УДК 517.928

А. М. Погребицкая

К ВОПРОСУ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ВКБ–ГАЛЕРКИНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предложен алгоритм решения неоднородных сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, основанный на модели гибридного метода ВКБ–Галеркина. Эффективность подхода проиллюстрирована при решении прикладной задачи, которая описывает отвод тепла через излучатель переменной геометрии.

Гибридные асимптотические методы являются одним из новых перспективных подходов к решению краевых задач математической физики с малыми и большими параметрами [5]. Применение этого подхода подтвердило достаточно высокую эффективность в ряде задач механики деформируемого твердого тела, которые сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Известно, что такой тип уравнений не имеет аналитического решения, поэтому для решения конкретных задач используют численные методы, которые, однако, не дают возможности провести качественный анализ получаемых решений.

Гибридный метод (Wentzel–Kramer–Brillouin) ВКБ–Галеркина применен в работах [1, 6, 7] для решения прикладных краевых задач механики с определенного вида сингулярными дифференциальными уравнениями. Особый интерес представляют неоднородные дифференциальные уравнения, содержащие первую производную.

Целью этой статьи является разработка и описание математической модели гибридного метода ВКБ–Галеркина для сингулярных неоднородных дифференциальных уравнений, содержащих первую производную, и применение предложенного подхода к решению задачи об отводе тепла через излучатель конической формы.

1. Математическая модель метода. Пусть необходимо найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varepsilon^2 U'' + a(x)U' + b(x)U = c(x)\,, \tag{1}$$

где $U(x,\varepsilon)$ – искомая функция, удовлетворяющая на концах интервала следующим условиям:

$$U(d,\varepsilon) = U_d\,, \qquad U(f,\varepsilon) = U_f\,,$$

$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – заданные функции, не обращающиеся в ноль на интервале $[d,\ f]$; ε – параметр.

Допуская, что решение $U(x,\varepsilon)$ задачи (1) существует и единственное, будем его искать в виде суммы

$$U(x,\varepsilon) = U^{\text{о.о}} + U^{\text{ч.р.}}\,,$$

где $U^{\text{о.о}}$ – общее решение однородного уравнения, $U^{\text{ч.р.}}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим соответствующее (1) однородное уравнение

$$\varepsilon^2 U'' + a(x)U' + b(x)U = 0\,. \tag{2}$$

Для нахождения решения уравнения (2) необходимо исключить производную первого порядка [2]. Если $\dfrac{a(x)}{\varepsilon^2}$ имеет непрерывную производную первого порядка и если положить $Y(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{a(x)}{\varepsilon^2}dx\right)$, то заменой $U = Z \cdot Y$ уравнение (2) приведем к уравнению

$$\varepsilon^2 Z'' - g(x)Z = 0\,, \qquad \text{где} \qquad g(x) = \frac{a^2(x)}{4\varepsilon^2} + \frac{a'(x)}{2} - b(x). \tag{3}$$

Применяя метод фазовых интегралов [4], запишем

$$Z(x,\varepsilon) = \exp\left(\int_d^x (\varepsilon^{-1}\varphi_0 + \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \ldots)\,dx\right), \tag{4}$$

где $\varphi_i(x)$ − неизвестные функции.

Ограничиваясь одним членом разложения (4), представим ВКБ-решение однородного уравнения (3) как

$$Z(x,\varepsilon) = c_1 \exp\int_d^x (\varepsilon^{-1}\varphi_{0_1})\,dx + c_2 \exp\int_d^x (\varepsilon^{-1}\varphi_{0_2})\,dx\,,$$

где $\varphi_{0_{1,2}} = \pm\sqrt{g(x)}$.

В ходе решения не было учтено влияния членов суммы второго и выше порядков, т. е. решение было построено в нулевом приближении. Если для данного типа уравнений использовать высшие приближения, то это приводит к большой сложности вычислений и не всегда осуществимо.

Гибридный метод ВКБ−Галеркина соединяет позитивные особенности метода фазовых интегралов [4] и метода Галеркина и позволяет построить более эффективное решение по величине параметра, который может быть как малым, так и большим.

