

### НЕУСТАЛЕНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В ПЛАСТИНЦІ З ТЕПЛОВІДДАЧЕЮ ПРИ НАГРІВІ ПОТОКОМ ТЕПЛА

Наведено алгоритм визначення квазістатичних температурних напружень у багатозв'язних пластинках з тепловіддачею, які спричинені збуренням теплового потоку біля отворів. Підхід ґрунтується на перетворенні Лапласа та модифікованій формулі його числового обернення. Розв'язування крайових задач для рівняння Гельмгольца, з яких визначається зображення Лапласа, проведено з використанням методу граничних інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння розв'язано методом механічних квадратур. Наведено результати розрахунків нестационарних температурних полів і спричинених ними напружень у смугі з малими отворами різних форм.

У літературі найбільш детально вивчено стаціонарні температурні поля і зумовлені ними напруження у теплоізолюваних пластинках, що перебувають під дією теплового потоку на нескінченності [6]. Розглянемо задачу про визначення нестационарних температурних полів і спричинених ними напружень у пластинці завтовшки  $2h$  з отвором, яка нагрівається потоком тепла. Прийmemo, що отвір є малим порівняно з розмірами смуги  $-H < y < H$  та з її лицевих границь здійснюється теплообмін із середовищем нульової температури за законом Ньютона. Тут введено віднесені до півтовщини  $h$  пластинки безрозмірні координати  $x, y$  та ширина смуги  $H$ .

Вважатимемо, що смуга перебуває під дією теплового потоку на прямолінійних границях

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\pm H} = q_0 h \varphi(\tau), \quad (1)$$

а на криволінійній границі має місце теплообмін за законом Ньютона з середовищем нульової температури, границя пластинки вільна від навантажень. Тут  $\varphi(\tau)$  – функція, яка характеризує зміну потоку тепла в часі. У початковий момент часу температура пластинки дорівнює нулеві.

Подамо температуру в пластинці у вигляді суми двох складових  $T_c = T_n + T$ , де перша складова – температура в суцільній пластинці, а друга – коригувальний розв'язок, який забезпечує виконання умов на границі отвору.

**Визначення основної складової.** Температуру у суцільній пластинці визначаємо як розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} - \text{Bi} T_n - \frac{\partial T_n}{\partial \theta} = 0, \quad -H < y < H, \quad \theta > 0, \\ \left. \frac{\partial T_n}{\partial y} \right|_{y=\pm H} = q \varphi(\theta), \quad \theta > 0, \quad T_n|_{\theta=0} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\theta = a\tau/h^2$ ;  $q = q_0 h/\lambda$ ;  $\text{Bi} = \alpha_z h/\lambda$ ;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\tau$  – час;  $\alpha_z$  – коефіцієнт тепловіддачі з плоских границь пластинки.

Застосувавши до цієї задачі перетворення Лапласа за змінною  $\theta$ , отримуємо крайову задачу вигляду

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_n}{\partial y^2} - p \tilde{T}_n = 0, \quad -H < y < H, \quad \left. \frac{\partial \tilde{T}_n}{\partial y} \right|_{y=\pm H} = q \tilde{\varphi},$$

де  $\tilde{T} = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau$ ;  $p = \text{Bi} + s$ . Звідси отримуємо

$$\tilde{T}_n = q \frac{\text{sh}(\sqrt{p}y)}{\sqrt{p} \text{ch}(\sqrt{p}H)} \tilde{\phi}. \quad (3)$$

**Знаходження коригувального розв'язку.** Обмежимося надалі дослідженням температури та напружень біля отвору. Тому на основі прийнятих вище припущень щодо розмірів отвору при знаходженні другої складової, температури  $T$ , пластинку будемо розглядати як нескінченну з відповідним отвором. Допоміжна температура  $T$  тоді визначатиметься із однорідного рівняння теплопровідності вигляду

$$\left( \Delta - \text{Bi} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) T = 0 \quad (4)$$

за умов

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \beta T = f, \quad (x, y) \in L, \quad T|_{\theta=0} = 0,$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $f = -\left( \frac{\partial T_n}{\partial n} + \beta T_n \right) \Big|_{(x,y) \in L}$ ;  $L$  - границя отвору;  $n$  - нормальна до границі отвору координата;  $\beta = h\alpha_L/\lambda$ ;  $\alpha_L$  - коефіцієнт тепловіддачі з криволінійної границі пластинки.

