + C(\mu) [2(1-\nu) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y] - \\ &\quad - D(\mu) [2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y]. \end{aligned} \quad (8)$$

З крайових умов (7), (5) одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \sigma(\mu, h) &= a_1(\mu), & \mu \tau(\mu, h) &= i a_2(\mu), \\ u(\mu, -h) &= 0, & v(\mu, -h) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

для визначення $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$, $D(\mu)$. Праві частини системи рівнянь (9) є трансформантами Фур'є крайових функцій $g_1(x)$, $g_2(x)$ із умов (7):

$$a_1(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) e^{i\mu x} dx, \quad a_2(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) e^{i\mu x} dx. \quad (10)$$

Розв'язок системи рівнянь (9) має вигляд

$$\begin{aligned} \mu A(\mu) \Delta(2\mu h) &= \{2(1-\nu)(3-4\nu) \operatorname{ch} 3\mu h + [(2\mu h)^2 + 2(1-\nu)(3-4\nu)] \operatorname{ch} \mu h + \\ &\quad + 2\mu h [(3-4\nu)(\operatorname{ch} 2\mu h + 1) + 2(1-\nu) \operatorname{sh} \mu h\} a_1(\mu) - \\ &\quad - i \{ (1-2\nu)(3-4\nu) \operatorname{sh} 3\mu h + [(2\mu h)^2 + (1-2\nu)(3-4\nu)] \operatorname{sh} \mu h + \\ &\quad + 2\mu h [(3-4\nu)(\operatorname{ch} 2\mu h + 1) - 2(1-\nu)] \operatorname{ch} \mu h\} a_2(\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu B(\mu)\Delta(2\mu h) &= \{2(1-\nu)(3-4\nu)\text{sh } 3\mu h - [(2\mu h)^2 + 2(1-\nu)(3-4\nu)]\text{sh } \mu h + \\
&+ 2\mu h [(3-4\nu)(\text{ch } 2\mu h - 1) - 2(1-\nu)\text{ch } \mu h]a_1(\mu) - \\
&- i\{(1-2\nu)(3-4\nu)\text{ch } 3\mu h - [(2\mu h)^2 + (1-2\nu)(3-4\nu)]\text{ch } \mu h + \\
&+ 2\mu h[(3-4\nu)(\text{ch } 2\mu h - 1) + 2(1-\nu)]\text{sh } \mu h\}a_2(\mu), \\
C(\mu)\Delta(2\mu h) &= -[(3-4\nu)\text{ch } 3\mu h + \text{ch } \mu h + 4\mu h\text{sh } \mu h]a_1(\mu) + \\
&+ i[(3-4\nu)\text{sh } 3\mu h - \text{sh } \mu h + 4\mu h\text{ch } \mu h]a_2(\mu), \\
D(\mu)\Delta(2\mu h) &= [(3-4\nu)\text{sh } 3\mu h - \text{sh } \mu h - 4\mu h\text{ch } \mu h]a_1(\mu) - \\
&- i[(3-4\nu)\text{ch } 3\mu h + \text{ch } \mu h - 4\mu h\text{sh } \mu h]a_2(\mu), \\
\Delta(2\mu h) &= (3-4\nu)(\text{ch } 4\mu h - 1) + 2(2\mu h)^2 + 8(1-\nu)^2. \tag{11}
\end{aligned}$$

Виконуючи заміну

$$x = 2h\xi, \quad \mu = \frac{1}{2h}\tau, \tag{12}$$

зі співвідношень (8), (11), зокрема, знаходимо

$$\begin{aligned}
u_y|_{y=h} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{K}_{11}(\tau)a_1\left(\frac{\tau}{2h}\right) + \mathcal{K}_{12}(\tau)a_2\left(\frac{\tau}{2h}\right) \right] e^{-i\tau\xi} d\tau, \\
u_x|_{y=h} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{K}_{21}(\tau)a_1\left(\frac{\tau}{2h}\right) + \mathcal{K}_{22}(\tau)a_2\left(\frac{\tau}{2h}\right) \right] e^{-i\tau\xi} d\tau, \quad \mathcal{K}_{mj}(\tau) = \frac{\lambda_{mj}(\tau)}{\tau\Delta(\tau)}, \\
\lambda_{11}(\tau) &= 2(1-\nu)[(3-4\nu)\text{sh } 2\tau - 2\tau], \\
\lambda_{22}(\tau) &= 2(1-\nu)[(3-4\nu)\text{sh } 2\tau + 2\tau], \\
\lambda_{12}(\tau) &= -\lambda_{21}(\tau) = -2i[(3-4\nu)(1-2\nu)\text{sh}^2\tau - \tau^2], \\
\Delta(\tau) &= (3-4\nu)(\text{ch } 2\tau - 1) + 2\tau^2 + 8(1-\nu)^2. \tag{13}
\end{aligned}$$

Введемо невідомі функції контактних напружень у зонах проковзування і зчеплення

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{2G}\sigma_y|_{y=h}, \quad 0 < x < \ell, \\
q_1(x) &= \frac{1}{2G}\sigma_y|_{y=h}, \quad q_2(x) = \frac{1}{2G}\tau_{yx}|_{y=h}, \quad \ell \leq x < \infty. \tag{14}
\end{aligned}$$

Тоді побудований розв'язок (8)–(13) основної крайової задачі (7), (5), у якому

$$g_1(x) = \begin{cases} q(x), & 0 < x < \ell, \\ q_1(x), & \ell \leq x < \infty, \\ 0, & -\infty < x < 0, \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} \mu_0 q(x), & 0 < x < \ell, \\ q_2(x), & \ell \leq x < \infty, \\ 0, & -\infty < x < 0, \end{cases} \tag{15}$$

використаємо як подання розв'язку розглядуваної контактної задачі (1)–(5). При цьому крайові умови (2), (4), (5) будуть виконані.

