УДК 621.396: 519.6: 535.4

П. О. Савенко, Л. П. Процах, М. Д. Ткач

ПРО НАЙКРАЩЕ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ ДІЙСНОЇ НЕВІД'ЄМНОЇ ФІНІТНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ МОДУЛЕМ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ФУР'Є. I

Досліджується нелінійна задача середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної невід'ємної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є, залежного від двох параметрів. Знаходження розв'язків цієї задачі зведено до розв'язування нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. Побудовано й обґрунтовано чисельні алгоритми для знаходження ліній галуження та відгалужених розв'язків цього рівняння. Наведено числові приклади.

Вступ. Середньоквадратична апроксимація фінітної невід'ємної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є, залежного від фізичних параметрів, широко використовується при розв'язуванні обернених задач радіофізики, акустики та ін. [7, 17]. Суттєвою особливістю задачі нелінійної апроксимації є неєдиність і галуження розв'язків, яке залишається недослідженим. Задача про знаходження множини точок галуження є, в свою чергу, недостатньо дослідженою нелінійною спектральною двопараметричною задачею. Найбільш повно розвинуті методи дослідження й чисельного знаходження розв'язків однопараметричних спектральних задач при наявності дискретного спектра [1, 3, 4, 15, 21, 22]. Суттєвою відмінністю нелінійних двопараметричних задач є існування зв'язних компонент спектра, які у випадку дійсних параметрів становлять собою спектральні лінії [16].

У роботі варіаційну задачу про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної фінітної функції модулем подвійного інтеграла Фур'є зведено до знаходження розв'язків нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. Доведено теорему існування зв'язних компонент спектра голоморфних оператор-функцій, залежних від двох спектральних параметрів, що обґрунтовує застосування методів неявних функцій до багатопараметричних спектральних задач [16]. Показано застосовність цієї теореми до аналізу спектра двовимірного інтегрального однорідного рівняння, до якого зведено задачу про знаходження ліній можливого галуження розв'язків рівняння Гаммерштейна. Побудовано й обґрунтовано алгоритми для чисельного знаходження оптимальних розв'язків задачі апроксимації, наведено числові приклади.

1. Формулювання задачі, основні рівняння та співвідношення. Розглянемо лінійний інтегральний оператор

$$f(s_1, s_2) = AU \equiv \iint_G U(x,y) e^{-i(c_1 x s_1 + c_2 y s_2)}\, dx\, dy\,, \tag{1}$$

який є подвійним перетворенням Фур'є функції $U(x,y) \in L_2(G)$, залежним від дійсного двовимірного параметра $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, $0 < c_i < \infty$, $i = 1, 2$. Покладаємо, що область $G \subset \mathbb{R}^2$ має кусково-гладку границю. У просторі $L_2(G)$ введемо зважений скалярний добуток й породжувану ним норму

$$(U_1, U_2)_{L_2(G)} = \frac{(2\pi)^2}{c_1 c_2} \iint_G U_1(x,y)\overline{U_2(x,y)}\, dx\, dy\,,$$

$$\|U\|_{L_2(G)} = (U, U)^{1/2}_{L_2(G)}. \tag{2}$$

Оскільки область $G \subset \mathbb{R}^2$ є обмеженою, то інтеграл у рівності (1) існує в звичайному розумінні [9] для довільної функції $U \in L_2(G)$, причому функція $f(s_1, s_2)$ є інтегровною з квадратом при $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ і для неї справджується рівність Планшереля [12] $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \|U\|_{L_2(G)}$. З цієї рівності випливає, що A − ізометричний оператор, тобто

$$\|AU\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \|U\|_{L_2(G)}. \tag{3}$$

Нехай задано

$$\tilde{F}(s_1, s_2) = \begin{cases} F(s_1, s_2), & (s_1, s_2) \in \bar{\Omega}, \\ 0, & (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{4}$$

де $F(s_1, s_2)$ − дійсна неперервна й невід'ємна на області $\bar{\Omega}$ функція.

