УДК 539.30: 512.972

І. Б. Прокопович

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТЕНЗОРНИХ ФУНКЦІЙ СТАНУ ТІЛА З УРАХУВАННЯМ ОБЕРТАННЯ

Розглянуто загальне подання тензорної функції стану анізотропних матеріалів в евклідовому просторі, коли параметри анізотропії є змінними тензорами довільного рангу. На основі узагальнень ортогонального та антисиметричного тензорів для вищих рангів записано в прямому, безкомпонентному вигляді рівняння тензорної будови обертовної функції довільного рангу та правило її диференціювання. Ці співвідношення можна застосовувати в задачах нелінійної механіки твердого деформівного тіла про вплив залишкових напружень на збурення довільної природи в анізотропному деформівному тілі.

Анізотропію матеріалу відображають у формулах, наприклад, у рівнянннях, потенціалах та інших функціях стану, тензорами різних рангів, зокрема, вище другого (наприклад, модуль електричного п'єзоефекту, модулі пружності різних порядків). Як у лінійній теорії, так і в загальній нелінійній (наприклад, [2, 4, 7]) тензорні характеристики матеріалу завжди вважають сталими параметрами функцій стану і не беруть до уваги при диференціюванні, хоч у випадку обертання тіла вони є змінними, подібно до тензорних і векторних параметрів стану. Проте обертання вилучають з розгляду, прив'язуючи систему координат до осей анізотропії матеріалу. У задачах нелінійної механіки про накладання напружено-деформованого та електромагнітного станів (у загальному − тензорних чи векторних станів) на певний початковий деформований стан [3, 5] такий підхід можливий лише за умови, що початковий стан анізотропного матеріалу неспотворений. А ця умова, взагалі кажучи, не виконується у задачах неруйнівного контролю напружень, які за своєю суттю є оберненими задачами накладання тензорних станів. Зокрема, інфразвуковий контроль здійснюють накладанням додаткового поля переміщень, а оптико-поляризаційний та магнітопружний контроль − накладанням додаткового електромагнітного стану. При цьому виникає також додатковий змінний напружено-деформований стан [3, 5]. Крім того, залишковим напруженням відповідає неоднорідна деформація тіла, що супроводжується таким же неоднорідним полем поворотів. Неоднорідним полем поворотів взагалі неможливо знехтувати за допомогою певного вибору системи координат. Оскільки такі повороти неявно враховують через градієнт поля переміщень, то їх необхідно враховувати й у зміні параметрів стану (наприклад, тензорів напружень і деформації, векторів електричної поляризації і намагніченості), а також параметрів анізотропії (інакше можна отримати помилкові результати). Таким чином, постає цікава теоретична проблема нелінійної механіки деформівного середовища, що є достатньо загальною прикладною задачею як теорії тензорних функцій [4, 6], так і теорії диференціальних інваріантів [1, 8, 9]. У вирішенні цієї задачі природно застосувати поширений у фізиці і, насамперед, у механіці деформівного тіла прямий (інваріантний, безкомпонентний) запис тензорних формул, що дає змогу вилучити з розгляду суб'єктивні величини − базисні вектори та координати (компоненти). Скаляри та вектори при цьому розглядатимемо як тензори нульового та першого рангу відповідно.

Поворот довільного тензора. Спільний поворот усіх елементів евклідового векторного простору характеризують ортогональним тензором другого рангу $\mathbf{R}$ [4, 6, 7]:

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{R}, \qquad |\mathbf{q}| = |\hat{\mathbf{q}}|, \qquad (\mathbf{R}^{\mathsf{T}})^{-1} = \mathbf{R}. \tag{1}$$

Тут шапочка « $\wedge$ » означає початкове значення довільного вектора $\mathbf{q}$ перед поворотом. Верхній індекс « T » означає операцію транспонування тензора.