Подання (13) підставимо у крайові умови (1), (3). Відносно нових невідомих функцій

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi) &= q(2h\xi), \quad 0 < \xi < a, \quad a = \frac{1}{2h}\ell, \\
\psi_1(\xi) &= \frac{1}{2G}p + q_1(2h\xi), \quad \psi_2(\xi) = q_2(2h\xi), \quad a \leq \xi < \infty, \tag{16}
\end{aligned}$$

отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\int_0^a \mathbf{k}_1(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta + \int_a^\infty [\mathbf{k}_{11}(\xi - \eta)\psi_1(\eta) + \mathbf{k}_{12}(\xi - \eta)\psi_2(\eta)] d\eta = f_1(\xi), \tag{16}$$

$$0 \leq \xi < \infty,$$

$$\int_0^a \mathbf{k}_2(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_a^\infty [\mathbf{k}_{21}(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + \mathbf{k}_{22}(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta = f_2(\xi),$$

$$a \leq \xi < \infty, \quad (17)$$

$$\mathbf{k}_m(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}_m(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau,$$

$$\mathcal{K}_m(\tau) = \mathcal{K}_{m1}(\tau) + \mu_0 \mathcal{K}_{m2}(\tau),$$

$$\mathbf{k}_{mj}(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}_{mj}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau,$$

$$f_m(\xi) = -\frac{p}{2G} \left(\delta_{1m} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{K}_{m1}(\tau)}{\tau} e^{i\tau(a-\xi)} d\tau \right), \quad m, j = 1, 2,$$

де δ_{1m} – символ Кронекера.

Розв'язування системи інтегральних рівнянь. Для зведення системи інтегральних рівнянь (17) до нескінченної системи алгебричних рівнянь скористаємось підходом роботи [13].

Розповсюдимо інтегральні рівняння (17) на всю числову вісь за умови, що $\varphi(\eta) = 0$, якщо $\eta < 0$ та $\eta > a$, і $\psi_1(\eta) = 0$, $\psi_2(\eta) = 0$, якщо $\eta < a$, і застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_1(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Psi_2^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_2(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi_1^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \left\{ \int_0^a \mathbf{k}_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_a^\infty [\mathbf{k}_{11}(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + \mathbf{k}_{12}(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta \right\},$$

$$\Psi_2^-(z) = \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{iz\xi} d\xi \left\{ \int_0^a \mathbf{k}_2(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_a^\infty [\mathbf{k}_{21}(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + \mathbf{k}_{22}(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta \right\}, \quad (18)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$) комплексної площини. Зокрема, $\Phi^\pm(z)$ є цілими функціями. Застосовуючи теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, отримуємо систему функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [11]

$$\mathcal{K}_1(z) \Phi^+(z) + e^{iza} [\mathcal{K}_{11}(z) \Psi_1^+(z) + \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_2^+(z)] - \Psi_1^-(z) = F_1^+(z),$$

$$\mathcal{K}_2(z) \Phi^+(z) + e^{iza} [\mathcal{K}_{21}(z) \Psi_1^+(z) + \mathcal{K}_{22}(z) \Psi_2^+(z)] - \Psi_2^-(z) = e^{iza} F_2^+(z),$$

$$\Phi^+(z) = e^{iza} \Phi^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \quad (19)$$

Праві частини перетворюються за теорією лишків до вигляду

$$F_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi = F_1(z) - \bar{p} e^{iza} \frac{1}{iz} \mathcal{K}_{11}(z),$$

$$F_1(z) = \bar{p} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{iz} - \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_{11}(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} \frac{e^{-s_k a}}{s_k + iz} \right),$$

$$F_2^+(z) = \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty f_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \bar{p} \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_{21}(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} \frac{1}{s_k - iz}, \quad \bar{p} = \frac{p}{2G\sqrt{2\pi}}, \quad (20)$$

де s_k , $k = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\Delta(is) = 0$ з півплощини $\text{Re } s > 0$.

