УДК 517.983.54

В. Н. Сущ

# СУТТЄВА САМОСПРЯЖЕНІСТЬ ДИСКРЕТНОГО МАГНІТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДІНҐЕРА

*Доведено суттєву самоспряженість для напівобмеженого знизу дискретного магнітного оператора Шредінґера в просторі, який є комбінаторною моделлю двовимірного евклідового простору. При побудові дискретної моделі використовується схема дискретизації Дезіна.*

**Вступ.** Нехай $\Lambda_k^p(\mathbb{R}^2)$ – множина всіх $k$-гладких (тобто класу $C^k$) комплекснозначних $p$-форм в $\mathbb{R}^2$ і нехай $\Lambda^p(\mathbb{R}^2) = \Lambda_\infty^p(\mathbb{R}^2)$. Означимо *магнітний потенціал* як дійснозначну 1-форму $A \in \Lambda_1^1(\mathbb{R}^2)$, тобто

$$A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 ,$$

де $A_1, A_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ – дійснозначні функції.

Введемо інваріантний скалярний добуток для $p$-форм з компактним носієм в $\mathbb{R}^2$ так:

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi \wedge * \,\bar{\psi} , \tag{1}$$

де «$*$» – операція метричного спряження форм ($*$-оператор Годжа); $\wedge$ – операція зовнішнього множення, а риска над $\psi$ означає комплексне спряження. Розглянемо поповнення лінійних просторів гладких форм за нормою, що породжується скалярним добутком (1). Утворені гільбертові простори будемо позначати через $L^2(\mathbb{R}^2)$ для 0-форм (функцій) і через $L^2\Lambda^p(\mathbb{R}^2)$ – для $p$-форм, $p = 1, 2$.

Нехай $d$ – оператор зовнішнього диференціювання. Введемо деформований диференціал за правилом

$$d_A : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to \Lambda_1^1(\mathbb{R}^2), \qquad \varphi \to d\varphi + i\varphi A , \tag{2}$$

де $i^2 = -1$ та $A$ – магнітний потенціал. Скалярний добуток (1) дозволяє означити оператор, формально спряжений з $d_A$:

$$\delta_A : \Lambda_1^1(\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{R}^2) .$$

Тоді *магнітний лапласіан* $\Delta_A$ (лапласіан $\Delta$ з потенціалом $A$) можемо означити за формулою

$$-\Delta_A \equiv \delta_A d_A : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{R}^2) . \tag{3}$$

Якщо ототожнити магнітний потенціал $A$ з оператором множення

$$A : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to \Lambda_1^1(\mathbb{R}^2), \qquad \varphi \to \varphi A ,$$

то оператор $\delta_A$ зображається у вигляді

$$\delta_A \omega = (\delta - iA^*)\,\omega , \tag{4}$$

де $\delta$ і $A^*$ – оператори, формально спряжені з $d$ і $A$ відповідно. Використовуючи (2), (4), можемо переписати магнітний лапласіан $\Delta_A$:

$$-\Delta_A \varphi = (\delta - iA^*)(d\varphi + iA\varphi) =$$

$$= -\Delta\varphi - iA^* d\varphi + i\delta(A\varphi) + A^* A\varphi .$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2008. – 51, № 1. – С. 74-81.

Тепер розглянемо магнітний оператор Шредінґера

$$H_{A,V} = -\Delta_A + V\,, \tag{5}$$

де $V$ − дійснозначна функція, яку ще називають *електричним потенціалом* і $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Припустимо, що оператор $H_{A,V}$ напівобмежений знизу на $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, тобто існує константа $c \in \mathbb{R}$ така, що

$$(H_{A,V}\varphi,\, \varphi) \ge -c(\varphi,\, \varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\,. \tag{6}$$

Тут $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ − множина всіх $C^\infty$ функцій з компактним носієм в $\mathbb{R}^2$. Тоді відомо (див. [10]), що оператор (5) є суттєво самоспряженим на $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Головною метою цієї праці є дослідження суттєвої самоспряженості дискретного магнітного оператора Шредінґера на комбінаторному об'єкті, що відповідає $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. У роботі [4] автором запропоновано таку дискретну модель магнітного лапласіана (3), яка зберігає геометричну структуру вихідного континуального об'єкта, а також доведено самоспряженість оператора дискретної задачі Діріхле для магнітного лапласіана. В обмежених областях, що дає скінченновимірність відповідних гільбертових просторів дискретної задачі, результати [4] легко узагальнюються на випадок магнітного оператора Шредінґера.