Метод осуществляется в два шага. На первом шаге находятся значения функций φ_i ВКБ методом. На втором шаге представим решение Z в виде

$$Z_H = \exp\left(\int_d^x \delta_0\varphi_0\,dx\right).$$

Находя первую и вторую производные и подставляя их в исходное уравнение (3), получим выражение для невязки

$$R = \varepsilon^2(\delta_0^2\varphi_0^2 + \delta_0\varphi_0') - g(x).$$

Применяя критерий ортогональности Галеркина и учитывая, что

$$\varphi'_{0_{1,2}} = \pm\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\,,$$

для определения неизвестного параметра δ_0 получим квадратное уравнение

$$\delta_0^2\int_d^f \varepsilon^2(\pm g^{3/2}(x))\,dx + \delta_0\int_d^f \varepsilon^2\,\frac{g'(x)}{2}\,dx - \int_d^f (\pm g^{3/2}(x))\,dx = 0\,,$$

решение которого запишем в виде

$$\delta_{0_{1,2}} = \pm\frac{g(d) - g(f)}{4\int_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(f) - g(d)}{4\int_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx}\right)^2}\,. \tag{5}$$

Окончательное гибридное ВКБ−Галеркина решение однородного уравнения (2) с учетом (5) и замены $U = Z \cdot Y$ примет вид

$$U_H^{\text{o.o}}(x,\varepsilon) = c_1 \exp\left[\int\limits_d^x \left(\frac{g(d)-g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(f)-g(d)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx}\right)^2}\,\right)\sqrt{g(x)}\,dx -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int\limits_d^x \frac{a(x)}{\varepsilon^2}\,dx\right] + c_2 \exp\left[\int\limits_d^x \left(\frac{g(d)-g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(f)-g(d)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx}\right)^2}\,\right)\sqrt{g(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_d^x \frac{a(x)}{\varepsilon^2}\,dx\right].$$

Обозначим

$U_1(x) =$

$$= \exp\left[\int\limits_d^x \left(\frac{g(d)-g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(f)-g(d)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx}\right)^2}\,\right)\sqrt{g(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_d^x \frac{a(x)}{\varepsilon^2}\,dx\right],$$

$U_2(x) =$

$$= \exp\left[\int\limits_d^x \left(\frac{g(d)-g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx} - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(f)-g(d)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx}\right)^2}\,\right)\sqrt{g(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_d^x \frac{a(x)}{\varepsilon^2}\,dx\right].$$

Функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (1). Частное решение неоднородного уравнения получаем методом вариации постоянных. Обозначим через $W_\nu(x)$ детерминант, получающийся из соответствующего фундаментальной системе детерминанта Вронского $W(x)$ заменой элементов ν-го столбца на $\{0, c(x)\}$:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & U_2(x) \\ c(x) & U_2'(x) \end{vmatrix}, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} U_1(x) & 0 \\ U_1'(x) & c(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда функция

$$U_H = c_1 U_1(x) \int \frac{W_1(x)}{\varepsilon^2 W(x)}\,dx + c_2 U_2(x) \int \frac{W_2(x)}{\varepsilon^2 W(x)}\,dx$$

является частным решением уравнения (1).

2. Применение метода. В качестве примера рассмотрим задачу для дифференциального уравнения второго порядка такую, для которой существует точное решение:

$$\varepsilon^2 U'' + U' + U = \sin(2\pi x), \qquad U(0) = U(1) = 0\,. \tag{6}$$

Эта задача была рассмотрена в работе [5], и для нее построено гибридное решение в виде объединения методов сращивания асимптотических разложений и Галеркина. Точное решение уравнения (6) имеет вид

$$U(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \frac{4\pi}{\sqrt{1-4\varepsilon^2}\,(k_1^2 + 4\pi^2)} \left(\cos(2\pi x) - \frac{k_1}{2\pi} \sin(2\pi x) \right) -$$

$$- \frac{4\pi}{\sqrt{1-4\varepsilon^2}\,(k_2^2 + 4\pi^2)} \left(\cos(2\pi x) - \frac{k_2}{2\pi} \sin(2\pi x) \right),$$

где $k_1 = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}$, $k_2 = -\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}$; c_1 и c_2 – произвольные постоянные, которые находим, используя краевые условия.