Введемо допоміжну невідому функцію

$$\Psi^+(z) = -\mu_0 \Psi_1^+(z) + \Psi_2^+(z). \quad (21)$$

Виключивши з перших двох рівнянь системи (19) функцію $\Phi^+(z)$, отримаємо функціональне рівняння

$$\mathcal{K}(z)\Psi^+(z) + e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} \Psi_1^-(z) - \Psi_2^-(z) = -e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} F_1^+(z) + F_2^+(z), \quad (22)$$

де

$$\mathcal{K}(z) = \frac{\mathcal{K}_{11}(z)\mathcal{K}_{22}(z) - \mathcal{K}_{21}(z)\mathcal{K}_{12}(z)}{\mathcal{K}_1(z)} = \frac{1}{z} \frac{\lambda(z)}{\lambda_1(z)},$$

$$\lambda(z) = (3 - 4\nu)^2 (\text{ch } 2z - 1) - 2z^2. \quad (23)$$

Перейдемо до системи функціональних рівнянь, яка складається з першого з рівнянь (19) і рівняння (22). Методом Вінера – Гопфа [11] зведемо цю систему до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Факторизуємо коефіцієнти $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}(z)$, тобто подамо їх у вигляді

$$\mathcal{K}_1(z) = \alpha \mathcal{K}_1^+(z) \mathcal{K}_1^-(z), \quad \alpha = \mathcal{K}_1(0) = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu},$$

$$\mathcal{K}(z) = 2\mathcal{K}^+(z) \mathcal{K}^-(z), \quad (24)$$

де $\mathcal{K}_1^\pm(z)$, $\mathcal{K}^\pm(z)$ – функції, які не перетворюються в нуль і аналітичні в півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ відповідно. Факторизацію коефіцієнтів $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}(z)$ проводимо у вигляді нескінченних добутків:

$$\mathcal{K}_1^+(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}_1^-(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{s_n}\right)^{-1},$$

$$\mathcal{K}^+(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}^-(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right)^{-1}. \quad (25)$$

Тут ζ_n , ζ'_n , $n = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\lambda_1(is) = 0$ з півплощин $\text{Re } s > 0$, $\text{Re } s < 0$ відповідно; τ_n , $n = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\lambda(is) = 0$ з півплощини $\text{Re } s > 0$. Всі ці корені розподілені симетрично відносно дійсної осі.

Після факторизації коефіцієнтів систему функціональних рівнянь запишемо у вигляді

$$\alpha \mathcal{K}_1^+(z) \Phi^+(z) + \frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1^-(z)} \left[\mathcal{K}_{11}(z) \left(\Psi_1^+(z) + \frac{\bar{p}}{iz} \right) + \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_2^+(z) \right] - \alpha \frac{\bar{p}}{iz} -$$

$$- \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} = \frac{F_1(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} - \alpha \frac{\bar{p}}{iz},$$

$$2\mathcal{K}^+(z) \Psi^+(z) - 2\mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} (\mathcal{K}^+(z) - 1) + e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} \frac{\Psi_1^-(z) + F_1(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - 2\mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} -$$

$$- \frac{\Psi_2^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = \left(\bar{p} \frac{\mathcal{K}_{21}(z)}{iz} + F_2^+(z) \right) \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)}, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \quad (26)$$

Другі складові рівнянь (26) факторизуємо у різницю функцій, аналітичних у півплощинах $\text{Im } z > c^+$, $\text{Im } z < c^-$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1^-(z)} \left[\mathcal{K}_{11}(z) \left(\Psi_1^+(z) + \frac{\bar{p}}{iz} \right) + \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_2^+(z) \right] - \alpha \frac{\bar{p}}{iz} &= \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \\ e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} \frac{\Psi_1^-(z) + F_1(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - 2\mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} &= \chi^+(z) - \chi^-(z). \end{aligned} \quad (27)$$

Останні функції факторизації визначимо, подавши їх у вигляді інтегралів типу Коші вздовж дійсної осі. Перетворюючи інтеграли у ряди за лишками підінтегральної функції, знайдемо

$$\begin{aligned} \chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k + iz} \left(\Psi^+(i\zeta_k) + \mu_0 \frac{\bar{p}}{\zeta_k} \right) e^{-\zeta_k a}, \quad \alpha_k^+ = \frac{\alpha \lambda_{12}(i\zeta_k)}{i\lambda_1'(i\zeta_k)} \mathcal{K}_1^+(i\zeta_k), \\ \chi^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k'(\zeta_k' + iz)} \left(\Psi_1^-(i\zeta_k') + F_1(i\zeta_k') \right) e^{\zeta_k' a}, \quad \alpha_k^- = \frac{i\zeta_k' \lambda_2(i\zeta_k')}{\lambda_1'(i\zeta_k') \mathcal{K}^-(i\zeta_k')}. \end{aligned} \quad (28)$$

Праві частини системи рівнянь (26) є функціями, аналітичними у нижній півплощині:

$$\frac{F_1(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} - \alpha \frac{\bar{p}}{iz} = -f_1^-(z), \quad \left(\bar{p} \frac{\mathcal{K}_{21}(z)}{iz} + F_2^+(z) \right) \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} = -f^-(z). \quad (29)$$

Виконані факторизації дають змогу віднести до лівої частини функціональних рівнянь функції, аналітичні у верхній півплощині, а до правої частини – у нижній, тобто подати функціональні рівняння (26) у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{K}_1^+(z) \Phi^+(z) + \chi_1^+(z) &= \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} + \chi_1^-(z) - f_1^-(z), \\ 2\mathcal{K}^+(z) \Psi^+(z) - 2\mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} (\mathcal{K}^+(z) - 1) + \chi^+(z) &= \frac{\Psi_2^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} + \chi^-(z) - f^-(z). \end{aligned} \quad (30)$$

Для кожного з рівнянь (30) ліва та права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і представляють собою довільну цілу функцію. Для визначення цих функцій розглянемо їх поведінку на нескінченності згідно з умовами задачі.

