УДК 539.3

В. В. Пороховський

ПЛОСКА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОЇ ПОЗДОВЖНЬОЇ ХВИЛІ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ОБОЛОНКОЮ З ОСЬОВИМ РОЗРІЗОМ

Запропоновано методику дослідження напруженого стану тонкостінної кругової циліндричної оболонки з розрізом уздовж твірної і яка знаходиться у пружному просторі. На оболонку набігає поздовжня пружна хвиля. Методика ґрунтується на використанні розкладу Релея за парціальними хвилями. Отримано формули для визначення стрибків переміщень і кута повороту на берегах розрізу оболонки, радіальної компоненти вектора переміщення і нормального зусилля в циліндричній оболонці та напруження і переміщення в пружному середовищі.

Питанню визначення напружено-деформованого стану пружної циліндричної оболонки присвячено чимало публікацій. Ехосигнали від кругової циліндричної оболонки з розрізом уздовж твірної вперше вивчались T. G. Goldsberry [4], частотні характеристики звукових хвиль для аналогічної оболонки в рідині досліджувались О. П. Піддубняком [1]. У цій роботі розглядається стаціонарна плоска задача взаємодії пружної поздовжньої хвилі з тонкою циліндричною круговою оболонкою, що моделюється рівняннями Кірхгофа − Лява.

1. Нехай на тонку пружну безмежно довгу кругову циліндричну оболонку товщини h і радіусом серединної поверхні r_0 із розрізом уздовж твірної $\theta = \theta_0$, яка знаходиться в пружному просторі з іншого матеріалу, набігає плоска поздовжня хвиля з потенціалом переміщень φ_{inc} (рис. 1)

$$\varphi_{\text{inc}}(r,\theta,\omega) = \varphi_0\, e^{i(k_1 r\cos\theta - \omega t)}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi\,, \tag{1}$$

де $k_1 = \omega/c_1$ − хвильове число для поздовжньої хвилі; φ_0 − стала нормування; r, θ − полярні координати; ω − кругова частота; c_1 − швидкість звуку у поздовжній хвилі. Множник $e^{-i\omega t}$, який надалі будемо опускати, враховує залежність амплітудних характеристик від часу t.

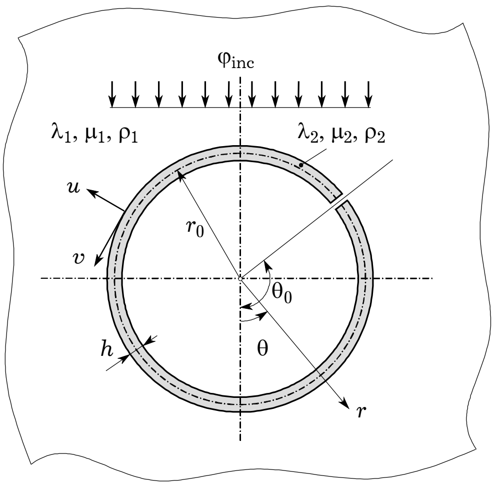

Рис. 1

Припускаємо, що хвиля через розріз не проникає всередину оболонки, тобто силові фактори на ребрах розрізаної оболонки дорівнюють нулеві.

Коливання пружного тонкостінного циліндра описуються диференціальними рівняннями, одержаними на основі гіпотез Кірхгофа − Лява [2]:

$$N_2 - \frac{1}{r_0}\frac{\partial^2 M_2}{\partial\theta^2} = -h\, r_0\, \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r_0\, q_r\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial\theta} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial M_2}{\partial\theta} = h\, r_0\, \rho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + r_0\, q_\theta\,, \tag{3}$$

де u, v, w ($w \equiv 0$) – радіальна, тангенціальна та осьова компоненти вектора переміщень в оболонці; q_r, q_θ, q_z ($q_z = 0$) – компоненти вектора зовнішніх зусиль, причому $q_\theta = 0$, коли виконуються умови гладкого контакту оболонки з пружним середовищем; N_2, M_2 – відповідно нормальне зусилля і згинний момент; ρ_2 – густина матеріалу оболонки.