Результаты численного анализа решений, полученных с использованием гибридного метода, и точного решения, представлены на рис. 1 (при $\varepsilon = \sqrt{0.3}$) и рис. 2 (при $\varepsilon = 10$). (На рис. 1, 2 обозначено: $T(x)$ – точное решение, $U(x)$ – ВКБ–Галеркина решение, полученное с учетом замены в форме $U = Z \cdot Y$, и $U_1(x)$ – ВКБ–Галеркина решение без использования такой замены.)

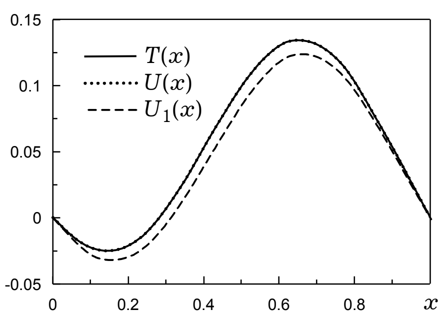

Рис. 1

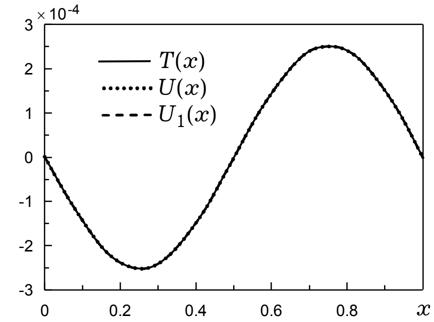

Рис. 2

На рис. 1 видим, что гибридное решение $U(x)$ с использованием замены, которая преобразует производную первого порядка, и точное решение $T(x)$ совпадают, в отличие от гибридного решения $U_1(x)$ без замены. Метод ВКБ–Галеркина с преобразованной первой производной полностью повторяет точное решение и для больших значений параметра. На рис. 2 очевидно полное совпадение решений при $\varepsilon = 10$.

Применим данную модель к задаче, которая описывает отвод тепла через излучатель конической формы.

Рассмотрим теплоизлучатель конической формы, выступающий из плоской стенки, температура поверхности которой равна T_S. Пусть радиус основания и длина излучателя равны R и L соответственно. Излучатель находится в жидкости с температурой T_∞.

Искомое распределение температуры удовлетворяет уравнению [3]

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dT}{dx} \right) = \frac{2h}{K} \left(\frac{L^2 + R^2}{R^2} \right)^{1/2} (T - T_\infty)$$

и граничным условиям

$$\frac{dT(0)}{dx} = 0, \qquad T(L) = T_S,$$

где h и k – коэффициенты конвекционного переноса тепла и теплопроводности излучателя соответственно.

Введём безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \qquad \theta = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S}$$

и положим

$$m^2 = \frac{2hL}{k}\left[\frac{L^2+R^2}{R^2}\right]^{1/2}.$$

Тогда исходное уравнение распределения температуры по теплоизлучателю примет вид

$$\frac{\bar{x}}{m^2}\frac{d^2\theta}{d\bar{x}^2} + \frac{2}{m^2}\frac{d\theta}{d\bar{x}} = \theta - 1, \qquad (7)$$

а граничные условия запишутся как

$$\frac{d\theta(0)}{d\bar{x}} = 0, \qquad \theta(1) = 0.$$

Положим $\frac{1}{m^2} = \varepsilon^2$, тогда уравнение (7) примет вид

$$\varepsilon^2\bar{x}\frac{d^2\theta}{d\bar{x}^2} + 2\varepsilon^2\frac{d\theta}{d\bar{x}} - \theta = -1.$$

Пусть $\theta(1) = 0$, $\theta'(1) = 1$. Для получения численного решения использовался метод Рунге–Кутта в среде программного пакета «Mathcad».