У цій роботі покажемо, що напівобмежений знизу дискретний магнітний оператор Шредінґера, як і в континуальному випадку, має єдину самоспряжену реалізацію. Слід підкреслити, що, крім умов (6), ніяких інших обмежень на поведінку на безмежності дискретних аналогів потенціалів $A$, $V$ не накладається. Наш підхід базується на формалізмі, який запропонував А. А. Дезін у [2]. Будемо також користуватися результатами праці [4].

Зауважимо, що дискретний магнітний лапласіан і дискретні магнітні оператори Шредінґера є достатньо популярними об'єктами дослідження серед математиків і фізиків. Існує багато різноманітних підходів (відмінних від запропонованого в цій роботі) як до побудови дискретних моделей, так і до дослідження відповідних різницевих операторів (див., наприклад, [5−9, 11] і посилання в цих працях). У переважній більшості з них особлива увага приділяється вивченню спектральних властивостей дискретних магнітних операторів Шредінґера на безмежних графах. Що стосується дослідження суттєвої самоспряженості дискретних операторів, то огляд різних аспектів цієї проблеми можна знайти в [1, 12].

**1. Основні комбінаторні конструкції.** У цьому розділі коротко нагадаємо означення основних комбінаторних операцій, які будемо використовувати при побудові дискретних аналогів операторів (3), (5). Нехай $\mathfrak{C}(2)$ − двовимірний комплекс − комбінаторна модель $\mathbb{R}^2$ (детальніше див. [2, 4]). Комплекс $\mathfrak{C}(2)$ можна подати у вигляді $\mathfrak{C}(2) = \mathfrak{C}^0 \oplus \mathfrak{C}^1 \oplus \mathfrak{C}^2$, де $\mathfrak{C}^p$ − дійсний лінійний простір $p$-вимірних ланцюгів, $p = 0,1,2$. Позначимо через $\{x_{k,s}\}$, $\{e^1_{k,s}, e^2_{k,s}\}$, $\{\Omega_{k,s}\}$, $k,s \in \mathbb{Z}$, множини базисних елементів просторів $\mathfrak{C}^0$, $\mathfrak{C}^1$, $\mathfrak{C}^2$ відповідно. Для зручності введемо на множині індексів оператори зсуву

$$\tau k = k+1, \qquad \sigma k = k-1\,.$$

Граничний оператор $\partial$ на базисних елементах $\mathfrak{C}(2)$ задається як

$$\partial x_{k,s} = 0, \qquad \partial e^1_{k,s} = x_{\tau k,s} - x_{k,s}, \qquad \partial e^2_{k,s} = x_{k,\tau s} - x_{k,s}\,,$$

$$\partial \Omega_{k,s} = e^1_{k,s} + e^2_{\tau k,s} - e^1_{k,\tau s} - e^2_{k,s}\,. \tag{7}$$

Введемо дуальний об'єкт − комплекс, спряжений з $\mathfrak{C}(2)$. Позначимо його через $K(2)$ і нехай це буде лінійний простір комплекснозначних функцій над $\mathfrak{C}(2)$. Нехай $K^0, K^1, K^2$ − лінійні простори, спряжені з $\mathfrak{C}^0, \mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^2$, тобто мають базиси вигляду відповідно $\{x^{k,s}\}$, $\{e_1^{k,s}, e_2^{k,s}\}$, $\{\Omega^{k,s}\}$. Тоді $K(2) = K^0 \oplus K^1 \oplus K^2$ можемо розглядати як комплекс комплекснозначних коланцюгів відповідної вимірності. Надалі будемо називати коланцюги формами, підкреслюючи їхню близькість з відповідними континуальними об'єктами − диференціальними формами. Тоді 0-, 1-, 2-форми $\varphi \in K^0$, $\omega = (u, v) \in K^1$, $\eta \in K^2$ мають вигляд

$$\varphi = \sum_{k,s} \varphi_{k,s} x^{k,s}, \qquad \omega = \sum_{k,s} (u_{k,s} e_1^{k,s} + v_{k,s} e_2^{k,s}), \qquad \eta = \sum_{k,s} \eta_{k,s} \Omega^{k,s}, \tag{8}$$