В осесиметричному випадку для компонент тезора деформації, кутів повороту серединної поверхні циліндричної оболонки і силових характеристик маємо такі співвідношення через компоненти вектора переміщення:

– для компонент тезора деформації

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right), \qquad \varepsilon_{12} = 0,$$

$$æ_1 = 0, \qquad æ_2 = -\frac{1}{r_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) - v\right], \qquad æ_{12} = 0;$$

– для кутів повороту серединної поверхні циліндричної оболонки

$$\vartheta_1 = 0, \qquad \vartheta_2 = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\right);$$

– для компонент зусиль

$$N_1 = D_1 \nu \varepsilon_2 = D_1 \frac{\nu}{r_0}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right), \qquad N_2 = D_1 \varepsilon_2 = D_1 \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right);$$

– для компонент моментів

$$M_1 = D_2 \nu æ_2 = -D_2 \frac{\nu}{r_0^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = -D_2 \frac{\nu}{r_0}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta},$$

$$M_2 = D_2 æ_2 = -D_2 \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = -D_2 \frac{1}{r_0}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta};$$

– для перерізуючих зусиль

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = \frac{1}{r_0}\frac{\partial M_2}{\partial \theta}.$$

Тут $D_1 = \dfrac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)h}{(\lambda_2 + 2\mu_2)}$, $\quad D_2 = \dfrac{1}{12}\dfrac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)h^3}{(\lambda_2 + 2\mu_2)}$.

Напружено-деформований стан пружного тіла, яке знаходиться під дією нестаціонарних навантажень, у випадку осесиметричної деформації, описується за допомогою потенціалів переміщень φ, ψ ($\chi = 0$), які задовольняють хвильові рівняння [3]

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0.$$

Тут ∇^2 – оператор Лапласа; $c_1 = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$, $c_2 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ – швидкості поширення поздовжніх і поперечних хвиль в пружному середовищі з густиною ρ_1; λ_1, μ_1 – пружні параметри Ляме цього матеріалу.

Компоненти вектора переміщення і тензора напружень з потенціалами переміщень пов'язані співвідношеннями

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad \sigma_r = 2\mu_1\left[\left(\frac{\lambda_1}{2\mu_1}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{\psi}{r}\right)\right],$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu_1\left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{\varphi}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi\right].$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів поставлену задачу необхідно доповнити граничними умовами на поверхні циліндричної оболонки. У випадку гладкого контакту оболонки із зовнішнім середовищем граничні умови матимуть вигляд

$$q_r = \left(\sigma_r^{\text{inc}} + \sigma_r^{\text{sc}}\right)\Big|_{r=r_0}, \qquad \tau_{r\theta}^{\text{inc}} + \tau_{r\theta}^{\text{sc}} = 0, \qquad u = u_r^{\text{inc}} + u_r^{\text{sc}} \quad (r = r_0), \quad (4)$$

де

$$u_r^{\text{inc}} = \frac{\partial\varphi_{\text{inc}}}{\partial r}, \quad \sigma_r^{\text{inc}} = 2\mu_1\left(\frac{\lambda_1}{2\mu_1}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi_{\text{inc}}, \quad \tau_{r\theta}^{\text{inc}} = 2\mu_1\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\varphi_{\text{inc}}}{r}\right),$$

індекс «sc» у співвідношеннях (4) вказує на характеристики в розсіяному полі.

Вважаємо також, що всі шукані величини причинні й обмежені в областях, де вони визначаються.

2. Розв'язок рівнянь (2) і (3) будемо шукати у вигляді рядів Фур'є в формі

$$F = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m\, e^{-im\theta}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad (5)$$

де

$$F_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta_0-0} F\, e^{im\theta}\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0+0}^{2\pi} F\, e^{im\theta}\, d\theta.$$