Розглянемо задачу про найкраще середньоквадратичне наближення функції $\tilde{F}(s_1, s_2)$ модулем інтеграла Фур'є на всій площині $\mathbb{R}^2$, яку сформулюємо як задачу мінімізації функціонала

$$\min_{U \in L_2(G)} \sigma(U) = \left\|\tilde{F} - |AU|\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \equiv \left\|\tilde{F} - |f|\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \tag{5}$$

Враховуючи рівності (3), (4), функціонал $f_1 = (u_1, v_1)^\top$ запишемо у вигляді

$$\sigma(U) = \|F\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\big(F, |AU|\big)_{L_2(\Omega)} + \|U\|^2_{L_2(G)}. \tag{6}$$

Прирівнюючи диференціал Гато функціонала (6) до нуля, одержуємо рівняння відносно функції U в просторі $L_2(G)$:

$$U(x, y) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{\Omega} F(s_1, s_2) e^{i(c_1 x s_1 + c_2 y s_2)} \times$$

$$\times \exp\left(i \arg \iint_G U(x', y') e^{-i(c_1 x' s_1 + c_2 y' s_2)} dx' dy'\right) ds_1\, ds_2, \tag{7}$$

яке описує стаціонарні точки функціонала $\sigma(U)$.

Для скорочення записів введемо такі позначення:

$$Q = (s_1, s_2), \qquad d\Omega_Q = ds_1\, ds_2, \qquad Q' = (s_1', s_2'), \qquad d\Omega_{Q'} = ds_1'\, ds_2',$$

$$P = (x, y), \qquad dG_P = dx\, dy.$$

Врахувавши, що множина $N(A)$ складається лише з нульового елемента, і подіявши на обидві сторони рівняння (7) оператором A, одержуємо еквівалентне до (7) рівняння відносно функції $f(s_1, s_2)$ у просторі $L_2(\Omega)$:

$$f(Q) = \mathbf{B} f \equiv \iint_{\Omega} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) F(Q') e^{i \arg f(Q')}\, d\Omega_{Q'}, \tag{8}$$

де

$$\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_G \exp\big[i\big(c_1 x (s_1' - s_1) + c_2 y (s_2' - s_2)\big)\big]\, dG_P \tag{9}$$

− ядро рівняння (8), суттєво залежне від форми області G.

Під еквівалентністю рівнянь (7), (8) розуміємо: між розв'язками цих рівнянь існує взаємно однозначна відповідність, тобто кожному розв'язку рівняння (7) відповідає розв'язок рівняння (8) і, навпаки: якщо f_* − розв'язок рівняння (8), то відповідний йому розв'язок U_* рівняння (7) визначається за формулою

$$U_*(P) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{\Omega} F(Q) \exp\left[i\left(\arg f_*(Q) + (c_1 x s_1 + c_2 y s_2)\right)\right] d\Omega_Q \,, \tag{10}$$

а якщо U_* − розв'язок рівняння (7), то відповідний йому розв'язок f_* рівняння (8) визначається за формулою (1).

Зауважимо, що у випадку симетричних областей G ядро (9) вдається спростити. Зокрема, якщо область G має дві осі симетрії, а її верхня й нижня межі описуються відповідно функціями $y = \pm\eta(x)$ при $x \in [-1,1]$, то ядро (9) є дійсним і набуває вигляду

$$\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) = \frac{c_1}{2\pi^2} \int_{-1}^{1} \cos\left(c_1 x (s_1' - s_1)\right) \frac{\sin\left(c_2 (s_2' - s_2) \eta(x)\right)}{(s_2' - s_2)} dx \,. \tag{11}$$

Використовуючи більш загальний вираз (9) для ядра $\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})$, розглянемо оператор

$$Df \equiv \iint_{\Omega} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q') d\Omega_{Q'} \tag{12}$$

і відповідну йому квадратичну форму

$$(Df, f) = \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q') d\Omega_{Q'} \overline{f(Q)}\, d\Omega_Q =$$

$$= \frac{c_2 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{G} \left| \iint_{\Omega} f(Q) \exp\left(i\mathbf{c}(P, Q)\right) d\Omega_Q \right|^2 dG_P > 0 \,.$$

З останньої нерівності випливає, що ядро $\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})$ є додатним. Відповідно оператор D є також додатним на конусі невід'ємних функцій $\mathcal{K}$ простору $C(\bar{\Omega})$ [10]. Згідно з цим, оператор D залишає інваріантним конус $\mathcal{K}$, тобто $D\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Оскільки множина значень оператора A є множиною неперервних функцій [9], належних до простору $L_2(\mathbb{R}^2)$ і, відповідно, до $L_2(\Omega)$, а множина функцій, неперервних на області Ω, є щільною у просторі $L_2(\Omega)$ [9], то розв'язки рівняння (8) будемо досліджувати в просторі $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$.