де $\varphi_{k,s}, u_{k,s}, v_{k,s}, \eta_{k,s} \in \mathbb{C}$ для всіх $k, s \in \mathbb{Z}$.

Операцію спарення для базисних елементів комплексів $\mathfrak{C}(2)$ і $K(2)$ означимо за правилом

$$\langle x_{k,s}, x^{p,q} \rangle = \langle e_{k,s}^1, e_1^{p,q} \rangle = \langle e_{k,s}^2, e_2^{p,q} \rangle = \langle \Omega_{k,s}, \Omega^{p,q} \rangle = \delta_{k,s}^{p,q}, \tag{9}$$

де $\delta_{k,s}^{p,q}$ − символ Кронекера. Спарення (9) на довільні форми (8) поширюється за лінійністю.

Граничний оператор (7) індукує у спряженому комплексі $K(2)$ дуальну операцію − кограничний оператор $d^c$:

$$\langle \partial a, \alpha \rangle = \langle a, d^c \alpha \rangle, \tag{10}$$

де $a \in \mathfrak{C}(2)$, $\alpha \in K(2)$. Кограничний оператор $d^c : K^p \to K^{p+1}$ будемо вважати дискретним аналогом операції зовнішнього диференціювання $d$. Надалі будемо використовувати такі різницеві подання оператора $d^c$:

$$\langle e_{k,s}^1, d^c \varphi \rangle = \varphi_{\tau k,s} - \varphi_{k,s} \equiv \Delta_k \varphi_{k,s},$$

$$\langle e_{k,s}^2, d^c \varphi \rangle = \varphi_{k,\tau s} - \varphi_{k,s} \equiv \Delta_s \varphi_{k,s},$$

$$\langle \Omega_{k,s}, d^c \omega \rangle = v_{\tau k,s} - v_{k,s} - u_{k,\tau s} + u_{k,s} \equiv \Delta_k v_{k,s} - \Delta_s u_{k,s}. \tag{11}$$

Введемо в комплексі $K(2)$ операцію множення, яку будемо вважати аналогом зовнішнього множення диференціальних форм. Позначимо цю операцію через $\cup$ і означимо за правилом

$$x^{k,s} \cup x^{k,s} = x^{k,s}, \qquad e_2^{k,s} \cup e_1^{k,\tau s} = -\Omega^{k,s},$$

$$x^{k,s} \cup e_1^{k,s} = e_1^{k,s} \cup x^{\tau k,s} = e_1^{k,s}, \qquad x^{k,s} \cup e_2^{k,s} = e_2^{k,s} \cup x^{k,\tau s} = e_2^{k,s},$$

$$x^{k,s} \cup \Omega^{k,s} = \Omega^{k,s} \cup x^{\tau k,\tau s} = e_1^{k,s} \cup e_2^{\tau k,s} = \Omega^{k,s}, \tag{12}$$

припускаючи, що добуток дорівнює нулеві у всіх інших випадках. На форми (8) $\cup$-множення поширюємо за лінійністю.

Позначимо через $\varepsilon^{k,s}$ довільний базисний елемент $K(2)$. Тоді введемо операцію «$*$», покладаючи

$$\varepsilon^{k,s} \cup * \varepsilon^{k,s} = \Omega^{k,s}. \tag{13}$$

Використовуючи (12), отримуємо

$$* x^{k,s} = \Omega^{k,s}, \qquad * e_1^{k,s} = e_2^{\tau k,s}, \qquad * e_2^{k,s} = -e_1^{k,\tau s}, \qquad * \Omega^{k,s} = x^{\tau k,\tau s}.$$

Операцію «$*$» за лінійністю поширюємо на довільні форми.