Подіявши оператором $\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\theta_0-0} + \int_{\theta_0+0}^{2\pi}\right)e^{im\theta}d\theta$ на рівняння (2) і (3), отримаємо

$$N_{2m} - \frac{r_0}{2\pi}e^{im\theta_0}\frac{\partial M_{2m}(\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta_0+0}^{\theta_0-0} + \frac{im}{r_0}\frac{1}{2\pi}e^{im\theta_0}M_{2m}(\theta)\Big|_{\theta_0+0}^{\theta_0-0} + \frac{m^2}{r_0}M_{2m} =$$

$$= \rho_2\omega^2 r_0 h u_m + r_0 q_{rm},$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{im\theta_0}N_{2m}(\theta)\Big|_{\theta_0+0}^{\theta_0-0} + \frac{r_0}{2\pi}e^{im\theta_0}M_{2m}(\theta)\Big|_{\theta_0+0}^{\theta_0-0} - imN_{2m} - \frac{im}{r_0}M_{2m} =$$

$$= -\rho_2\omega^2 r_0\, h v_m. \quad (6)$$

З урахуванням умов на берегах розрізу ($\theta = \theta_0 - 0,\ \theta = \theta_0 + 0$) [2]

$$N_2 = Q_2 = M_2 = 0 \quad (7)$$

рівняння (6) набудуть вигляду

$$N_{2m} + \frac{m^2}{r_0}M_{2m} = \rho_2\omega^2 r_0 h u_m + r_0 q_{rm},$$

$$imN_{2m} + \frac{im}{r_0}M_{2m} = \rho_2\omega^2 r_0 h v_m, \qquad |m| = 0, 1, \ldots, \infty. \quad (8)$$

Виразимо коефіцієнти N_{2m} і M_{2m} через компоненти вектора переміщення u_m і v_m:

$$N_{2m} = \frac{D_1}{r_0}\left[V_m + u_m - imv_m\right],$$

$$M_{2m} = -\frac{D_2}{r_0^2}\left[T_m - imU_m - m^2 u_m + imv_m\right]. \quad (9)$$

Тут введено позначення

$$\{T_m,\ U_m,\ V_m\} = \frac{1}{2\pi}\, e^{im\theta_0}\{r_0[\vartheta_2],\ [u],\ [v]\},$$

$$[f] = f(\theta_0 - 0) - f(\theta_0 + 0).$$

Підставимо рівності (9) у рівняння (8):

$$\frac{D_1}{r_0}\left[V_m + u_m - imv_m\right] - \frac{m^2 D_2}{r_0^2}\left[T_m - imU_m - m^2 u_m + imv_m\right] =$$

$$= \rho_2\omega^2 r_0\, hu_m + r_0 q_{rm},$$

$$im\frac{D_1}{r_0}\left[V_m + u_m - imv_m\right] + \frac{imD_2}{r_0^3}\left[T_m - imU_m - m^2 u_m + imv_m\right] =$$

$$= \rho_2\omega^2 r_0\, hv_m. \qquad (10)$$

Враховуючи позначення

$$\frac{D_2}{r_0^2 D_1} = \frac{h^2}{12r_0^2} = \varepsilon, \qquad \frac{\rho_2\omega^2 r_0^2\, h}{D_1} = \frac{\rho_2(\lambda_2 + 2\mu_2)}{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}\, c_1^2\, x_1^2 = \frac{c_1^2}{c_{10}^2}\, x_1^2 = x_{10}^2,$$

де $x_1 = \omega r_0/c_1$, $c_{10}^2 = 4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)/\rho_2(\lambda_2 + 2\mu_2)$, систему рівнянь (10) запишемо у вигляді

$$(1 + \varepsilon m^4 - x_{10}^2)u_m - im(1 + \varepsilon m^2)v_m = \varepsilon m^2 T_m - i\varepsilon m^3 U_m - V_m + \frac{a^2}{D_1}\, q_{rm},$$

$$im(1 + \varepsilon m^2)u_m + (m^2 + \varepsilon m^2 - x_{10}^2)v_m = i\varepsilon m T_m + \varepsilon m^2 U_m - imV_m.$$

Подамо потенціали переміщень рядами Фур'є

$$\varphi = \varphi_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m\, H_m^{(1)}(k_1 r)\, e^{-im\theta}, \qquad \psi = i\,\varphi_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\,\psi_m\, H_m^{(1)}(k_2 r)\, e^{-im\theta}.$$

де $k_2 = \omega/c_2$ – хвильове число для поперечної хвилі.