На підставі декомплексифікації [19] комплексний простір $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ розглядатимемо як пряму суму двох дійсних просторів неперервних на області $\bar{\Omega}$ функцій $\mathbb{C}(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega}) \oplus C(\bar{\Omega})$, елементи якого подаються у вигляді: $f = (u, v)^\top \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$, $u = \mathrm{Re}(f) \in C(\bar{\Omega})$, $v = \mathrm{Im}(f) \in C(\bar{\Omega})$. Норми в цих просторах введемо так:

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{Q \in \bar{\Omega}} |u(Q)|, \qquad \|v\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{Q \in \bar{\Omega}} |v(Q)|,$$

$$\|f\|_{\mathbb{C}(\bar{\Omega})} = \max\left(\|u\|_{C(\bar{\Omega})}, \|v\|_{C(\bar{\Omega})}\right). \tag{13}$$

Рівняння (8) в декомплексифікованому просторі $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ зводиться до еквівалентної йому системи рівнянь

$$u(Q) = B_1(u, v) \equiv \iint_{\bar{\Omega}} F(Q') \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} d\Omega_{Q'} \,,$$

$$v(Q) = B_1(u, v) \equiv \iint_{\bar{\Omega}} F(Q') \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} d\Omega_{Q'} \,. \tag{14}$$

Позначимо через $S_M \subset \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ замкнену опуклу множину неперервних функцій, покладаючи

$$S_M = S_{M_u} \oplus S_{M_v}, \qquad S_{M_u} = \{u \in S_{M_u} : \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \le M\},$$

$$S_{M_v} = \{v \in S_{M_v} : \|v\|_{C(\bar{\Omega})} \le M\},$$

$$M = \max_{Q \in \bar{\Omega}} \iint_{\Omega} F(Q') \left| \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \right| d\Omega_{Q'} .$$

Лема 1. *Оператор* $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^\top$*, визначений за формулами* (14)*, відображає замкнену опуклу множину* S_M *банахового простору* $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ *саму в себе і є компактним.*

Д о в е д е н н я. Спочатку покажемо, що $\mathbf{B} : \mathbb{C}(\bar{\Omega}) \to \mathbb{C}(\bar{\Omega})$. Нехай $f = (u, v)^\top$ – довільна функція, належна до $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$. Оскільки при $0 < c_i < \infty$, $i = 1, 2$, ядро $\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})$ є неперервною функцією своїх аргументів на замкненій області $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, то згідно з теоремою Кантора [12] $\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})$ – рівномірно неперервна на $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ функція. Звідси випливає: для будь-яких точок (Q_1, Q_1'), (Q_2, Q_2') таких що, як тільки $\left| (Q_1, Q_1') - (Q_2, Q_2') \right| < \delta$, то

$$\left| \mathcal{K}(Q_1, Q_1', \mathbf{c}) - \mathcal{K}(Q_2, Q_2', \mathbf{c}) \right| < \frac{\varepsilon}{a}, \qquad \text{де} \qquad a = \iint_{\Omega} F(Q')\, d\Omega_{Q'} .$$

На підставі цього одержуємо

$$\left| u(Q_1) - u(Q_2) \right| =$$

$$= \left| \iint_{\Omega} F(Q') \left[\mathcal{K}(Q_1, Q', \mathbf{c}) - \mathcal{K}(Q_2, Q', \mathbf{c}) \right] \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}}\, d\Omega_{Q'} \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{a} \iint_{\Omega} F(Q')\, d\Omega_{Q'} = \varepsilon, \tag{15}$$

оскільки $\max\limits_{Q' \in \bar{\Omega}} \left| \dfrac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} \right| \le 1$. Аналогічно одержуємо, що $\left| v(Q_1) - v(Q_2) \right| \le$ $\le \varepsilon$, як тільки $\left| (Q_1, Q_1') - (Q_2, Q_2') \right| < \delta$, тобто $(u, v)^\top \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ і $\mathbf{B} : \mathbb{C}(\bar{\Omega}) \to \mathbb{C}(\bar{\Omega})$.