Нехай $\alpha \in K^p$ – довільна $p$-форма, тобто

$$\alpha = \sum_{k,s} \alpha_{k,s} \varepsilon^{k,s}. \tag{14}$$

Позначимо через $K_0^p$ множину всіх дискретних $p$-форм з компактним носієм, тобто, якщо $\alpha \in K_0^p$, то тільки скінченна кількість компонент $\alpha_{k,s}$ в (14) є відмінною від нуля. Тепер нехай

$$\Omega = \sum_{k,s} \Omega_{k,s}, \qquad k,s \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

де $\Omega_{k,s}$ – двовимірний базисний елемент $\mathfrak{C}(2)$. Зазначимо, що будемо також користуватись позначенням $\Omega = \Omega_N$, якщо сума (15) є скінченною і $-N \le k, s \le N$, $N \in \mathbb{N}$.

Наступне співвідношення

$$(\alpha, \beta) = \langle \Omega, \alpha \cup * \bar{\beta} \rangle, \tag{16}$$

де $\alpha, \beta \in K_0^p$, дає коректне означення скалярного добутку для дискретних $p$-форм (див. (1)). Використовуючи (9), (12) та (13), формулу (16) можемо переписати так:

$$(\alpha,\beta) = \sum_{k,s} \alpha_{k,s} \bar{\beta}_{k,s}. \tag{17}$$

Скалярний добуток (16) дозволяє означити оператор, формально спряжений з $d^c$, а саме, оператор $\delta^c : K^{p+1} \to K^p$, який задовольняє таке співвідношення:

$$(d^c\alpha, \beta) = (\alpha, \delta^c\beta), \qquad \alpha \in K_0^p, \qquad \beta \in K_0^{p+1}. \tag{18}$$

Легко показати, що

$$\delta^c\beta = (-1)^{p+1} *^{-1} d^c * \beta, \tag{19}$$

де «$*^{-1}$» є операцією, оберненою до «$*$», тобто $*^{-1}* = 1$. Отже, оператор $\delta^c$ можемо вважати дискретним аналогом кодиференціала $\delta$. Враховуючи (11), для $\omega \in K^1$ маємо

$$\delta^c\omega = \sum_{k,s} (-\Delta_k u_{\sigma k,s} - \Delta_s v_{k,\sigma s}) x^{k,s}. \tag{20}$$

Таким чином, дискретний аналог оператора Лапласа має вигляд

$$-\Delta^c = \delta^c d^c + d^c \delta^c : K^p \to K^p. \tag{21}$$

Очевидно, оскільки $\delta^c\varphi = 0$ для $\varphi \in K^0$, то

$$-\Delta^c\varphi = \delta^c d^c \varphi. \tag{22}$$

**2. Дискретний аналог магнітного лапласіана.** Нехай дійснозначна 1-форма

$$A = \sum_{k,s} \left( A_{k,s}^1 e_1^{k,s} + A_{k,s}^2 e_2^{k,s} \right),$$

де $A_{k,s}^1, A_{k,s}^2 \in \mathbb{R}$, є дискретним аналогом магнітного потенціалу. Тоді дискретний аналог деформованого диференціала (2) означимо так:

$$d_A^c : K^0 \to K^1, \qquad \varphi \to d^c\varphi + i\varphi \cup A. \tag{23}$$

Враховуючи (11), (12), отримуємо

$$d_A^c\varphi = \sum_{k,s} \left( (\Delta_k \varphi_{k,s} + i\varphi_{k,s} A_{k,s}^1) e_1^{k,s} + (\Delta_s \varphi_{k,s} + i\varphi_{k,s} A_{k,s}^2) e_2^{k,s} \right). \tag{24}$$

Ототожнимо дискретний магнітний потенціал $A$ з оператором множення так:

$$A : K^0 \to K^1, \qquad \varphi \to \varphi \cup A. \tag{25}$$

Тоді отримаємо

$$A\varphi = \sum_{k,s} (\varphi_{k,s} A^1_{k,s} e_1^{k,s} + \varphi_{k,s} A^2_{k,s} e_2^{k,s}).$$