Використовуючи асимптотичну поведінку коренів рівнянь $\lambda_1(is) = 0$, $\Delta(is) = 0$, $\lambda(is) = 0$ з першого і другого квадрантів

$$\begin{aligned} \zeta_n^{(0)} &= \pi \left(n + \frac{1}{4} \right) + i \ln(\mu n) + o(1), \quad \zeta_n'^{(0)} = -\pi \left(n - \frac{1}{4} \right) + i \ln(\mu n) + o(1), \\ s_n^{(0)} &= \pi n + i \ln \frac{2\pi n}{\sqrt{3-4\nu}} + o(1), \quad \tau_n^{(0)} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + i \ln \frac{2\pi n}{3-4\nu} + o(1), \\ & n \rightarrow \infty, \\ \mu &= 2\pi \sqrt{\mu_0 \frac{1}{(3-4\nu)[2(1-\nu) + i\mu_0(1-2\nu)]}}, \end{aligned} \quad (31)$$

для двох із нескінченних добутків (25) будемо мати наступні асимптотичні оцінки [4]:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^+(z) &\sim A_1 (-iz)^{\rho-1}, \quad \mathcal{K}^+(z) \sim A (-iz)^{-\rho}, \quad |z| \rightarrow \infty, \\ \rho &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0(1-2\nu)}{2(1-\nu)}, \quad 1/2 < \rho < 1, \\ A_1 &= \pi^{1-\rho} e^{C(\rho-1)} s_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n+1}}{-\zeta_n'} e^{\frac{1-\rho}{2[(n+1)/2]}}, \\ A &= \pi^\rho e^{-C\rho} \frac{1}{\tau_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\zeta_n'}{\tau_{n+1}} e^{\frac{\rho}{2[(n+1)/2]}}, \end{aligned} \quad (32)$$

де C – стала Ейлера – Маскероні. Крім того, функції $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$, $\chi_1^+(z)$,

$\chi^+(z)$ зникають на нескінченності. Тому для лівих частин рівнянь (30) маємо оцінки

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{K}_1^+(z) \Phi^+(z) + \chi_1^+(z) &= o((-iz)^{\rho-1}), \\ 2\mathcal{K}^+(z) \Psi^+(z) - 2\mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} (\mathcal{K}^+(z) - 1) + \chi^+(z) &= o((-iz)^{-\rho}), \quad |z| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (33)$$

З оцінок (33) випливає, що обидві частини кожного з рівнянь (30) тожньо дорівнюють нулеві. Отже, знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= -\frac{\chi_1^+(z)}{\alpha \mathcal{K}_1^+(z)}, \\ \Psi_1^-(z) &= \mathcal{K}_1^-(z) \left(\alpha \frac{\bar{p}}{iz} - \chi_1^-(z) \right) - F_1(z), \\ \Psi^+(z) &= \mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} - \frac{1}{2\mathcal{K}^+(z)} \left(2\mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} + \chi^+(z) \right), \\ \Psi_2^-(z) &= \mathcal{K}^-(z) [f^-(z) - \chi^-(z)]. \end{aligned} \quad (34)$$

За лемою Ватсона [16] із поведінки функції $\Psi^+(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ випливає, що лінійна комбінація контактних напружень $\tau_{yx} - \mu_0 \sigma_y$ необмежена на краю зони зчеплення $x \rightarrow \ell + 0$, $y = h$. Вимагаючи обмеженості напружень у точці $x = \ell$, $y = h$, необхідно поставити умову

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} iz \chi^+(z) = -2\mu_0 \bar{p}. \quad (35)$$

За умови (35) вираз для функції $\Psi^+(z)$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} \Psi^+(z) &= \mu_0 \frac{\bar{p}}{iz} + \frac{\tilde{\chi}^+(z)}{2iz\mathcal{K}^+(z)}, \\ \tilde{\chi}^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k' + iz} (\Psi_1^-(i\zeta_k') + F_1(i\zeta_k')) e^{\zeta_k' a}. \end{aligned} \quad (36)$$

Вирази (34), (36) для функцій $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$, $\Psi_{1,2}^-(z)$ з урахуванням співвідношень (28) містять невідомі значення $\Psi^+(i\zeta_k)$, $\Psi_1^-(i\zeta_k')$, $k = 1, 2, \dots$. Для визначення вказаних значень у першій з рівностей (36) покладемо $z = i\zeta_n$, а в другій з рівностей (34) покладемо $z = i\zeta_n'$, $n = 1, 2, \dots$. Відносно невідомих

$$z_k^+ = \frac{1}{p} \Psi^+(i\zeta_k) + \frac{\mu_0}{\zeta_k}, \quad z_k^- = \frac{1}{p} (\Psi_1^-(i\zeta_k') + F_1(i\zeta_k')), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} z_n^+ + \frac{1}{2\zeta_n \mathcal{K}^+(i\zeta_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k' - \zeta_n} z_k^- e^{\zeta_k' a} &= 0, \\ z_n^- + \mathcal{K}_1^-(i\zeta_n') \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k - \zeta_n'} z_k^+ e^{-\zeta_k a} &= -\frac{\alpha}{\zeta_n'} \mathcal{K}_1^-(i\zeta_n'), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (38)$$

Додаткову умову (35) для цієї системи з урахуванням виразу для $\chi^+(z)$ із (28) і позначень (37) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k'} z_k^- e^{\zeta_k' a} = -2\mu_0. \quad (39)$$

Регулярна нескінченна система алгебричних рівнянь (38) має експоненціально зникаючі за k коефіцієнти та відноситься до типу Пуанкаре – Ко-

ха. Тому її розв'язок може бути ефективно знайдений методом редукції. Додаткова умова (39) служить для визначення відносного розміру зони проковзування $a = \ell/(2h)$.