Для падаючої плоскої хвилі (1) розвинення в ряд Фур'є матиме вигляд

$$\varphi_{\text{inc}}(r,\theta,\omega) = \varphi_0 e^{ik_1 r\cos\theta} = \varphi_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_1 r)\, e^{-im\theta}. \qquad (11)$$

Переміщення u_r і напруження σ_r, $\tau_{r\theta}$ з урахуванням (11) для розсіяної і падаючої хвиль запишемо як

$$u_r^{\text{sc}} = \frac{\varphi_0}{r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_m f_{11}(k_1 r) + m\psi_m f_{12}(k_2 r)\right] e^{-im\theta},$$

$$\sigma_r^{\text{sc}} = 2\mu_1 \frac{\varphi_0}{r^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_m f_{21}(k_1 r) + m\psi_m f_{22}(k_2 r)\right] e^{-im\theta},$$

$$\tau_{r\theta}^{\text{sc}} = 2\mu_1 \frac{\varphi_0}{r^2}\, i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_m f_{31}(k_1 r) + m\psi_m f_{32}(k_2 r)\right] e^{-im\theta}; \qquad (12)$$

$$u_r^{\text{inc}} = \frac{\varphi_0}{r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m\, \mathrm{Re}\, f_{11}(k_1 r)\, e^{-im\theta},$$

$$\sigma_r^{\text{inc}} = 2\mu_1 \frac{\varphi_0}{r^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m\, \mathrm{Re}\, f_{21}(k_1 r)\, e^{-im\theta},$$

$$\tau_{r\theta}^{\text{inc}} = 2\mu_1 \frac{\varphi_0}{r^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m+1}\, \mathrm{Re}\, f_{31}(k_1 r)\, e^{-im\theta}, \qquad (13)$$

де $\qquad f_{11}(x) = xH'^{(1)}_m(x)\,, \qquad f_{12}(x) = mH^{(1)}_m(x)\,,$

$$f_{21}(x) = -\frac{\lambda_1}{2\mu_1}x^2H^{(1)}_m(x) + x^2H''^{(1)}_m(x)\,,$$

$$f_{22}(x) = m\left[xH'^{(1)}_m(x) - H^{(1)}_m(x)\right], \qquad f_{31}(x) = m\left[H^{(1)}_m(x) - xH'^{(1)}_m(x)\right],$$

$$f_{32}(x) = xH'^{(1)}_m(x) - \left(m^2 - x^2/2\right)H^{(1)}_m(x)\,.$$

Підставляючи розвинення (12) і (13) у граничні умови (4) і враховуючи рівняння (10), задачу зводимо до розв'язання системи лінійних рівнянь четвертого порядку відносно невідомих u_m, v_m, φ_m і ψ_m:

$$\begin{aligned}
&a_{11}u_m + a_{12}v_m + a_{13}\varphi_m + a_{14}\psi_m = \tilde{a}_{10} + a_{10}\,,\\
&a_{21}u_m + a_{22}v_m = \tilde{a}_{20}\,,\\
&a_{33}\varphi_m + a_{34}\psi_m = a_{30}\,,\\
&a_{41}u_m + a_{43}\varphi_m + a_{44}\psi_m = a_{40}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Тут $\quad a_{11} = 1 + \varepsilon m^4 - x_{10}^2\,, \qquad a_{12} = -a_{21} = -\,im(1 + \varepsilon m^2)\,,$

$a_{22} = m^2 + \varepsilon m^2 - x_{10}^2\,, \qquad a_{13} = -\,\varphi_0 æ^2 f_{21}(x_1)\,,$

$a_{14} = -\,\varphi_0 æ^2 m f_{22}(x_2)\,, \qquad a_{10} = \varphi_0 æ^2 i^m \,\mathrm{Re}\, f_{21}(x_1)\,,$

$\tilde{a}_{10} = \varepsilon m^2 T_m - i\varepsilon m^3 U_m - V_m\,, \qquad \tilde{a}_{20} = im\varepsilon T_m + \varepsilon m^2 U_m - imV_m\,,$

$a_{33} = f_{31}(x_1)\,, \qquad a_{34} = mf_{32}(x_2)\,,$

$a_{30} = -\,i^m \,\mathrm{Re}\, f_{31}(x_1)\,, \qquad a_{41} = -1\,,$

$a_{43} = \varphi_0 f_{11}(x_1)\,, \qquad a_{44} = \varphi_0 m f_{12}(x_2)\,,$

$a_{40} = -\,\varphi_0 i^m \,\mathrm{Re}\, f_{11}(x_1)\,; \qquad æ^2 = \dfrac{\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2)}{2\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)h}\,, \qquad x_2 = k_2 r_0\,.$