Нехай $A^* : K^1 \to K^0$ − оператор, формально спряжений з $A$, тобто діє на довільну 1-форму $\omega = (u, v)$ за правилом

$$A^*\omega = \sum_{k,s} (A^1_{k,s} u_{k,s} + A^2_{k,s} v_{k,s})\, x^{k,s}. \tag{26}$$

Тоді (детальніше див. [4]) оператор $\delta^c_A : K^1 \to K^0$, який є формально спряжений з оператором $d^c_A$, має вигляд

$$\delta^c_A = \delta^c - iA^*. \tag{27}$$

Таким чином, дискретний магнітний лапласіан можемо означити як

$$-\Delta^c_A = \delta^c_A d^c_A : K^0 \to K^0.$$

Враховуючи (23), (27), отримуємо

$$\begin{aligned} -\Delta^c_A \varphi = \delta^c_A (d^c \varphi + i\varphi \cup A) &= \\ = (\delta^c - iA^*) d^c \varphi + (\delta^c - iA^*)(i\varphi \cup A) &= \\ = -\Delta^c \varphi - iA^* d^c \varphi + i\delta^c (\varphi \cup A) + A^*(\varphi \cup A) &= \\ = -\Delta^c \varphi - iA^* d^c \varphi + i\delta^c A\varphi + A^* A\varphi. & \end{aligned} \tag{28}$$

Використовуючи (12) і (20), легко показати, що для форм $\varphi \in K^0$ та $\omega \in K^1$ вигляду (8) маємо

$$\delta^c(\omega \cup \varphi) = \delta^c \omega \cup \varphi - \sum_{k,s} \big(u_{\sigma k,s} (\Delta_k \varphi_{k,s}) + v_{k,\sigma s} (\Delta_s \varphi_{k,s})\big)\, x^{k,s},$$

$$\delta^c(\varphi \cup \omega) = \varphi \cup \delta^c \omega - \sum_{k,s} \big((\Delta_k \varphi_{\sigma k,s}) u_{\sigma k,s} + (\Delta_s \varphi_{k,\sigma s}) v_{k,\sigma s}\big)\, x^{k,s}.$$

Тоді, враховуючи (26) і (27), дискретні аналоги правила Лейбніца для оператора $\delta^c_A$ будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \delta^c_A(\omega \cup \varphi) = \delta^c \omega \cup \varphi - \sum_{k,s} \big(u_{\sigma k,s} (\Delta_k \varphi_{k,s}) + v_{k,\sigma s} (\Delta_s \varphi_{k,s})\big)\, x^{k,s} - \\ - i \sum_{k,s} (A^1_{k,s} u_{k,s} \varphi_{\tau k,s} + A^2_{k,s} v_{k,s} \varphi_{k,\tau s})\, x^{k,s}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\delta^c_A(\varphi \cup \omega) = \varphi \cup \delta^c_A \omega - \sum_{k,s} \big((\Delta_k \varphi_{\sigma k,s}) u_{\sigma k,s} + (\Delta_s \varphi_{k,\sigma s}) v_{k,\sigma s}\big)\, x^{k,s}. \tag{30}$$

Також для $\varphi, \psi \in K^0$ маємо

$$\begin{aligned} -\Delta^c_A(\varphi \cup \psi) = \delta^c_A\big(d^c(\varphi \cup \psi) + i\varphi \cup \psi \cup A\big) &= \\ = \delta^c_A\big(d^c \varphi \cup \psi + \varphi \cup d^c \psi + i\varphi \cup (\psi \cup A)\big) &= \\ = \delta^c_A (d^c \varphi \cup \psi) + \delta^c_A (\varphi \cup d^c_A \psi). & \end{aligned}$$

Звідси, замінюючи в (29) $\omega$ на 1-форму $d^c \varphi$ (див. (11)) та $\varphi$ − на $\psi$, а також у (30) $\omega$ − на 1-форму $d^c_A \psi$, яка має вигляд (24), отримуємо

$$-\Delta_A^c(\varphi \cup \psi) = \varphi \cup \delta_A^c d_A^c \psi + \delta^c d^c \varphi \cup \psi + \sum_{k,s} \Phi_{k,s} x^{k,s}, \tag{31}$$