Покажемо, що множина функцій $S_g = \mathbf{B} S_M$ задовольняє умови теореми Арцела [9], тобто покажемо, що функції множини S_g є рівномірно обмеженими й одностайно неперервними. Більше того, $\mathbf{B} S_M \subset S_M$. Нехай $g =$ $= (w, \omega)^\top = \mathbf{B} f \equiv \left(B_1(u, v), B_2(u, v) \right)^\top$, де $f = (u, v)^\top$ – довільна функція множини S_M. Тоді при $\left| (Q_1, Q') - (Q_2, Q') \right| < \delta$ аналогічно (15) маємо

$$\begin{Bmatrix} \left| w(Q_1) - w(Q_2) \right| \\ \left| \omega(Q_1) - \omega(Q_2) \right| \end{Bmatrix} \le \begin{Bmatrix} \dfrac{\varepsilon}{a} \displaystyle\iint_{\Omega} F(Q') d\Omega_{Q'} \\ \dfrac{\varepsilon}{a} \displaystyle\iint_{\Omega} F(Q') d\Omega_{Q'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{Bmatrix}.$$

Таким чином, функції множини $S_g = \mathbf{B} S_M$ є одностайно неперервні.

Рівномірна обмеженість множини $S_g = \mathbf{B} S_M$ випливає з нерівності

$$\|g\|_{\mathbb{C}(\bar\Omega)} = \max\left\{\max_{Q\in\bar\Omega}\left|\iint_{\bar\Omega} F(Q')\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}}\,d\Omega_{Q'}\right|,\right.$$

$$\left.\max_{Q\in\bar\Omega}\left|\iint_{\bar\Omega} F(Q')\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}}\,d\Omega_{Q'}\right|\right\} \le M\,,$$

де $f = (u,v)^{\top}$ − довільна функція множини S_M, $g = \mathbf{B}f \equiv \left(B_1(u,v), B_2(u,v)\right)^{\top}$. З останньої нерівності випливає також, що $\mathbf{B}S_M \subset S_M$. Отже, оператор $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\top}$ є компактним і відображає замкнену опуклу множину $S_M \subset \mathbb{C}(\bar\Omega)$ саму в себе.

Лему доведено. ◊

Як **наслідок** із леми 1 випливає, що всі нерухомі точки оператора $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\top}$, тобто розв'язки системи рівнянь (14), належать до множини S_M.

Розв'язки подібної до (14) системи рівнянь у випадку одновимірних областей $\bar\Omega$ стосовно задач синтезу лінійного випромінювача досліджувались, зокрема, в [17, 23]. Одержані там результати показують, що для рівнянь типу (8), (14) характерними є неєдиність і галуження розв'язків, залежне від величини фізичного параметра. Безпосередньо результати [19, 23] не можуть бути перенесеними на двовимірну двопараметричну задачу (8), (14). Тут, на відміну від точок галуження [17], існують лінії галуження розв'язків, а задача на знаходження ліній галуження є нелінійною двопараметричною спектральною задачею.

Легко впевнитись, що одним із розв'язків рівняння (8) у випадку симетричної області G є функція

$$f_0(Q,\mathbf{c}) = \iint_{\bar\Omega} F(Q')\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\,d\Omega_{Q'}\,. \tag{16}$$

Оскільки оператор D, визначений рівністю (12), є додатним на конусі невід'ємних функцій $\mathcal{K} \in \mathbb{C}(\bar\Omega)$ і $D\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, а $F \subset \mathcal{K}$, то $f_0 = DF$ є також невід'ємною функцією на області $\bar\Omega$.