Застосувавши до цієї задачі перетворення Лапласа за змінною  $\theta$ , для знаходження зображення від функції  $T$  отримаємо крайову задачу

$$(\Delta - p)\tilde{T} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} + \beta \tilde{T} = \tilde{f},$$

де

$$\tilde{f} = -\left( \frac{\partial \tilde{T}_n}{\partial n} + \beta \tilde{T}_n \right) \Big|_{(x,y) \in L} = -q \frac{\sqrt{s} \text{ch}(\sqrt{s}y) \cos(n, y) + \beta \text{sh}(\sqrt{s}y)}{\sqrt{s} \text{ch}(\sqrt{s}H)} \tilde{\phi}.$$

Для визначення зображення  $\tilde{T}$  використовуємо підхід, що ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь, розв'язування яких проводимо чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Повернення до оригіналу виконуємо з використанням числово-аналітичної формули обернення, у яку входять зображення Лапласа  $\tilde{T}$  за фіксованих значень параметра перетворення [2].

Напруження подаємо у вигляді суми трьох складових.

Першу складову визначаємо як напруження у суцільній смузі. Будемо розглядати два варіанти:

1°. Пластинка затиснута в напрямку осі  $Ox$ . Тоді напруження у смузі будуть [5]

$$\sigma_{nxx} = -\alpha_t E T, \quad \sigma_{nyy} = \tau_{nyy} = 0, \quad (5)$$

де  $\alpha_t$  - коефіцієнт лінійного температурного розширення;  $E$  - модуль Юнга.

2°. Пластинка вільна від навантаження. Тоді до напружень, які наведено вище, необхідно додати напруження від чистого згину такі, щоб сумарний момент у довільному перерізі  $x = \text{const}$  дорівнював нулеві. Тоді зображення Лапласа від напружень з використанням формули (3) набудуть вигляду

$$\tilde{\sigma}_{nxx} = -\alpha_t E [\tilde{T}_n - y g(p)], \quad (6)$$

де  $g = \frac{3q}{\sigma\sqrt{\sigma}} (\sqrt{\sigma} - \text{th}\sqrt{\sigma}) \tilde{\phi}$ , а  $\sigma = \sqrt{p} H$ .

Друга складова – напруження у пластинці з отвором, до границі якого прикладено зусилля  $(X, Y)$ , які визначаються першою складовою і взяті з протилежним знаком. Тобто маємо  $X = -\sigma_{nxx} \cos(\widehat{n, x})$ ,  $Y = 0$ , де  $n$  – нормаль до границі отвору.

Третя складова – напруження у пластинці, які зумовлені збуреним температурним полем  $T$  при вільній від навантаження границі. Визначення другої і третьої складових проводимо за допомогою алгоритму, який детально наведено в [3].

**Тестування алгоритму.** Для контролю точності отриманого розв’язку проведено розрахунки температури і напружень на границі отворів у пластинці за великих значень часової координати (усталений режим). Для цього використано відомі в літературі розв’язки стаціонарної задачі термопружності для нескінченної пластинки, коли задано потік на нескінченності, який напрямлений під кутом  $\alpha_q$ , а плоскі й криволінійні границі теплоізовані. Розв’язок цієї задачі наведено в літературі в аналітичному вигляді з використанням конформного відображення та методу Мусхелішвілі [1, 4]. Приймалось, що функція  $z = \omega(\zeta)$ , яка використовується при конформному відображенні нескінченної області з вибраним отвором на зовнішність одиничного круга, має вигляд

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{c_N}{\zeta^N} \right), \quad (7)$$

де  $z = x + iy$ ;  $R, c_1, \dots, c_N$  – задані сталі;  $N$  – вибране ціле число.