де

$$\Phi_{k,s} = (\Delta_k \varphi_{\sigma k,s})(\psi_{\tau k,s} - \psi_{\sigma k,s} + i\psi_{\sigma k,s} A^1_{\sigma k,s}) + i(\Delta_k \varphi_{k,s})\psi_{\sigma k,s} A^1_{k,s} +$$
$$+ (\Delta_s \varphi_{k,\sigma s})(\psi_{k,\tau s} - \psi_{k,\sigma s} + i\psi_{k,\sigma s} A^2_{k,\sigma s}) + i(\Delta_k \varphi_{k,s})\psi_{k,\sigma s} A^2_{k,s}. \tag{32}$$

**3. Дискретний магнітний оператор Шредінґера.** Нехай дійснозначна 0-форма $V \in K^0$ є дискретним аналогом електричного потенціалу, тобто

$$V = \sum_{k,s} V_{k,s} x^{k,s}, \qquad V_{k,s} \in \mathbb{R}.$$

Тоді дискретний аналог магнітного оператора Шредінґера (5) має вигляд

$$H^c_{A,V} = -\Delta^c_A + V. \tag{33}$$

Оскільки не накладаємо жодних обмежень на поведінку компонент дискретних форм $A$, $V$ на безмежності, то оператор (33), взагалі кажучи, є необмеженим.

Введемо для форм вигляду (14) лінійний простір

$$\mathcal{H}^p = \left\{ \alpha \in K^p : \sum_{k,s} |\alpha_{k,s}|^2 < +\infty,\ k, s \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad p = 0,1,2. \tag{34}$$

Очевидно, згідно з (17) простір $\mathcal{H}^p$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком (16) і нормою

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)} = \left( \sum_{k,s} |\alpha_{k,s}|^2 \right)^{1/2}. \tag{35}$$

Зазначимо, що, якщо $\alpha \in \mathcal{H}^0$, то послідовність компонент $(\alpha_{k,s})$ є елементом $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ – простору всіх сумовних з квадратом модуля комплекснозначних послідовностей. Оскільки множина всіх скінченних послідовностей $\ell_0(\mathbb{Z}^2)$ є щільною в $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$, то простір $K^0_0$ є щільним в $\mathcal{H}^0$. Тоді оператор $H^c_{A,V}$ : $: K^0_0 \to \mathcal{H}^0$ щільно означений, тобто $\bar{K}^0_0 = \mathcal{H}^0$, і є симетричним. Надалі будемо вважати, що оператор (33) є напівобмежений знизу на $K^0_0$, тобто для $H^c_{A,V}$ і для всіх $\varphi \in K^0_0$ виконується умова (6).

Означимо мінімальний і максимальний оператори, що асоціюються з $H^c_{A,V}$ в $\mathcal{H}^0$ так:

$$H_{\min} : D(H_{\min}) \to \mathcal{H}^0, \qquad H_{\max} : D(H_{\max}) \to \mathcal{H}^0,$$

де

$$D(H_{\min}) = K^0_0, \qquad D(H_{\max}) = \{\varphi \in \mathcal{H}^0 \mid H^c_{A,V}\varphi \in \mathcal{H}^0\}.$$

Суттєва самоспряженість оператора $H^c_{A,V}$ означає, що $\overline{H_{\min}} = H_{\max}$, тобто замикання в $\mathcal{H}^0$ мінімального оператора співпадає з максимальним оператором.

Введемо зрізувальну 0-форму $\chi^N \in K^0$:

$$\chi^N = \sum_{k,s} \chi^N_{k,s} x^{k,s}, \quad \text{де} \quad \chi^N_{k,s} = \begin{cases} 1, & |k|, |s| \le N, \\ 0, & |k|, |s| > N, \end{cases} \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Отже, $\chi^N = \sum x^{k,s}$ і $k$, $s$ приймають значення від $-N$ до $N$. Будемо також позначати скалярний добуток (16) через $(\cdot,\cdot)_N$, якщо $\Omega = \Omega_N$ (див. (15)).