Для знаходження ліній галуження і комплексних розв'язків рівняння (8), що відгалужуються від дійсного розв'язку $f_0(Q,\mathbf{c})$, розглянемо задачу на знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$ і всіх відмінних від $f_0(Q,\mathbf{c})$ розв'язків системи (14), які при $\left|\mathbf{c}-\mathbf{c}^{(0)}\right| \to 0$ задовольняють умови

$$\max_{Q\in\bar\Omega}\left|u(Q,\mathbf{c}) - f\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right)\right| \to 0, \qquad \max_{Q\in\bar\Omega}\left|v(Q,\mathbf{c})\right| \to 0\,. \tag{17}$$

Умови (17) означають, що необхідно знайти такі малі неперервні на $\bar\Omega$ розв'язки

$$w(Q,\mathbf{c}) = u(Q,\mathbf{c}) - f_0\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right), \qquad \omega(Q,\mathbf{c}) = v(Q,\mathbf{c})\,,$$

які рівномірно збігаються до нуля при $\mathbf{c} \to \mathbf{c}^{(0)}$. При цьому необхідно враховувати також напрямок прямування вектора $\mathbf{c}$ до вектора $\mathbf{c}^{(0)}$.

Покладемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \qquad c_2 = c_2^{(0)} + \nu\,, \tag{18}$$

а шукані розв'язки знаходитимемо у вигляді

$$u(Q,\mathbf{c}) = f_0\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right) + w(Q,\mu,\nu), \qquad v(Q,\mathbf{c}) = \omega(Q,\mu,\nu)\,. \tag{19}$$

Надалі для скорочення записів залежність функцій $w(Q,\mu,\nu)$, $\omega(Q,\mu,\nu)$ від параметрів μ, ν будемо опускати.

Відзначимо властивості підінтегральних функцій в системі (14): вони є неперервними функціями своїх аргументів. Після підстановки виразів (18), (19) у (14) підінтегральні функції в околі точки $\left(\mathbf{c}^{(0)}, f_0(Q,\mathbf{c}^{(0)}), 0\right)$ розкладаються в рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональними аргументами w, ω й числовими параметрами μ, ν:

$$F(Q')\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}} =$$

$$= \sum_{m+n+p+q\geq 0} A_{mnpq}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})w^m(Q')\omega^n(Q')\,\mu^p\nu^q\ ,$$

$$F(Q')\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}} =$$

$$= \sum_{m+n+p+q\geq 1} B_{mnpq}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})w^m(Q')\omega^n(Q')\mu^p\nu^q\ , \tag{20}$$

де $A_{mnpq}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})$, $B_{mnpq}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})$ – коефіцієнти розкладу, неперервно залежні від своїх аргументів. Підставляючи (18), (20) у (14) і враховуючи, що $f_0(Q',\mathbf{c}^{(0)})$ є розв'язком системи (14), одержуємо систему нелінійних рівнянь відносно малих розв'язків w, ω:

$$u(Q) = a_{10}(Q,\mathbf{c}^{(0)})\mu + a_{01}(Q,\mathbf{c}^{(0)})\nu +$$

$$+ \sum_{m+n+p+q\geq 2} \mu^p\nu^q \iint_{\bar{\Omega}} A_{mnpq}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})w^m(Q')\omega^n(Q')d\Omega_{Q'}\ , \tag{21}$$

$$\omega(Q) - \iint_{\bar{\Omega}} F(Q)\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})\frac{\omega(Q')}{f_0(Q',\mathbf{c}^{(0)})}\,d\Omega_{Q'} =$$

$$= \sum_{m+n+p+q\geq 2} \mu^p\nu^q \iint_{\bar{\Omega}} B_{mnpq}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})w^m(Q')\omega^n(Q')\,d\Omega_{Q'}\ , \tag{22}$$

де

$$a_{10}(Q,\mathbf{c}^{(0)}) = \iint_{\bar{\Omega}} A_{0010}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})\,d\Omega_{Q'}\ ,$$

$$a_{01}(Q,\mathbf{c}^{(0)}) = \iint_{\bar{\Omega}} A_{0001}(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)})\,d\Omega_{Q'}\ .$$

Для подальшого застосування методів теорії галуження розв'язків нелінійних рівнянь [2] до системи (21), (22) необхідно знайти відмінні від тривіального розв'язки лінійного однорідного інтегрального рівняння, яке одержуємо, прирівнюючи до нуля ліву частину рівняння (22):

$$\varphi(Q) = T(\mathbf{c})\varphi \equiv \iint_{\bar{\Omega}} \frac{F(Q')}{f_0(Q',\mathbf{c})}\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\varphi(Q')\,d\Omega_{Q'} \tag{23}$$

при умові, що $f_0(Q',\mathbf{c}) > 0$. Зазначимо, що оператор $T(\mathbf{c}) : \mathbb{C}(\bar{\Omega}) \to \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ є цілком неперервним. Ця властивість доводиться аналогічно, як доведена повна неперервність оператора $\mathbf{B} = (B_1, B_1)^\top$ у лемі 1.