Оскільки $\hat{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}|_{\mathbf{R}=\mathbf{I}}$, то $\det \mathbf{R} \equiv 1$ (тобто $\mathbf{R}$ − власне ортогональний тензор). Поворот тензора $\mathbf{Q}$ довільного рангу q визначається поворотом ортогонального базису $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ [4, 6]:

$$\mathbf{Q} = \sum Q_{k_1 k_2 \dots k_q} \mathbf{i}_{k_1} \mathbf{i}_{k_2} \dots \mathbf{i}_{k_{q-1}} \mathbf{i}_{k_q} = \sum Q_{k_1 k_2 \dots k_q} \hat{\mathbf{i}}_{k_1} \cdot \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}}_{k_2} \cdot \mathbf{R} \dots \hat{\mathbf{i}}_{k_{q-1}} \cdot \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}}_{k_q} \cdot \mathbf{R}. \quad (2)$$

Тут сума без індексів означає додавання за всіма парами німих індексів в області зміни 1, 2, 3. Введемо $\mathbf{R}_q$ − ортогональний тензор довільного парного рангу $2q \ge 0$, за допомогою якого рівність (2) запишемо в безкомпонентному вигляді

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}} \overset{(q)}{\circ} \mathbf{R}_q \equiv \hat{\mathbf{Q}} \lhd \mathbf{R}_q = \mathbf{R}_q^{\mathsf{T}} \overset{(q)}{\circ} \hat{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{R}_q^{\mathsf{T}} \rhd \hat{\mathbf{Q}}. \quad (3)$$

Символом «$\overset{(q)}{\circ}$» позначаємо q-згортку («многокрапку») між парою тензорів, ранги яких не менші ніж q. Операція q-згортки охоплює скалярний добуток векторів ($q = 1$) та звичайне множення на скаляр ($q = 0$). Взагалі, якщо порядок згортки q дорівнює нулеві, то вона означає прямий тензорний добуток. Трикутна стрілка, ліва «$\lhd$» чи права «$\rhd$», означає згортку, порядок якої дорівнює рангу тензора, на який вона вказує (тут тензор $\hat{\mathbf{Q}}$). Індекс «T», застосований до тензора довільного рангу, означає інверсію векторних поліад тензора (скаляри та вектори не залежать від такої інверсії):

$$\mathbf{Q} = \sum Q_{k_1 k_2 \dots k_q} \mathbf{i}_{k_1} \mathbf{i}_{k_2} \dots \mathbf{i}_{k_{q-1}} \mathbf{i}_{k_q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \sum Q_{k_1 k_2 \dots k_q} \mathbf{i}_{k_q} \mathbf{i}_{k_{q-1}} \dots \mathbf{i}_{k_2} \mathbf{i}_{k_1}.$$

Оскільки $\hat{\mathbf{i}}_{k_j} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{k_j}$, то

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_j^{\mathsf{T}} \overset{(j)}{\circ} \hat{\mathbf{Q}} \overset{(q-j)}{\circ} \mathbf{R}_{q-j} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \overset{(q-1)}{\circ} \mathbf{R}_{q-1}, \qquad 0 \le j \le q. \quad (4)$$

На підставі поліадного подання (2), отримаємо рекурентні вирази для ортогональних тензорів з рангами, вище другого:

$$\mathbf{R}_0 \equiv 1, \quad \mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{R}, \quad \forall m > 1 \quad \mathbf{R}_m = [\![\mathbf{R}]\!]_m \overset{(m-1)}{\circ} \mathbf{R}_{m-1} = [\![\mathbf{R}_{m-1}]\!]_m \cdot \mathbf{R}. \quad (5)$$

Тут

$$[\![\mathbf{R}]\!]_K \equiv \mathbf{I}_K \overset{(K)}{\circ} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_K) = (\mathbf{I}_K \cdot \mathbf{R}) \overset{(K)}{\circ} \mathbf{I}_K = \mathbf{i}_{i_1} \dots \mathbf{i}_{i_{K-1}} \mathbf{R} \mathbf{i}_{i_{K-1}} \dots \mathbf{i}_{i_1}, \quad (6)$$