Контактні напруження і переміщення точок межі смуги. Напруження (14) в області контакту знаходимо оберненим перетворенням Фур'є рівностей (18) для функцій $\Phi^+(z)$, $\Psi_1^+(z)$, $\Psi_2^+(z)$. Функція $\Phi^+(z)$ визначається першим виразом (34). Якщо перше з рівнянь (19) з урахуванням (21) і третього з рівнянь (19) переписати у вигляді

$$\Psi_1^+(z) + \Phi^-(z) = -\frac{1}{\lambda_1(z)} \left(\lambda_{12}(z)\Psi^+(z) + \bar{p} \frac{\lambda_{11}(z)}{iz} \right) + e^{-iza} \frac{\Psi_1^-(z) + F_1(z)}{\mathcal{K}_1(z)} \quad (40)$$

і праву частину останнього рівняння факторизувати у різницю аналітичних функцій, то звідси знайдемо

$$\Psi_1^+(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} \frac{\tilde{\chi}^+(-i\tau_k)\mathcal{K}^-(-i\tau_k)}{\tau_k - iz}. \quad (41)$$

Функцію $\Psi_2^+(z)$ на підставі (21) виразимо як $\Psi_2^+(z) = \Psi^+(z) + \mu_0\Psi_1^+(z)$, де функція $\Psi^+(z)$ визначена в (36). Перетворюючи відповідні інтеграли Фур'є у ряди за теорією лишків, отримуємо такі вирази для контактних напружень у зонах проковзування і зчеплення ($\xi = x/(2h)$):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{p} \Big|_{y=h} &= -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta'_k \Delta(i\zeta'_k)}{\lambda'_1(i\zeta'_k)} z_k^- e^{\zeta'_k \xi} + \frac{\lambda_{12}(i\zeta_k)}{i\lambda'_1(i\zeta_k)} z_k^+ e^{-\zeta_k(a-\xi)} \right), \quad 0 < x < \ell, \\ \frac{\sigma_y}{p} \Big|_{y=h} &= -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} \mathcal{K}^-(-i\tau_k) e^{-\tau_k(\xi-a)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^-}{\zeta'_m + \tau_k} z_m^- e^{\zeta'_m a}, \\ \frac{\tau_{yx}}{p} \Big|_{y=h} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{11}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} \mathcal{K}^-(-i\tau_k) e^{-\tau_k(\xi-a)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^-}{\zeta'_m + \tau_k} z_m^- e^{\zeta'_m a}, \end{aligned} \quad \ell \leq x < \infty. \quad (42)$$

Застосовуючи лему Ватсона [16] до інтегралів (18), отримаємо поведінку напружень на краю області контакту та в точці переходу з зони зчеплення у зону проковзування:

$$\begin{aligned} \sigma_y \Big|_{y=h} &\sim A_1^* \left(\frac{x}{2h} \right)^{\rho-1}, \quad x \rightarrow +0, \\ \sigma_y \Big|_{y=h} &= \sigma_y \Big|_{y=h, x=\ell} + O(x-\ell), \quad x \rightarrow \ell \pm 0, \\ \tau_{yx} \Big|_{y=h} &= \mu_0 \sigma_y \Big|_{y=h, x=\ell} + A^* \left(\frac{x-\ell}{2h} \right)^{1-\rho} + O(x-\ell), \quad x \rightarrow \ell + 0, \\ A_1^* &= -\frac{p}{A_1 \Gamma(\rho)} \left(1 - \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^+ z_k^+ e^{-\zeta_k a} \right), \\ A^* &= \frac{p}{2A \Gamma(2-\rho)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^- z_k^- e^{\zeta_k a}. \end{aligned} \quad (43)$$

На краю області контакту напруження необмежені. При підході до краю зони зчеплення дотичні напруження, на відміну від нормальних напружень, змінюються з необмеженим градієнтом.

Аналогічно до рівнянь (17) отримаємо вирази для переміщень у точках верхньої межі смуги. Перетворюючи ці вирази до інтегралів Фур'є, які містять функції $\Phi^+(z)$, $\Psi_1^+(z)$, $\Psi_2^+(z)$, і обчислюючи останні за теорією лишків, знаходимо