Згідно з [2], точками можливого галуження розв'язків системи нелінійних рівнянь (21), (22) є такі значення параметрів $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$, при яких лінійне однорідне рівняння (23) має відмінні від тотожного нуля розв'язки. Власні функції рівняння (23) використовуються при побудові відгалужених розв'язків рівнянь (21), (22).

3. Двовимірна нелінійна спектральна задача. Теорема існування. Спочатку розглянемо задачу про знаходження розв'язків рівняння (23), як двовимірну нелінійну спектральну задачу на загальному операторному рівні. Нехай E − комплексний банахів простір, $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ − відкрита зв'язна множина в комплексному просторі $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, елементи якої позначатимемо через $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, де $\lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}$, $\Lambda_i = \{\lambda_i \in \Lambda_i : |\lambda_i| < r_\lambda\}$, $i = 1, 2$, r_λ − деяка дійсна константа. Нехай задано оператор-функцію

$$\boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2) = T(\lambda_1, \lambda_2) - I, \tag{24}$$

де $T(\lambda_1, \lambda_2)$ − лінійний цілком неперервний оператор, що діє в банаховому просторі E й аналітично залежить від двовимірного параметра (λ_1, λ_2); I − одиничний в E оператор. Із (24) випливає, що кожному значенню $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $\mathscr{A}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{L}(E, E)$.

Будемо розглядати нелінійну двовимірну спектральну задачу

$$\mathscr{A}(\lambda_1, \lambda_2)x = 0, \tag{25}$$

в якій необхідно знайти власні значення $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E$ ($x^{(0)} \neq 0$) такі, що $\mathscr{A}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})x^{(0)} = 0$.

Розглянемо функцію

$$\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2) = \det\left(T(\lambda_1, \lambda_2) - I\right), \tag{26}$$

яка у випадку скінченновимірного простору E є визначником, порядок якого співпадає з розмірністю простору. Якщо E − нескінченновимірний гільбертів простір, а $T(\lambda_1, \lambda_2)$ − лінійний цілком неперервний оператор, який діє в E, то $T(\lambda_1, \lambda_2)$ допускає матричне подання [8, с. 196]. У цьому випадку функцію $\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2)$ визначатимемо, як

$$\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2) = \det \begin{Vmatrix} t_{11}(\lambda_1, \lambda_2) - 1 & t_{12}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots & t_{1n}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots \\ t_{21}(\lambda_1, \lambda_2) & t_{22}(\lambda_1, \lambda_2) - 1 & \dots & t_{2n}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ t_{n1}(\lambda_1, \lambda_2) & t_{n2}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots & t_{nn}(\lambda_1, \lambda_2) - 1 & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \end{Vmatrix},$$

покладаючи, що при $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{\Lambda}$ $|\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2)| \leq C$, де C − деяка дійсна константа. Надалі можливість заміни нескінченновимірного визначника скінченновимірним методом редукції [8] випливає з означення цілком неперервного оператора [13], згідно з яким цілком неперервний оператор може бути поданий виразом $T(\lambda_1, \lambda_2)u = T_n(\lambda_1, \lambda_2)u + T_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)u$, у якому $T_n(\lambda_1, \lambda_2)$ − вироджений оператор, а норму оператора $T_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)$ можна зробити меншою від будь-якого наперед заданого малого числа $\varepsilon > 0$.

Очевидно, що $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ буде власним значенням задачі (25), якщо точка $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ є коренем рівняння

$$\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{27}$$

Розглянемо необхідну надалі допоміжну одновимірну спектральну задачу, як частковий випадок задачі (25). Покладемо, що змінна λ_2 в операторі $T(\lambda_1, \lambda_2)$ виражається деякою однозначною функцією $\lambda_2 = z(\lambda_1)$ (в найпростішому випадку $\lambda_2 = \lambda_1$), яка відображає область Λ_1 в Λ_2. Введемо в розгляд оператор-функцію $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1) \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, z(\lambda_1))$ (або $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1) \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_1)$), з якою зв'язана одновимірна спектральна задача

$$\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1)x = 0, \tag{28}$$

де кожному значенню $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, z(\lambda_1)) \in \boldsymbol{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $\mathcal{A}(\lambda_1, z(\lambda_1)) \in \mathcal{L}(E, E)$.