де $\mathbf{I}_N = \sum \mathbf{i}_{\ell_1} \dots \mathbf{i}_{\ell_N} \mathbf{i}_{\ell_1} \dots \mathbf{i}_{\ell_N} = \mathbf{I}_N^{\mathsf{T}}$ − N-інвертор, тензор рангу $2N$ такий, що $\mathbf{Q} \overset{(q)}{\circ} \mathbf{I}_q = \mathbf{I}_q \overset{(q)}{\circ} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$ для довільного $\mathbf{Q}$. Оскільки скаляри та вектори не залежать від інверсії, то $\mathbf{I}_0 \equiv 1$ та $\mathbf{I}_1 \equiv \mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$ − одиничний тензор другого рангу. На основі виразів (6) рекурентні формули (5) зводимо до явних:

$$\mathbf{R}_m = [\![\mathbf{R}]\!]_m \overset{(m-1)}{\circ} [\![\mathbf{R}]\!]_{m-1} \overset{(m-2)}{\circ} \dots \overset{(2)}{\circ} [\![\mathbf{R}]\!]_2 \cdot [\![\mathbf{R}]\!]_1 =$$

$$= [\![\mathbf{R}]\!]_1 \cdot [\![\mathbf{R}]\!]_2 \overset{(2)}{\circ} \dots \overset{(m-2)}{\circ} [\![\mathbf{R}]\!]_{m-1} \overset{(m-1)}{\circ} [\![\mathbf{R}]\!]_m. \quad (7)$$

Застосовуючи співвідношення (4)−(7), переконуємося, що ортогональні тензори високих рангів мають такі самі властивості, що й тензор другого рангу:

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}_m \overset{(m)}{\circ} \mathbf{R}_m^{\mathsf{T}} = \mathbf{J}_m, \quad \mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} \cdot \breve{\mathbf{R}} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}_m = \hat{\mathbf{R}}_m \overset{(m)}{\circ} \breve{\mathbf{R}}_m, \quad (8)$$

де $\mathbf{J}_m = \mathbf{I}_m \overset{(m)}{\circ} \mathbf{I}_m = [\![\mathbf{I}]\!]_m$ – одиничний тензор рангу $2m$. Відомо [3, 4], що приріст ортогонального тензора другого рангу $d\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\rho}$, де $\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{R}^{-1} \cdot d\mathbf{R}$ – безмежно малий відносний приріст, є антисиметричним тензором другого рангу. Поняття відносного приросту $\boldsymbol{\rho}$ поширюється для ортогональних тензорів вищих рангів:

$$\boldsymbol{\rho}_0 \equiv 0, \qquad \boldsymbol{\rho}_m \equiv \mathbf{R}_m^{\mathsf{T}} \overset{(m)}{\circ} d\mathbf{R}_m = \boldsymbol{\rho}_{m-1} \overset{(m-1)}{\circ} \mathbf{J}_m + [\![\boldsymbol{\rho}]\!]_m = \sum_{n=1}^{m} \mathbf{J}_m \overset{(n)}{\circ} [\![\boldsymbol{\rho}]\!]_n \qquad \forall m \geq 1. \tag{9}$$

Зокрема, $\boldsymbol{\rho}_1 \equiv \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{\rho} + (\mathbf{I}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}) : \mathbf{I}_2$, де двокрапка означає подвійну тензорну згортку (подвійний скалярний добуток прилеглих базисних векторів). Приріст (9) узагальнює поняття антисиметричного тензора, бо задовольняє m умов антисиметрії:

$$\boldsymbol{\rho}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{\rho} \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{I}_k \overset{(k)}{\circ} \boldsymbol{\rho}_m\right)^{\mathsf{T}} = -\mathbf{I}_k \overset{(k)}{\circ} \boldsymbol{\rho}_m, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Рівність (9) зведемо до пропорції між двома безмежно малими антисиметричними тензорами

$$\boldsymbol{\rho}_q = -\boldsymbol{\rho}_{q+1} : \boldsymbol{\rho}, \tag{11}$$

де

$$\boldsymbol{\rho}_N \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{J}_{N-1} \overset{(n)}{\circ} \mathbf{I}_n \overset{(n)}{\circ} \mathbf{I}_{2n} \overset{(2n-1)}{\circ} \mathbf{I}_n, \qquad N > 1, \tag{12}$$

– тензор рангу $2N$. Зокрема, $\boldsymbol{\Xi}_2 = \mathbf{I}_2$, $\boldsymbol{\Xi}_3 \equiv \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 : \mathbf{I}_4 \therefore \mathbf{I}_2$. Якщо позначити $\boldsymbol{\Xi}_1 = \mathbf{I}$, то вираз (11) охоплює також і випадок, коли $N = 0$.