**Лема 1.** *Нехай* $\psi \in K^0$ *і* $\chi^{\tau N} \in K^0$ *– форма вигляду* (36). *Тоді*

$$(H^c_{A,V}(\chi^{\tau N} \cup \psi), \chi^{\tau N} \cup \psi)_N = (\chi^{\tau N} \cup H^c_{A,V}\psi, \chi^{\tau N} \cup \psi)_N. \tag{37}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи формулу (31), для довільних $\varphi, \psi \in \in K^0$ отримуємо

$$H^c_{A,V}(\varphi \cup \psi) = \delta^c_A d^c_A(\varphi \cup \psi) + V \cup (\varphi \cup \psi) =$$

$$= \varphi \cup H^c_{A,V}\psi + \delta^c d^c \varphi \cup \psi + \sum_{k,s} \Phi_{k,s} x^{k,s}. \tag{38}$$

Оскільки компоненти форми $\delta^c d^c \varphi$ мають вигляд різницевих операторів $-\Delta_k(\Delta_k \varphi_{\sigma k,s}) - \Delta_s(\Delta_s \varphi_{k,\sigma s})$ і всі доданки компонент $\Phi_{k,s}$ мають множники вигляду $\Delta_k \varphi_{k,s}$, $\Delta_s \varphi_{k,s}$ (див. (32)), то для $\varphi$ зі сталими компонентами маємо, що $\delta^c d^c \varphi = 0$ і $\Phi_{k,s} = 0$. Тепер нехай $\varphi = \chi^{\tau N}$ і позначимо через $\Phi^{\tau N}$ 0-форму з компонентами (32), у яких $\varphi_{k,s}$ замінено на $\chi^{\tau N}_{k,s}$. Підставимо (38) у скалярний добуток $(H^c_{A,V}(\chi^{\tau N} \cup \psi), \chi^{\tau N} \cup \psi)_N$. Компоненти форми $\chi^{\tau N}$ дорівнюють одиниці в пунктах $x_{k,s}$ області $\Omega_N$ і на один крок поза її границею. Це забезпечує рівність нулеві компонент форм $\delta^c d^c \chi^{\tau N}$ і $\Phi^{\tau N}$ у точках границі області $\Omega_N$, тобто при $k = \pm N$ або $s = \pm N$. Звідси безпосередньо одержуємо

$$(\delta^c d^c \chi^{\tau N} \cup \psi, \chi^{\tau N} \cup \psi)_N = 0, \qquad (\Phi^{\tau N}, \chi^{\tau N} \cup \psi)_N = 0.$$

А це означає, що виконується рівність (38). ◊

**Теорема 2.** *Нехай дискретний магнітний оператор Шредінґера* $H^c_{A,V}$ *напівобмежений знизу на* $K^0_0$. *Тоді* $H^c_{A,V}$ *є суттєво самоспряженим.*

Д о в е д е н н я. Очевидно, що кожний напівобмежений оператор стає строго додатним, якщо додати до нього відповідну константу. Наприклад, додаючи $(c+1)Id$ до $H^c_{A,V}$, отримуємо

$$(H^c_{A,V}\psi, \psi) \ge \|\psi\|^2, \qquad \psi \in K^0_0,$$

де норма $\|\cdot\|$ задається формулою (35). А для таких операторів відомо (див. [3]), що суттєва самоспряженість $H^c_{A,V}$ еквівалентна тому, що $\mathrm{Ker}(H^*_{\min}) = \{0\}$. Тут «Ker» означає ядро оператора. Тоді суттєва самоспряженість $H^c_{A,V}$ означає, що рівняння

$$H^c_{A,V}\psi = 0 \tag{39}$$

має в $\mathcal{H}^0$ тільки тривіальний розв'язок.