Тоді температурне поле в пластинці для таких отворів має вигляд [6]

$$T = \frac{qR}{2} \left[ e^{i\alpha_q} \left( \bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) + e^{-i\alpha_q} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right]. \quad (8)$$

Температура на границі пластинки визначається за простою формулою

$$T = 2qR \cos(\alpha_q - \gamma), \quad \text{де} \quad e^{i\gamma} = \zeta, \quad 0 < \gamma \leq 2\pi.$$

Наведемо результати розрахунків для деяких областей, які розглядалися в літературі. Розглянемо пластинку, що містить отвір, близький до квадратного, та нагрівається потоком тепла при  $\alpha_q = \pi/2$ . Параметричне задання граничного контуру вибирали у вигляді (7), у якому відмінним від нуля є коефіцієнт  $c_3 = -1/6$ . Вираз для кільцевих напружень на границі отвору є таким [6]:

$$\sigma_\vartheta = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_t ERq}{5 + 4 \cos 4\vartheta} [5 \cos(\gamma - \alpha_q) + \cos(3\gamma + \alpha_q)]. \quad (9)$$

Результати обчислення напружень  $\sigma_\vartheta / \alpha_t ERq$  за запропонованим алгоритмом і за точною формулою наведено у табл. 1 для різних значень параметра  $\gamma$ .

Із аналізу наведених у таблиці даних випливає, що отримані результати числових розрахунків у випадку усталеного режиму практично збігаються із точними даними.

Проведені аналогічні тестування для пластинки з отвором, форма якого є близькою до трикутної, та для пластинок з еліптичним і круговим отворами також підтверджують високу точність алгоритму.

Таблиця 1

$\gamma$	$\sigma_\vartheta / \alpha_t ERq$	
	За запропонованим алгоритмом	Точне значення
0	0	0.0000
10	0.0296	0.0304
20	0.0983	0.0988
30	0.3329	0.3333
40	1.2667	1.2608
50	1.8033	1.7885
60	0.9738	0.9622
70	0.6175	0.6086
80	0.4863	0.4787
90	0.4521	0.4444

**Дослідження квазістатичних температурних напружень біля криво-лінійних отворів.** У розробленому алгоритмі необхідно задати параметричне рівняння контуру. При цьому слід врахувати, що при розв'язуванні інтегральних рівнянь методом механічних квадратур вузлові точки доцільно згущувати в областях швидкої зміни температури та напружень.

Відомо, що температурні поля і зумовлені ними напруження є швидкозмінними в околі точок, де різко змінюється кривина границі. У проведених дослідженнях ця особливість враховувалась шляхом опису граничних контурів функціями вигляду (7), що використовуються при конформному відображенні. Однією із основних переваг такого опису є те, що рівномірному розбиттю за параметром  $\gamma$  відповідає згущення точок в областях границі зі швидкою зміною кривини. Зазначимо, що, вибравши  $N$  достатньо великим, за допомогою формули (7) можна описати будь-який контур з достатньою для практики точністю.

Проведемо дослідження напружень у пластинках з отворами різних форм. При розрахунках нестационарної температури числове розв'язування інтегральних рівнянь проводили з використанням 80 вузлових точок. Параметр  $s$ , що входить у формулу обернення [2], покладали  $s = 3$ , а другий параметр  $\ell$ , що визначає проміжок часу, на якому розраховується температура ( $0 < \theta < \ell$ ), вибирали таким, щоб при  $\theta > \ell$  температура в пластинці була близькою до встановленої, а в рядах обмежувались  $40 \div 60$  членами. Виконані контрольні розрахунки показали, що при таким чином вибраних параметрах забезпечувалась точність розрахунків температури та напружень  $\sim 1\%$ .

З метою контролю за точністю обчислень розрахунки проводились для випадку, коли тепловіддача з граничних площин відсутня, оскільки тоді за великих часів отримуємо результати, що знайдені в літературі для цього випадку безпосередньо.

На рис. 1, 3 зображено графічно результати розрахунків для пластинки з еліптичним отвором, заданим параметрично у вигляді  $x = a \cos \gamma$ ,  $y = b \sin \gamma$ , з півосями  $a = 0.2H$  і  $b = 0.3H$ . Обчислення виконано при  $\ell = 6H^2$ .

Аналогічні результати розрахунків для пластинки з круговим отвором, відносний радіус якого дорівнює  $0.2H$ , при косинусоїдальній зміні потоку тепла наведено на рис. 2 і 4 у такому ж порядку, як на рис. 1 і 3.