Приріст тензора $\mathbf{Q}$, зумовлений безмежно малим поворотом $\boldsymbol{\rho}$, називатимемо обертовим і позначатимемо $d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Q}$. Диференціюючи вираз (3) при $\hat{\mathbf{Q}} = \mathrm{const}$ та беручи до уваги формулу (4), отримаємо

$$d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q} \lhd \boldsymbol{\rho}_q = -\mathbf{I}_q \rhd (\boldsymbol{\rho}_q \rhd \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}) = \mathbf{Q} \overset{(q-k)}{\circ} \boldsymbol{\rho}_{q-k} - \boldsymbol{\rho}_k \overset{(k)}{\circ} \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{13}$$

Враховуючи рівність $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q})^{\mathsf{T}}$ та формулу (10), отримаємо такі умови для обертового приросту (13):

$$0 = (\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}) \lhd (\mathbf{I}_k \overset{(k)}{\circ} \boldsymbol{\rho}_q) = (\mathbf{Q} \overset{(k)}{\circ} \mathbf{I}_k) \lhd (\boldsymbol{\rho}_q \rhd \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}) = (\mathbf{I}_k \overset{(k)}{\circ} \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}) \rhd d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Q}, \qquad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{14}$$

Це є узагальненням відомого диференціального рівняння для повороту вектора: $\mathbf{a} \cdot d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{a} = 0$. Різниця $\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Q} \equiv d\mathbf{Q} - d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Q}$ між повним та обертовим приростами є безобертовим приростом, який не враховує повороту $\boldsymbol{\rho}$. Зазначимо, що поділ повного приросту на обертовий і безобертовий залежить від повороту $\boldsymbol{\rho}$.

Тензори ізотропії та рівняння тензорної будови функції. Якщо довільний тензор не залежить від повороту, то його називають ізотропним: $\forall \mathbf{R} \;\; \hat{\mathbf{Q}} \equiv \hat{\mathbf{Q}} \lhd \mathbf{R}_q \;\Rightarrow\; \mathbf{Q} \equiv \hat{\mathbf{Q}}$. Ця умова тотожна диференціальній: $d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q} \lhd \boldsymbol{\rho}_S \equiv 0$. Базуючись на рівності (11), зведемо диференціальну умову до алгебраїчної:

$$\mathbf{Q} \lhd \boldsymbol{\Xi}_{q+1} : (\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2) = 0. \tag{15}$$

Ця умова тензорної ізотропії не залежить від поняття повороту. Для скалярів вона перетворюється на тотожність: $A\mathbf{I} : (\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2) \equiv 0$. Для довільного вектора $\mathbf{a}$ вона зводиться до рівняння $\sum_{k=1}^{3} \mathbf{i}_k(\mathbf{i}_k\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{i}_k) = 0$, єдиним розв'язком якого є нуль-вектор. Для довільного тензора другого рангу $\mathbf{A}$ умова (15) набуває вигляду

$$\mathbf{A} : \boldsymbol{\Xi}_3 = \mathbf{A} : (\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_2 + [\![\mathbf{A}^\mathsf{T}]\!]_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{A}^\mathsf{T}) : (\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2) = 0. \qquad (16)$$

Єдиним розв'язком цього рівняння є кульовий тензор. Тензори (12) природно назвати тензорами ізотропії.