$$\begin{aligned}
\frac{u_y}{\delta} \Big|_{y=h} &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{s_k \Delta'(is_k) \mathcal{K}_1^+(is_k)} \left(\frac{1}{s_k} + \frac{1}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^+}{\zeta_m - s_k} z_m^+ e^{-\zeta_m a} \right) e^{s_k \xi}, \\
&\hspace{15em} \alpha < 0, \\
\frac{u_x}{\delta} \Big|_{y=h} &= -\frac{2\mu_0}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_2(i\zeta'_k)}{i\lambda'_1(i\zeta'_k)} z_k^- e^{\zeta'_k \xi} + \frac{\lambda(i\zeta_k)}{\zeta_k \lambda'_1(i\zeta_k)} z_k^+ e^{-\zeta_k(a-\xi)} \right), \\
&\hspace{15em} 0 \leq \alpha < \ell, \\
\frac{u_x}{\delta} \Big|_{y=h} &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2(is_k)}{s_k \Delta'(is_k) \mathcal{K}_1^+(is_k)} \left(\frac{1}{s_k} + \frac{1}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^+}{\zeta_m - s_k} z_m^+ e^{-\zeta_m a} \right) e^{s_k \xi}, \\
&\hspace{15em} \alpha < 0. \tag{44}
\end{aligned}$$

Переміщення і напруження всередині смуги. Повернувшись до подань (8), (11), знайдемо комплексну комбінацію переміщень і напружень у довільній точці смуги:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta}(u_y + iu_x) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) + \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_1(\tau, \zeta)}{\tau \Delta(\tau)} e^{-i\tau \xi} d\tau, \\
\frac{1}{p}(\sigma_y + i\tau_{yx}) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_2(\tau, \zeta)}{\Delta(\tau)} e^{-i\tau \xi} d\tau, \quad \zeta = \frac{y}{2h}, \quad -h \leq y \leq h, \tag{45} \\
M_j(\tau, \zeta) &= \frac{\alpha_{j1}(\tau, \zeta) + i\mu_0 \alpha_{j2}(\tau, \zeta)}{\mathcal{K}_1^+(\tau)} \left(\frac{1}{i\tau} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k + i\tau} z_k^+ e^{-\zeta_k a} \right) - \\
&\quad - \frac{\lambda_{12}(\tau) \alpha_{j1}(\tau, \zeta) - i\lambda_{11}(\tau) \alpha_{j2}(\tau, \zeta)}{2i\tau \lambda_1(\tau) \mathcal{K}^+(\tau)} e^{i\tau a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k + i\tau} z_k^- e^{\zeta'_k a}, \quad j = 1, 2, \\
\alpha_{11}(\tau, \zeta) &= \frac{1}{2} [\gamma_1^+(\tau, \zeta) - (3 - 4\nu) \gamma_2^+(\tau, \zeta)], \\
\alpha_{12}(\tau, \zeta) &= \frac{1}{2} [\gamma_1^-(\tau, \zeta) - (3 - 4\nu) \gamma_2^-(\tau, \zeta)], \\
\alpha_{21}(\tau, \zeta) &= \frac{1}{2} [\gamma_1^+(\tau, \zeta) + \gamma_2^+(\tau, \zeta)], \quad \alpha_{22}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} [\gamma_1^-(\tau, \zeta) + \gamma_2^-(\tau, \zeta)], \\
\gamma_1^{\pm}(\tau, \zeta) &= (3 - 4\nu) [1 \pm \tau(1 - 2\zeta)] e^{(3/2+\zeta)\tau} + \\
&\quad + [(3 - 4\nu)^2 \mp (1 + 2\zeta)\tau(1 \mp 2\tau)] e^{(\zeta-1/2)\tau}, \\
\gamma_2^{\pm}(\tau, \zeta) &= (3 - 4\nu) e^{-(3/2+\zeta)\tau} + (1 \pm 2\tau) e^{(1/2-\zeta)\tau}.
\end{aligned}$$

Якщо $y = h$, то інтеграли в (45) збігаються повільно зі степеневою швидкістю, і в цьому разі переміщення і напруження зручніше обчислювати за формулами (44) і (42). Якщо ж $-h \leq y < h$, вказані інтеграли збігаються експоненціально.

Випадок гладкого контакту. Якщо тертя відсутнє ($\mu_0 = 0$), то $\ell = \infty$, $\psi_1(\xi) \equiv 0$, $\psi_2(\xi) \equiv 0$, і задача зводиться до функціонального рівняння

$$\mathcal{K}_1(z) \Phi^+(z) - \Psi_1^-(z) = F^+(z), \quad F^+(z) = -\bar{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k) (s_k - iz)}, \tag{46}$$

розв'язком якого є функція

$$\Phi^+(z) = \frac{f_1^+(z)}{\alpha \mathcal{K}_1^+(z)}, \quad f_1^+(z) = -\bar{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k - iz}, \quad \alpha_k = \frac{\lambda_1(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k) \mathcal{K}_1^+(is_k)}. \tag{47}$$

Контактні напруження обчислюються за формулою

$$\frac{\sigma_y}{p} \Big|_{y=h} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k \Delta(i\zeta_k)}{\lambda'_1(i\zeta_k)} \mathcal{K}_1^+(i\zeta_k) e^{-\zeta_k \xi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_m - \zeta_k}, \quad \alpha > 0. \tag{48}$$