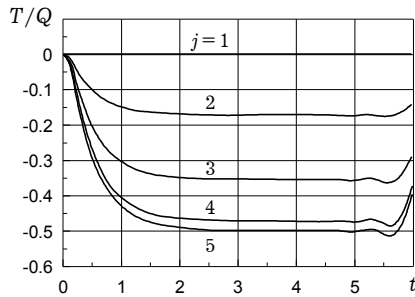


Рис. 1

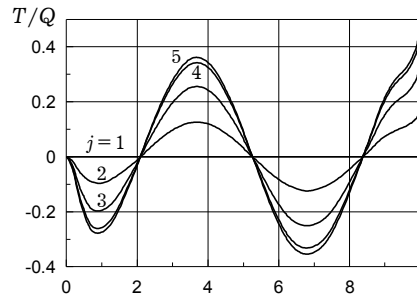


Рис. 2

На рис. 1 зображено залежність відносної температури  $T/Q$  ( $Q = qH$ ) при  $\varphi(\theta) = 1$  від часової координати у точках границі, що відповідають значенням параметра  $\gamma = \gamma_j = \frac{1}{80} 2\pi j$ , який входить в опис границі отвору.

На рис. 3а і рис. 3б зображено розподіл відносної температури  $T/Q$  на границі отвору для значень часової змінної  $t^* = t_j$ , де  $t_j = j\ell/M$ ,  $M = 20$ ,  $t^* = \theta/H^2$  (значення  $j$  вказано біля кривих). На рис. 3в і рис. 3г зображено кільцеві напруження  $\sigma_\theta$ , віднесені до величини  $\alpha_t EQ$ , на границі отвору

для різних значень часової координати  $t_j$ , причому розглядався випадок, коли смуга є незакріпленою.

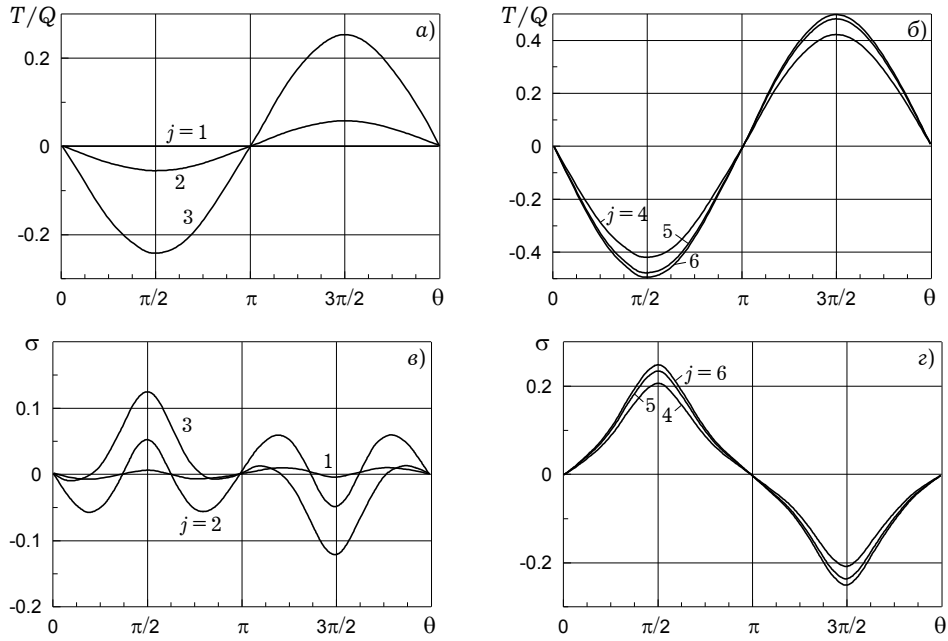


Рис. 3

На рис. 1 бачимо, що при значенні часового параметра  $t^* > 2$  температура вже практично досягає свого асимптотичного значення. У той же час розрахунки показали, що при значенні часової координати  $t^* \sim 2$  напруження ще не виходять на своє асимптотичне значення, оскільки вони залежать не тільки від температури на границі, але й від температури у віддалених від границі точках, де асимптотичний режим встановлюється при  $t_* \gg 2$ . У зв'язку з цим надалі покладали значення введеного вище часового параметра  $\ell \sim 6 \div 10H^2$ .