У певному фіксованому базисі довільну тензорну функцію подають як тензор, компоненти якого є функціями від компонент тензорів-аргументів. Наприклад, у базисі $\mathbf{i}_j$, $j = 1,2,3$, маємо таке подання для функції рангу g:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) =$$
$$= \sum G_{k_1k_2\ldots k_{g-1}k_g}(X_{1\ldots1}, \ldots, X_{3\ldots3}, Y_{1\ldots1}, \ldots, Y_{3\ldots3})\mathbf{i}_{k_1}\mathbf{i}_{k_2} \ldots \mathbf{i}_{k_{g-1}}\mathbf{i}_{k_g}, \qquad (17)$$

залежної від тензорів $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ рангів x та y відповідно:

$$\mathbf{X} = \sum X_{\ell_1\ell_2\ldots\ell_{x-1}\ell_x}\mathbf{i}_{\ell_1}\mathbf{i}_{\ell_2}\ldots\mathbf{i}_{\ell_{x-1}}\mathbf{i}_{\ell_x},$$
$$\mathbf{Y} = \sum Y_{m_1m_2\ldots m_{y-1}m_y}\mathbf{i}_{m_1}\mathbf{i}_{m_2}\ldots\mathbf{i}_{m_{y-1}}\mathbf{i}_{m_y}.$$

Розглянемо цей найпростіший випадок тензорної функції від декількох змінних, щоб уникнути двоповерхових індексів.

За означенням [6] функція ізотропна, якщо спільний поворот її аргументів призводить до такого ж повороту її значення, а інакше − функція анізотропна. Зокрема, функція (17) ізотропна, коли зі спільним поворотом її змінних так само повертається її значення:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \mathbf{G}(\hat{\mathbf{X}} \lhd \mathbf{R}_x, \hat{\mathbf{Y}} \lhd \mathbf{R}_y) = \hat{\mathbf{G}} \lhd \mathbf{R}_g = \mathbf{G}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}) \lhd \mathbf{R}_g. \qquad (18)$$

Якщо ж зафіксувати одну зі змінних, наприклад $\mathbf{Y}$, то функція $\mathbf{G}_\mathbf{Y}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\big|_{\mathbf{Y}=\mathrm{const}}$ уже є анізотропною. Тобто поділ функцій на ізотропні та анізотропні не стосується будови тензорних функцій. Кожна анізотропна функція зводиться до ізотропної, якщо всі сталі тензорні параметри вважати змінними. Зокрема, вважаючи у поданні функції (17) вектори базису змінними, зводимо цю функцію до ізотропної:

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) =$$
$$= \sum G_{k_1k_2\ldots k_{g-1}k_g}(X_{1\ldots1}, \ldots, X_{3\ldots3}, Y_{1\ldots1}, \ldots, Y_{3\ldots3})\mathbf{i}_{k_1}\mathbf{i}_{k_2} \ldots \mathbf{i}_{k_{g-1}}\mathbf{i}_{k_g}. \qquad (19)$$

Дійсно, права частина функції (19) включає змінні вектори $\mathbf{i}_j$ (у цьому випадку їх, зрозуміло, не можна вважати довільним фіксованим базисом) та скалярні інваріанти

$$X_{\ell_1\ell_2\ldots\ell_{x-1}\ell_x} = \mathbf{X} \rhd \mathbf{i}_{\ell_1}\mathbf{i}_{\ell_2}\ldots\mathbf{i}_{\ell_{x-1}}\mathbf{i}_{\ell_x},$$
$$Y_{m_1m_2\ldots m_{y-1}m_y} = \mathbf{Y} \rhd \mathbf{i}_{m_1}\mathbf{i}_{m_2}\ldots\mathbf{i}_{m_{y-1}}\mathbf{i}_{m_y}, \qquad (20)$$

що залежать від векторів $\mathbf{i}_j$ та тензорів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$. Тому функція $\mathbf{G}^*(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3)$ не залежить від базису тензорних і векторних змінних. Оскільки скаляри (19) не залежать від повороту, то з огляду на (1)

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3) = \mathbf{G}^*(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{Y}},\hat{\mathbf{i}}_1,\hat{\mathbf{i}}_2,\hat{\mathbf{i}}_3) \lhd \mathbf{R}_g. \qquad (21)$$

У такий спосіб довільну анізотропну функцію зводимо до ізотропної. Таким чином, на відміну від об'єктивної анізотропії тензорів (15), у тому числі й таких, що є значеннями тензорних функцій і їх змінних, «анізотропія» тензорних функцій суб'єктивна. Тут і надалі вважатимемо, що функція