Розв'язуючи систему рівнянь (14), шукані величини u_m, v_m, φ_m і ψ_m подамо у такому вигляді:

$$u_m = \frac{\Delta_u}{\Delta_0}\,, \qquad v_m = \frac{\Delta_v}{\Delta_0}\,, \qquad \varphi_m = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta_0}\,, \qquad \psi_m = \frac{\Delta_\psi}{\Delta_0}\,.$$

Тут $\qquad \Delta_0 = \Delta_{12}\Delta_{34} - a_{22}\Delta_{13}\,,$

$$\Delta_u = \Delta_{20}\Delta_{34} + a_{22}\Delta_{034}\,, \qquad \Delta_v = \Delta_{10}\Delta_{34} - a_{21}\Delta_{034} - \tilde{a}_{20}\Delta_{13}\,,$$

$$\Delta_\varphi = \Delta_{04}\Delta_{12} - a_{34}\Delta_{20} - a_{22}\Delta_{03}\,, \qquad \Delta_\psi = \Delta_{40}\Delta_{12} + a_{33}\Delta_{20} - a_{22}\Delta_{30}\,,$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{34} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{20} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{10} & a_{12} \\ \tilde{a}_{20} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{10} = \begin{vmatrix} a_{11} & \tilde{a}_{10} \\ a_{21} & \tilde{a}_{20} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{04} = \begin{vmatrix} a_{30} & a_{34} \\ a_{40} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{03} = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{14} \\ a_{30} & a_{34} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{40} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{30} \\ a_{43} & a_{40} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{30} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{10} \\ a_{33} & a_{30} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{034} = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{13} & a_{14} \\ a_{30} & a_{33} & a_{34} \\ a_{40} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Визначимо невідомі величини скачка переміщень на берегах розрізу з використанням умови (8). Для цього знайдемо компоненти зусиль і моментів:

$$N_{2m} = \frac{D_1}{r_0}\left\{A_{11}^{(m)}T_m + A_{12}^{(m)}V_m - imA_{13}^{(m)}U_m + A_{10}^{(m)}\right\},$$

$$M_{2m} = -\frac{D_1}{r_0^2}\left\{A_{21}^{(m)}T_m + A_{22}^{(m)}V_m - imA_{21}^{(m)}U_m + A_{20}^{(m)}\right\}, \qquad (15)$$

де

$$A_{11}^{(m)} = -\varepsilon m^2\,\frac{2x_{10}^2\Delta_{34} + \Delta_{13}}{\Delta_0},$$

$$A_{12}^{(m)} = \frac{x_{10}^2(-\varepsilon m^2 - \varepsilon m^4 + x_{10}^2)\Delta_{34} + (-\varepsilon m^2 + x_{10}^2)\Delta_{13}}{\Delta_0},$$

$$A_{10}^{(m)} = \frac{(\varepsilon m^2 - \varepsilon m^4 - x_{10}^2)\Delta_{034}}{\Delta_0},$$

$$A_{21}^{(m)} = -\,\frac{x_{10}^2(1 + m^2 - x_{10}^2)\Delta_{34} + (m^2 - x_{10}^2)\Delta_{13}}{\Delta_0},$$

$$A_{22}^{(m)} = -\,m^2\,\frac{2x_{10}^2\Delta_{34} + \Delta_{13}}{\Delta_0}, \qquad A_{20}^{(m)} = m^2\,\frac{(1 - m^2 + x_{10}^2)\Delta_{034}}{\Delta_0}.$$

Підставляючи коефіцієнти (15) у ряди Фур'є (5) і задовольняючи умови (7) на берегах розрізу, для знаходження стрибків переміщень отримуємо систему рівнянь

$$T_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{11}^{(m)} + V_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{12}^{(m)} - iU_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} mA_{11}^{(m)} + 2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{10}^{(m)}e^{-im\theta_0} = 0,$$

$$T_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{21}^{(m)} + V_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{22}^{(m)} - iU_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} mA_{21}^{(m)} + 2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{20}^{(m)}e^{-im\theta_0} = 0,$$

$$T_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} mA_{21}^{(m)} + V_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} mA_{22}^{(m)} - iU_0\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2A_{21}^{(m)} + 2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty} mA_{10}^{(m)}e^{-im\theta_0} = 0.$$