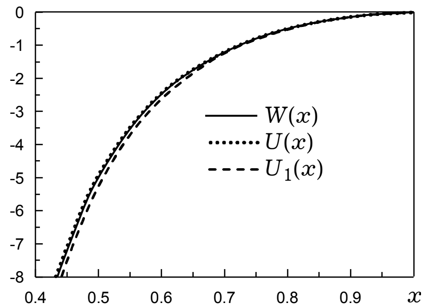

Рис. 3

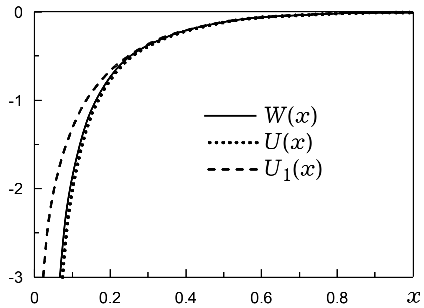

Рис. 4

На рис. 3 построены графики численного и гибридных решений с преобразованной первой производной и без преобразований для $\varepsilon = \sqrt{0.1}$. (На рис. 3, 4 обозначено: $W(x)$ – численное решение, $U(x)$ – ВКБ–Галеркина решение, полученное с заменой $U = Z \cdot Y$, и $U_1(x)$ – ВКБ–Галеркина решение без использования такой замены.) Первые два хорошо сочетаются, в то время как непосредственное решение без применения замены, дает заметную погрешность. При увеличении ε гибридное решение $U(x)$ продолжает хорошо сочетаться с численным. Результаты, полученные с использованием этого же метода без преобразований первой производной, значительно отличаются от численного решения, что свидетельствует о том, что с помощью введения новой переменной необходимо исключить первую производную.

Изменим начальное условие производной, то есть начальное значение скорости распространения тепла:

$$\theta(1) = 0, \qquad \theta'(1) = 0.$$

Это приведет к существенным изменениям поведения системы. Проследим за точностью полученных решений, когда параметр не является малым. Так, на рис. 4 сравнение ведется для $\varepsilon = 1.5$. Как видно, гибридный подход с преобразованной первой производной дает здесь незначительную погрешность. Метод ВКБ–Галеркина без учета первой производной при таком значении параметра дает неприемлемый результат.

Итак, в данной статье проиллюстрировано, что метод ВКБ–Галеркина в ряде случаев является эффективным средством построения приближенных аналитических решений сингулярных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в частности, в задачах о теплоизлучении систем с переменными геометрическими параметрами.

1. *Грищак В. З., Дмітрієва О. М.* Застосування гібридного ВКБ–Гальоркін методу до розв'язання деяких крайових задач механіки // Доп. АН України. – 1999. – № 4. – С. 63–67.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука,1976. – 576 с.
3. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – Москва: Мир, 1982. – 294 с.
4. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов. – Москва: Мир, 1965. – 238 с.
5. *Geer J. F., Andersen C. M.* A hybrid-perturbation-Galerkin technique that combines multiple expansions // SIAM. J. Appl. Math. – 1990. – **50**, No. 5. – P. 1474–1495.
6. *Gristchak V. Z., Dmitrijeva Ye. M.* A hybrid WKB–Galerkin method and its application // Technische Mechanik. – 1995. – **15**, No. 4. – P. 281–294.
7. *Gristchak V. Z., Ganilova O. A.* Application of a hybrid WKB–Galerkin method in control of the dynamic instability of a piezolaminated imperfect column // Technische Mechanik. – 2006. – **26**, No. 2. – P. 106–116.

ДО ПИТАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДУ ВКБ–ГАЛЬОРКІНА В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Запропоновано алгоритм розв'язування неоднорідних сингулярних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами, який базується на моделі гібридного методу ВКБ–Гальоркіна. Ефективність підходу проілюстровано на розв'язанні прикладної задачі, яка описує відведення тепла через випромінювач змінної геометрії.

TO THE QUESTION OF EFFECTIVENESS OF WKB–GALERKIN METHOD IN DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

In this paper an algorithm for solution of the heterogeneous singular second-order differential equations with the variable coefficients, based on the model of the hybrid WKB–Galerkin method, is proposed. The efficiency of this approach is illustrated on solution of the applied problem of the mathematical physics that describes the heat removal through the variable geometry emitter.

Запорожск. нац. ун-т, Запорожье

Получено 02.03.07