(17) ізотропна. Диференціюючи рівність (18) за мірою повороту $\mathbf{R}$ згідно з формулами (13), отримаємо

$$d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{G} = \mathbf{G} \lhd \boldsymbol{\rho}_g = (\mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}}\mathbf{X}) \rhd \boldsymbol{\rho}_x + (\mathbf{G}_{,\mathbf{Y}^\mathsf{T}}\mathbf{Y}) \rhd \boldsymbol{\rho}_y\,, \tag{22}$$

де нижній індекс після коми означає відповідну тензорну похідну [3, 5]. Підставляючи (11) у (22), отримаємо рівняння тензорної будови функції, що пов'язує значення самої функції, її змінних і частинних похідних:

$$\left(\mathbf{G} \lhd \boldsymbol{\Xi}_{g+1} - (\mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}}\mathbf{X}) \overset{(2x)}{\circ} \boldsymbol{\Xi}_{x+1} - (\mathbf{G}_{,\mathbf{Y}^\mathsf{T}}\mathbf{Y}) \overset{(2y)}{\circ} \boldsymbol{\Xi}_{y+1}\right) : (\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2) = 0\,. \tag{23}$$

За умовою (15) ізотропні змінні не створюють доданків в цьому рівнянні. Як наслідок, якщо всі тензорні параметри функції приймають лише ізотропні значення, то функція приймає також лише ізотропні значення і може бути зведена до скалярної функції, залежної від скалярних змінних (проте від цього тензорна природа фізичних величин не втрачається).

Якщо функція скалярна, то рівняння (23) набуває вигляду

$$\left[(\mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}}\mathbf{X}) \lhd \boldsymbol{\Xi}_{x+1} + (\mathbf{G}_{,\mathbf{Y}^\mathsf{T}}\mathbf{Y}) \lhd \boldsymbol{\Xi}_{y+1}\right] : (\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2) = 0\,. \tag{24}$$

Для скалярної функції від скалярних змінних рівняння (24) вироджується в нульову тотожність. Для довільної скалярної функції $f(\mathbf{a})$, залежної від єдиної векторної змінної, це рівняння має такий вигляд: $f_{,\mathbf{a}}\mathbf{a} : (\mathbf{J}_2 - \mathbf{I}_2) = 0$. Звідси випливає відомий результат: діада $f_{,\mathbf{a}}\mathbf{a}$ симетрична (тобто похідна $f_{,\mathbf{a}}$ паралельна до вектора $\mathbf{a}$). Для довільної скалярної функції $F(\mathbf{A})$, залежної від єдиної змінної – тензора другого рангу, рівність набуває вигляду рівняння $[\mathbf{A} \cdot F_{,\mathbf{A}^\mathsf{T}} + \mathbf{A}^\mathsf{T} \cdot F_{,\mathbf{A}}] : (\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2) = 0$, з якого випливає, що тензор у квадратних дужках симетричний. Якщо змінна $\mathbf{A}$ – симетричний тензор, то рівняння (24) зводиться до відомої рівності про комутативність симетричної тензорної змінної і похідної за нею від скалярної функції [4]:

$$\mathbf{A} \cdot F_{,\mathbf{A}} = F_{,\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}\,.$$

Диференціювання функцій з обертовими параметрами. Якщо приріст (13) змінної обертовий, то й сама змінна може бути названа обертовим параметром тензорної функції. Вираз (3) як розв'язок рівняння (14) є явним виразом для обертового параметра. Казатимемо, що різні обертові параметри є *спільно обертовими*, якщо їхні прирости визначаються одним і тим же поворотом $\boldsymbol{\rho}$. Наприклад, вектори $\mathbf{i}_j$ у виразі (21) спільно обертові. Рівняння тензорної будови отримано власне за умови, що всі змінні функції змінюються як спільно обертові. Говорячи про поворот анізотропних матеріалів, доцільно ввести поняття обертовних тензорних функцій. А саме, якщо функція не залежать від анізотропних констант, то її можна назвати обертовною, а інакше – необертовною. Необертовна функція стає обертовною, якщо її константи вважати обертовими параметрами. Обертовну функцію, що залежить від обертових параметрів, варто назвати анізотропною, а інакше – ізотропною.