Нехай $\psi$ – розв'язок рівняння (39). Введемо позначення $\psi^N = \chi^N \cup \psi$ і нехай $H^c_{A,V}\psi^N = f^N$. Тоді

$$(H^c_{A,V}\psi^{\tau N}, \psi^{\tau N})_N = \sum_{|k|,\,|s| \le N} f^{\tau N}_{k,s} \cdot \bar{\psi}^{\tau N}_{k,s} \ge \sum_{|k|,\,|s| \le N} \left|\psi^{\tau N}_{k,s}\right|^2 =$$

$$= \sum_{|k|,\,|s| \le N} \left|\psi_{k,s}\right|^2 = \left\|\psi^N\right\|^2.$$

З іншого боку, оскільки за припущенням $H^c_{A,V}\psi = 0$, то згідно з (38) маємо, що $(H^c_{A,V}\psi^{\tau N}, \psi^{\tau N})_N = 0$. Отже,

$$\left\|\psi^N\right\|^2 \le 0 .$$

Переходячи до границі при $N \to +\infty$, отримуємо $\left\|\psi^N\right\|^2 \to \|\psi\|^2$.

Таким чином, $\psi = 0$. ◊

**Наслідок 3.** *Нехай дискретний електричний потенціал* $V \in K^0$ *обмежений знизу, тобто існує таке* $c$, *що при всіх* $k, s \in \mathbb{Z}$ *виконується* $V_{k,s} \ge \ge c > -\infty$. *Тоді оператор* $H^c_{A,V}$ *є суттєво самоспряженим.*

Д о в е д е н н я. Дійсно, оскільки дискретний магнітний лапласіан $-\Delta^c_A$ є додатним оператором на $K^0_0$ (див. доведення в [4]), то обмеженість знизу форми $V \in K^0$ забезпечує напівобмеженість знизу оператора $H^c_{A,V}$. ◊


1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Дезин А. А.* Многомерный анализ и дискретные модели. – Москва: Наука, 1990. – 238 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. – Москва: Мир, 1978. – 395 с.
4. *Сущ В. Н.* Про одну дискретну модель магнітного лапласіана // Укр. мат. вісн. – 2005. – **2**, № 4. – С. 591–607.
4. *Bellissard J., Schulz-Baldes H., van Elst A.* The noncommutative geometry of the quantum hall effect // J. Math. Phys. – 1994. – **35**. – P. 5373–5471.
5. *Bentosela F., Briet Ph., Pastur L.* On the spectral and wave propagation properties of the surface Maryland model // J. Math. Phys. – 2003. – **44**. – P. 1–35.
6. *Dodziuk J., Mathai V.* Kato's inequality and asymptotic spectral properties for discrete magnetic Laplacians // Contemp. Math. – 2006. – **398**. – P. 69–81.
7. *Higuchi Yu., Shirai T.* The spectrum of magnetic Schrödinger operators on a graph with periodic structure // J. Funct. Analysis. – 1999. – **169**, No. 2. – P. 456–480.
8. *Shubin M.* Discrete magnetic Laplacian // Comm. Math. Phys. – 1994. – **164**, No. 2. – P. 259–275.
9. *Shubin M.* Essential self-adjointness for semi-bounded magnetic Schrödinger operators on non-compact manifolds // J. Funct. Analysis. – 2001. – **186**. – P. 92–116.
10. *Sunada T.* A discrete analogue of periodic magnetic Schrödinger operators // Contemp. Math. – 1994. – **173**. – P. 283–299.
12. *Teschl G.* Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. – Providence: AMS, 2000. – 355 p. – Math. Surveys and Monographs: Vol. **72**.


## СУЩЕСТВЕННАЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ДИСКРЕТНОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА


*Доказано существенную самосопряженность для полуограниченного снизу дискретного магнитного оператора Шрёдингера в пространстве, которое является комбинаторной моделью двумерного евклидового пространства. При построении дискретной модели используется схема дискретизации Дезина.*


## ESSENTIAL SELF-ADJOINTNESS OF DISCRETE MAGNETIC SCHRÖDINGER OPERATOR


*We prove the essential self-adjointness for a semi-bounded from below discrete magnetic Schrödinger operator in a space which we call a combinatorial model of the two-dimensional Euclidean space. The discretization schema of Dezin is used to construct a discrete model.*



Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
Політехніка Кошалінська, Кошалін, Польща



Одержано
10.04.07