Переміщення в точках верхньої межі смуги визначаються рівностями

$$\begin{aligned} \frac{u_y}{\delta} \Big|_{y=h} &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{s_k \Delta'(is_k)} \left(\frac{1}{s_k} + \frac{1}{\alpha \mathcal{K}_1^+(is_k)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{s_m + s_k} \right) e^{s_k \xi}, \quad x < 0, \\ \frac{u_x}{\delta} \Big|_{y=h} &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2(i\zeta_k)}{i\lambda_1'(i\zeta_k)} \mathcal{K}_1^+(i\zeta_k) e^{-\zeta_k \xi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{s_m - \zeta_k}, \quad x \geq 0, \\ \frac{u_x}{\delta} \Big|_{y=h} &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2(is_k)}{s_k \Delta'(is_k)} \left(\frac{1}{s_k} + \frac{1}{\alpha \mathcal{K}_1^+(is_k)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{s_m + s_k} \right) e^{s_k \xi}, \quad x < 0, \\ &\xi = \frac{x}{2h}. \end{aligned} \quad (49)$$

Переміщення і напруження всередині смуги визначаються формулами (45), у яких

$$M_j(\tau, \zeta) = \alpha_{j1}(\tau, \zeta) \left(\frac{1}{i\tau} - \frac{1}{\alpha \mathcal{K}_1^+(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k - i\tau} \right), \quad j = 1, 2. \quad (50)$$

Результати обчислень. Обчислення, які проводились при значеннях коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$ і коефіцієнта тертя $\mu_0 = 1/4$, показали, що відносний розмір зони проковзування $a = \ell/(2h)$, як і очікувалось за постановкою задачі, є величиною надто малою і складає 0.014. На рис. 2–5 показано розподіл напружень, переміщень і деформацій (суцільні криві) як на верхній межі, так і всередині смуги. Для порівняння пунктирними лініями зображено відповідні залежності у випадку гладкого контакту.

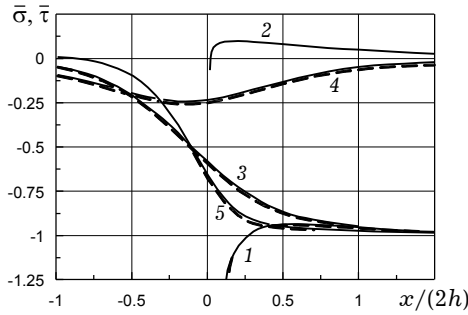


Рис. 2

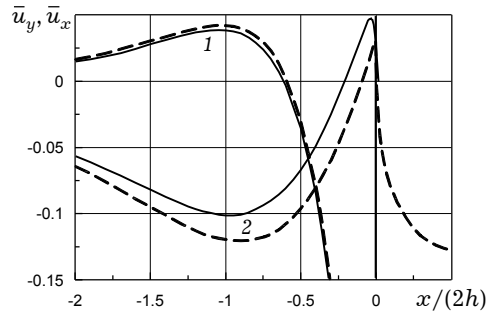


Рис. 3

На рис. 2 криві 1 і 2 відповідають безрозмірним нормальним $\bar{\sigma} = \sigma_y/p$ і дотичним $\bar{\tau} = \tau_{yx}/p$ напруженням в області контакту ($y = h$), криві 3 і 4 – величинам $\bar{\sigma}$ і $\bar{\tau}$ на закріпленій нижній межі смуги ($y = -h$), криві 5 – величині $\bar{\sigma}$ на середній лінії смуги ($y = 0$). Незважаючи на необмеженість нормальних напружень на краю області контакту (криві 1), їх величина швидко спадає вглибину смуги і під кромкою штампа на нижній грані смуги складає $0.6p$ (криві 3). Наявність тертя майже не впливає на розподіл нормальних контактних напружень (криві 1), але ж викликає появу дотичних контактних напружень (крива 2), які змінюють знак у точці переходу із зони зчеплення в зону проковзування.

На рис. 3 криві 1 і 2 показують розподіл безрозмірних нормальних $\bar{u}_y = u_y/\delta$ і тангенціальних $\bar{u}_x = u_x/\delta$ переміщень верхньої межі смуги ($y = h$). Криві 1 відтворюють форму деформованої вільної частини межі смуги. На відстані від краю штампа, яка приблизно дорівнює ширині смуги, верхня межа припіднімається, утворюючи пагорбок висотою 0.039δ за наявності тертя і 0.043δ – при гладкому контакті. Тангенціальні переміщен-

ня (криві 2) додатні в околі краю штамп. Поза цим околom усі точки верхньої межі зміщуються в напрямку з-під штамп, якщо виключається вплив тертя (пунктирна лінія). За наявності тертя (суцільна крива 2) поблизу від штамп та в малій зоні проковзування точки межі рухаються під штамп, в зоні зчеплення тангенціальні переміщення відсутні, а на віддаленні від краю штамп точки межі зміщуються від штамп.