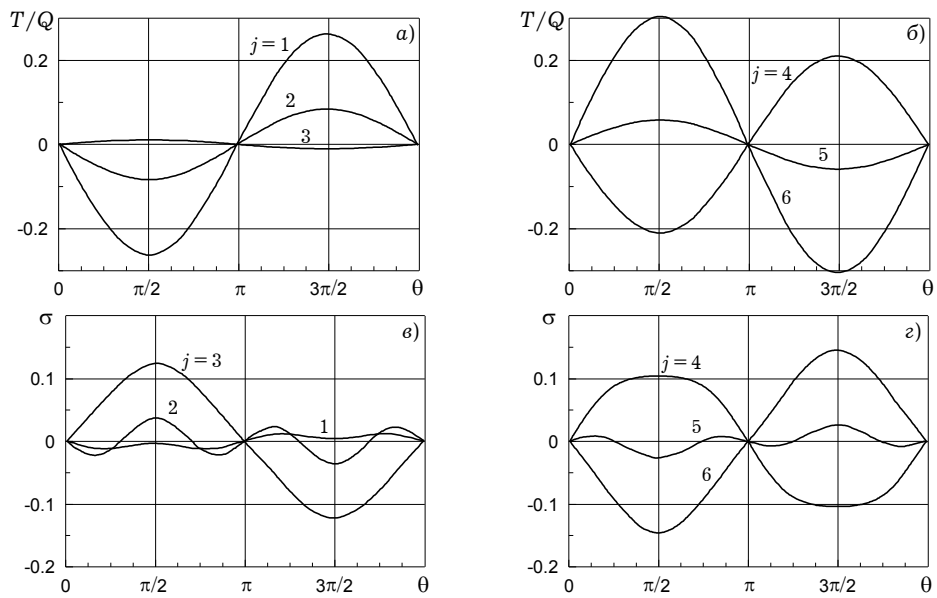


Рис. 4

На рис. 5 і 6 подано результати розрахунків для пластинки з практично квадратним отвором, при цьому у формулі (7) утримували 16 членів.