З урахуванням парності коефіцієнтів відносно m:

$$A_{pq}^{(-m)} = A_{pq}^{(m)}, \qquad p = 1, 2, \qquad q = 0, 1, 2,$$

вищезаписана система набуде вигляду

$$2T_0\sum_{m=1}^{\infty} A_{11}^{(m)} + V_0\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m A_{12}^{(m)} + 2\pi\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m A_{10}^{(m)}\cos m\theta_0 = 0,$$

$$T_0\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m A_{21}^{(m)} + 2V_0\sum_{m=1}^{\infty} A_{22}^{(m)} + 4\pi\sum_{m=1}^{\infty} A_{20}^{(m)}\cos m\theta_0 = 0,$$

$$U_0\sum_{m=1}^{\infty} m^2A_{21}^{(m)} - 2\pi\sum_{m=1}^{\infty} mA_{20}^{(m)}\sin m\theta_0 = 0, \qquad (16)$$

$$\varepsilon_0 = 1, \qquad \varepsilon_m = 2, \qquad m = 1, \ldots, \infty.$$

Розв'язуючи систему рівнянь (16), знайдемо, що

$$T_0 = \frac{B_1A_{22} - B_2A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \qquad V_0 = \frac{B_2A_{11} - B_1A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \qquad U_0 = \frac{B_3}{A_{33}},$$

де

$$A_{11} = 2\sum_{m=1}^{\infty} A_{11}^{(m)}, \qquad A_{12} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m A_{12}^{(m)}, \qquad B_1 = -2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m A_{10}^{(m)} \cos m\theta_0 ,$$

$$A_{21} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m A_{21}^{(m)}, \qquad A_{22} = 2\sum_{m=1}^{\infty} A_{22}^{(m)}, \qquad B_2 = -4\pi \sum_{m=1}^{\infty} A_{20}^{(m)} \cos m\theta_0 ,$$

$$A_{33} = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_{12}^{(m)}, \qquad B_3 = 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} m A_{10}^{(m)} \sin m\theta_0 .$$

Запропонований алгоритм дає можливість визначати стрибки переміщень і кут повороту на берегах розрізу оболонки, радіальну компоненту вектора переміщення і нормальне зусилля в циліндричній оболонці та напруження і переміщення в пружному середовищі для різних значень кута θ_0 і пружних характеристик матеріалу.

1. *Піддубняк О. П.* Частотні характеристики звукових хвиль, розсіяних пружною круговою циліндричною оболонкою з щілиною вздовж розрізу // Доп. НАН України. – 1995. – № 9. – С. 38–40.
2. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
3. *Подстригач Я. С., Поддубняк А. П.* Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 262 с.
4. *Goldsberry T. G.* Reflection of circumferential waves from a slit in thin-walled cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. – 1967. – **42**, No. 6. – P. 1298–1305.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ С ОСЕВЫМ РАЗРЕЗОМ

Предложена методика исследования напряженного состояния тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с разрезом вдоль образующей, находящейся в упругом пространстве. На оболочку набегает продольная упругая волна. Методика базируется на использовании разложения Рэлея по парциальным волнам. Получены формулы для определения скачков смещения и угла поворота на берегах разреза оболочки, радиальной компоненты вектора смещения и нормального усилия в цилиндрической оболочке, напряжения и смещения в упругой среде.

PLANE PROBLEM OF INTERACTION BETWEEN ELASTIC LONGITUDINAL WAVE AND CYLINDRICAL SHELL WITH AXIAL CUT

A procedure is proposed to investigate the stress state of a thin-walled circular cylindrical shell with a cut along the generator in an elastic space. The longitudinal elastic wave is incident on the shell. The procedure is based on utilization the Rayleigh expansion by the sub-waves. The formulas are obtained to determine the displacement jumps and angle of rotation on the shell cut edges, a radial component of displacement vector and normal effort in the cylindrical shell, the stresses and strains in elastic medium.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 23.11.06