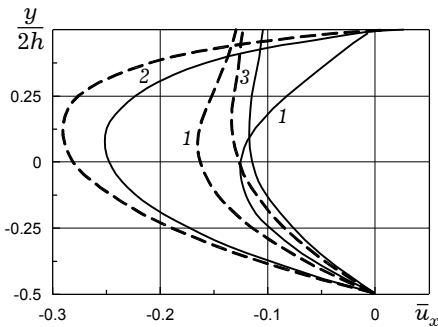


Рис. 4

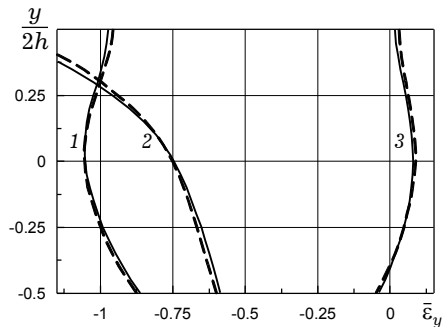


Рис. 5

На рис. 4 зображено розподіл безрозмірних тангенціальних переміщень $\bar{u}_x = u_x/\delta$ уздовж ширини смуги під штампом на відстані h від його краю ($x = h$, криві 1), під краєм штамп ($x = 0$, криві 2) та під пагорбком ($x = -2h$, криві 3). За винятком малого околу краю штамп, в якому точки пружної смуги зміщуються під штамп, спостерігається видавлювання матеріалу з-під штамп, яке певним чином стримується наявністю тертя і зчеплення.

Рис. 5 відтворює розподіл нормалізованих пошдовжніх вертикальних деформацій $\bar{\epsilon}_y = (2h/\delta)\epsilon_y$ уздовж ширини смуги під штампом ($x = h$, криві 1), під краєм штамп ($x = 0$, криві 2) та під пагорбком ($x = -2h$, криві 3). Якщо на значній віддалі від краю під штампом вказаний розподіл рівномірний ($\bar{\epsilon}_y = -1$, $x \rightarrow \infty$), то на відстані h від краю він стає нерівномірним (криві 1), а під краєм – необмеженим на кромці штамп (криві 2). У перерізі $x = -2h$ (криві 3) деформації ϵ_y стають додатними, що відповідає поперечному розтягу смуги під пагорбком.

Висновки. Одержаний розв'язок і наведені результати обчислень показують, що при вдавлюванні напівобмеженого штамп в пружну смугу з однією закріпленою гранню контактуючі поверхні при наявності тертя зчеплюються майже по всій області контакту. Зона проковзування, яка виникає на краю штамп, має надзвичайно малий розмір. Але цією зоною нехтувати не можна, оскільки при повному зчепленні отримаємо фізично нереальний розв'язок з осциляціями напружень і переміщень на краю області контакту (ефект Абрамова). Разом з тим, у випадку повного зчеплення задача суттєво ускладнюється необхідністю факторизації матриці-функції. Остання проблема на сьогодні не розв'язана. З іншого боку, нехтування тертям дозволяє отримати з достатньою точністю розподіл нормальних контактних напружень, але не дозволяє визначити дотичні напруження в області контакту та отримати вірні значення для переміщень.

1. Галин Л. А. Вдавливание штамп при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. – 1945. – 9, № 5. – С. 413–424.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1953. – 264 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
4. Зражевський Г. М., Острик В. І. Асимптотика канонічних добутків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 69–77.

5. Коблик С. Г., Маневич Л. И. Контактная задача для ортотропной полосы при наличии в области контакта участков сцепления и скольжения // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1976. – Вып. 20. – С. 106–110.
6. Маневич Л. И., Павленко А. В. К решению контактных задач теории упругости для ортотропной полосы с учетом сил трения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 6. – С. 72–80.
7. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. – Киев–Донецк: Вища шк., 1982. – 153 с.
8. Мицишин И. И. Об одной смешанной задаче // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1984. – Вып. 32. – С. 93–100.
9. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Докл. АН СССР. – 1972. – **206**, № 5. – С. 1068–1070.
10. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г., Моссаковская Л. В. Дальнейшее развитие задачи Галина о трении и сцеплении // Докл. АН СССР. – 1983. – **271**, № 1. – С. 60–64.
11. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
12. Острик В. И. Контактное взаимодействие штампа с упругой полуплоскостью при наличии трения и сцепления // Теорет. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 94–101.
13. Острик В. И. Контакт пружного та жорсткого клинів з урахуванням тертя і зчеплення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 88–100.
14. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 342 с.
15. Улитко А. Ф., Острик В. И. Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004. – С. 372–375.
16. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
17. Spence D. A. An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1973. – **73**. – P. 249–268.

ВДАВЛИВАННЯ ПОЛУОГРАНИЧЕНОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛОСУ ПРИ НАЛИЧЦІ ТРЕННЯ І СЦЕПЛЕННЯ

Рассмотрена задача о контактном взаимодействии полуграниченного штампа с прямолинейным основанием и упругой полосы, одна грань которой жестко закреплена. Учтены силы трения в области контакта, которые приводят к разделению последней на зоны проскальзывания и сцепления. С использованием процедуры метода Винера – Хопфа система интегральных уравнений задачи сведена к бесконечной системе алгебраических уравнений. Приведены результаты вычислений напряжений и перемещений как на границе, так и во внутренних точках упругой полосы.

IMPRESSION OF SEMI-INFINITE STAMP IN ELASTIC STRIP WITH REGARD FOR FRICTION AND ADHESION

The problem on contact interaction between a half-limited stamp with rectilinear basis and elastic strip with fasten verge is studied. Friction forces are taken into account in the contact domain. The contact domain is divided into an adhesion and slipping zone. With use of Wiener – Hopf method a system of integral equations is reduced to an infinite system of algebraic equations. The results of calculations of stresses and strains on the boundary and within an elastic strip are presented.

Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано
02.11.07