У тензорному позначенні повний диференціал функції (17) має такий вигляд [4, 6]:

$$d\mathbf{G} = \mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}} \rhd d\mathbf{X} + \mathbf{G}_{,\mathbf{Y}^\mathsf{T}} \rhd d\mathbf{Y}\,. \tag{25}$$

Нехай ця функція обертовна. Віднімаючи (22) від (25), отримаємо вираз для безобертового диференціала обертовної функції:

$$\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{G} = \mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}} \rhd \partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{X} + \mathbf{G}_{,\mathbf{Y}^\mathsf{T}} \rhd \partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Y}\,. \tag{26}$$

Якщо змінна $\mathbf{Y}$ – обертовий параметр: $\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{Y}} \lhd \mathbf{R}_y$, то відповідний доданок у рівнянні (26) дорівнює нулеві. Тоді $\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{G} = \mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}} \rhd \partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{X}$, і у цьому випадку для повного приросту функції отримаємо вираз

$$d\mathbf{G} = \mathbf{G} \lhd \boldsymbol{\rho}_g + \mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}} \rhd (d\mathbf{X} - \mathbf{X} \lhd \boldsymbol{\rho}_x) =$$

$$= \mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}} \rhd d\mathbf{X} - \left(\mathbf{G} \lhd \boldsymbol{\Xi}_{q+1} - \mathbf{G}_{,\mathbf{X}^\mathsf{T}} \rhd \mathbf{X} \lhd \boldsymbol{\Xi}_{x+1}\right) : \boldsymbol{\rho}\,, \qquad (27)$$

з якого вилучено похідну за обертовим параметром.

Висновок. Застосовуючи поділ диференціала на обертовий і безобертовий, можна уникати диференціювання за обертовими параметрами анізотропії матеріалу. Усі диференціальні співвідношення, що стосуються анізотропних матеріалів, за відсутності обертання поширюються на випадок обертання, якщо повні диференціали вважати безобертовими (26). У виразі для повного диференціала спільний поворот всіх змінних функції враховує обертовий приріст її значення, зокрема, у формулі (27) – перший доданок. У механіці деформівного тіла спільний поворот всіх тензорних змінних з параметрами анізотропії включно є власне поворотом матеріалу. У цьому випадку безмежно малий поворот $\boldsymbol{\rho}$ визначається кососиметричною частиною градієнта безмежно малого поля накладених переміщень [2, 4, 7].

1. *Годунов С. К., Михайлова Т. Ю.* Представления группы вращений и сферические функции. – Новосибирск: Научн. книга, 1998. – 208 с.
2. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.
3. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.* Акустомагнитоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 288 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 3.)
4. *Лурье И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
5. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991.– 560 с.
6. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 264 с.
7. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
8. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ: Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции. – Москва: Мир, 1987. – 735 с.
9. *Krupka D., Janyska J.* Lectures on differential invariants. – Brno: Univ. J. E. Purkyne, 1990. – 193 p.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ФУНКЦИЙ СОСТОЯНИЯ ТЕЛА С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрено общее представление тензорной функции состояния анизотропного материала в евклидовом пространстве, когда параметры анизотропии являются переменными тензорами произвольного ранга. На основании обобщения ортогонального и антисимметричного тензоров на высшие ранги записаны в прямом, безкомпонентном виде уравнение тензорного строения вращаемой функции произвольного ранга и правило ее дифференцирования. Эти соотношения можно применять для задач суперпозиции тензорных и векторных состояний в анизотропных деформируемых материалах, неразрушающего контроля напряжений.

DIFFERENTIATION OF TENSOR STATE FUNCTIONS WITH TAKING INTO ACCOUNT ROTATION

The general representation for tensor state function of the anisotropic material is considered in the Euclidean space when anisotropy parameters are variable tensors with a rank greater than two. Basing on generalization of orthogonal and antisymmetric tensors for the ranks greater than two, the constitutive equation and differentiation rule are written down for an arbitrary rotational tensor function. These relations can be used in the problems of superposition of tensor and vector state fields in anisotropic solids, for nondestructive stress control, in particular.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
31.07.07