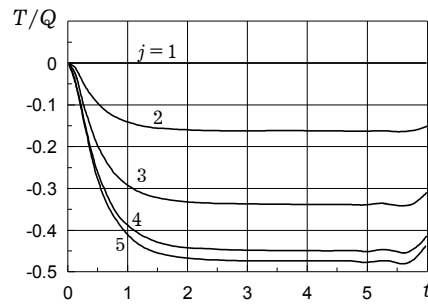


Рис. 5

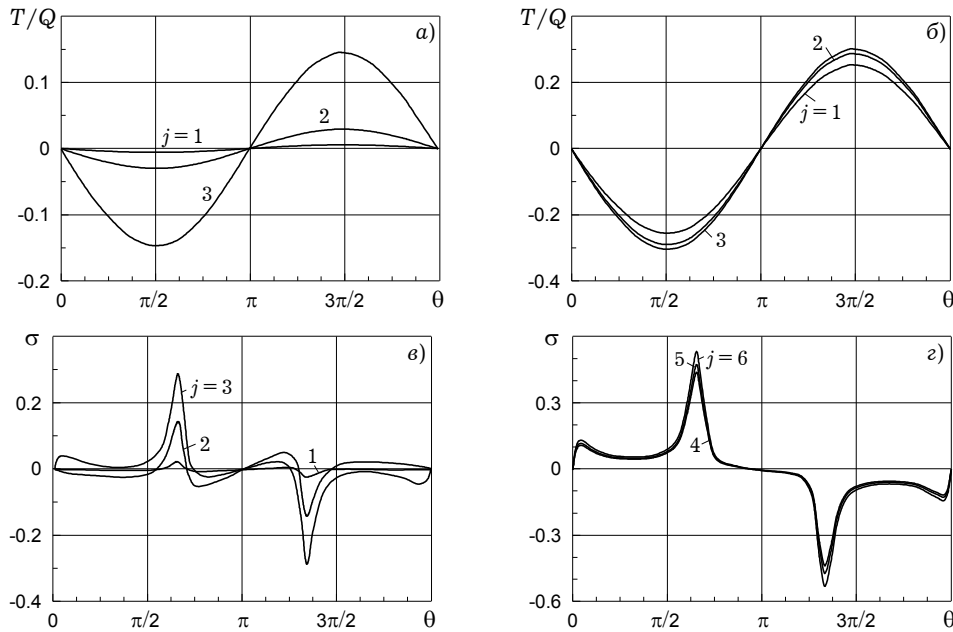


Рис. 6

Розрахунки виконано для параметра тепловіддачі  $H\beta = 0.0001$  для пластинки з еліптичним отвором і  $H\beta = 0.001$  – в усіх інших випадках. Параметр, що характеризує тепловіддачу з граничних площин, покладали  $BiH^2 = 0.003$ .

За значень часової координати, що близькі до максимальної ( $t^* > 5$ ) у деяких випадках має місце коливність графіків температури, яка пов'язана зі збільшенням похибки формули обернення для цих значень [2, 3]. За значень  $0 \leq t^* < 5$  розрахована температура змінюється плавно і додатково задовольняє дві умови, які наперед не задавались. Перша – всі розраховані значення температури в початковий момент часу виявились практично рівними нулеві, тобто задовольняють задану початкову умову.

При  $2 \leq t^* < 5$  розрахована температура є практично сталою за незмінного в часі потоку тепла. Для цього випадку у формулі обернення враховується залишковий член, який з точністю до множника дорівнює відповідній усталеній температурі. Проведене порівняння показало, що знайдена для великих часів температура практично збігається із відповідною усталеною температурою, що є другим допоміжним засобом контролю за достовірністю результатів.

На підставі проведених розрахунків для випадку дії сталого в часі потоку тепла можна зробити такі висновки: температура в усіх точках границі при зростанні часу практично монотонно наближається до значень, що визначаються із розв'язування відповідної стаціонарної задачі теплопровідності; аналогічною є поведінка напружень на границі, за винятком малих часів, для яких розподіл напружень на границі має складніший характер. Для змінних в часі нагрівів температура і напруження на границі за великих часів також монотонно наближаються до своїх асимптотичних значень. У випадку косинусоїдального нагріву розраховані величини змінюються в часі при  $t^* > 3$  косинусоїдально, що пов'язано з повільним нагрівом. За менших значень часової координати температура та напруження змінюються за складнішим законом, оскільки в початковий момент часу температура дорівнює нулеві.

Отже, запропонований алгоритм дає змогу проводити дослідження впливу нестационарного нагріву на температурні поля та зумовлені ними напруження біля криволінійних отворів у пластинках з тепловіддачею.

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 239 с.
2. Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 37, № 2. – С. 18–26.
3. Кушнір Р. М., Соляр Т. Я. Термопружний стан багатозв'язних пластинок за їх нагріву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 27–33.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 599 с.
5. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
6. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.

#### НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ВОЗЛЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНКЕ С ТЕПЛОТДАЧЕЙ ПРИ НАГРЕВЕ ПОТОКОМ ТЕПЛА

*Приведен алгоритм определения квазистатических температурных напряжений в многосвязных пластинках с теплоотдачей, вызванных возмущением теплового потока возле отверстия. Подход базируется на преобразовании Лапласа и модифицированной формуле его численного обращения. Решение краевых задач для уравнения Гельмгольца, из которых определяется изображение Лапласа, проведено с использованием метода граничных интегральных уравнений. Интегральные уравнения решаются методом механических квадратур. Приведены результаты расчетов нестационарных температурных полей и вызванных ими напряжений в полосе с малыми отверстиями разных форм.*

#### UNSTEADY THERMAL STRESSES IN THE VICINITY OF A CURVILINEAR HOLE IN THE PLATE WITH HEAT EMISSION UNDER HEATING BY HEAT FLOW

*An algorithm to determine the quasi-static thermal stresses in multi-connected plates with heat emission, caused by disturbance of heat flow near a hole, is presented. The approach is based on the Laplace transform and modified formula of its numerical conversion. The boundary-value problem for the Helmholtz equation, from which the Laplace representation is defined, are solved using the boundary integral equation method. The integral equations are solved by the method of mechanical quadratures. The results of calculation of nonstationary temperature fields and stresses caused by them in a strip with small holes of different forms are presented.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
20.06.07