Для спектра $s(\mathcal{A})$ задачі (25) має місце

Теорема 1. *Нехай при кожному* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}$ $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(E, E)$ *є фредгольмовим оператором з нульовим індексом, оператор-функція* $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, E)$ *голоморфна, а функція* $\mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2)$ *аналітична в області* $\boldsymbol{\Lambda}$. *Нехай спектр допоміжної задачі* $s(\tilde{\mathcal{A}})$ *не співпадає з областю* Λ_1, *тобто* $s(\tilde{\mathcal{A}}) \neq \Lambda_1$.

Тоді:

(***i***) *кожна точка спектра* $\lambda_1^{(0)} \in s(\tilde{\mathcal{A}})$ *ізольована, є власним значенням оператора* $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1) \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, z(\lambda_1))$, *їй відповідає скінченновимірний власний підпростір* $N(\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1^{(0)}))$ *і скінченновимірний кореневий підпростір;*

(***ii***) *кожна точка* $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, z(\lambda_1^{(0)})) \in \boldsymbol{\Lambda}$ *є точкою спектра оператора* $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$, *де* $\lambda_2^{(0)} = z(\lambda_1^{(0)}) \in \Lambda_2$, $\lambda_1^{(0)} \in \Lambda_1$;

(***iii***) *якщо* $\mathcal{P}'_{\lambda_2}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \neq 0$, *то в деякому околі точки* $\lambda_1^{(0)} \in \Lambda_1$ *існує єдина неперервна диференційовна функція* $\lambda_2 = \gamma(\lambda_1)$, *яка є розв'язком рівняння* (27), *тобто в деякій бікруговій області* $\boldsymbol{\Lambda}_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_0 : |\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}| < \varepsilon_1, |\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}| < \varepsilon_2\}$ *існує зв'язна компонента спектра оператор-функції* $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$, *де* ε_1, ε_2 *– малі дійсні константи.*

Д о в е д е н н я теореми випливає з теореми 1 [3, с. 68][1] і теореми про існування неявної функції [2, 18]. Спочатку покажемо, що з умов сформульованої теореми випливають умови теореми 1 з [3] стосовно існування дискретного спектра оператор-функції $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1) \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, z(\lambda_1))$. Оскільки за умов теореми при кожному $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}$ оператор $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ є фредгольмовим з нульовим індексом, а оператор-функція $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, E)$ є голоморфною, то звідси випливає, що при кожному $\lambda_1 \in \Lambda_1$ оператор $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1)$ також є фредгольмовим з нульовим індексом, а оператор-функція $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1, z(\lambda_1)) : \Lambda_1 \to \mathcal{L}(E, E)$ є голоморфною при $\lambda_1 \in \Lambda_1$. Оскільки прийнято, що $s(\tilde{\mathcal{A}}) \neq \Lambda_1$, то з теореми 1 [3] випливає, що кожна точка $\lambda_1^{(0)} \in s(\tilde{\mathcal{A}})$ ізольована, є власним значенням оператора $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1)$, їй відповідає скінченновимірний власний підпростір і скінченновимірний кореневий підпростір, а оператор-функція $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(\lambda_1)$ має в точці $\lambda_1^{(0)}$ полюс, порядок якого дорівнює найбільшій довжині кореневих ланцюжків, відповідних $\lambda_1^{(0)}$. Звідси випливає, що кожна точка $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) = (\lambda_1^{(0)}, z(\lambda_1^{(0)})) \in \boldsymbol{\Lambda}$ є власним значенням опе-

---

[1] Зазначимо, що при доведенні теореми 1 [3, с. 68] використовуються результати робіт [11, 20].

ратора $\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_1) \equiv \mathscr{A}(\lambda_1, z(\lambda_1))$. Отже, $\mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \equiv \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, z(\lambda_1^{(0)})) = 0$. Відповідно до цього $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) = (\lambda_1^{(0)}, z(\lambda_1^{(0)})) \in \mathbf{\Lambda}$ є також власним значенням оператора $\mathscr{A}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Вважатимемо, що λ_1, λ_2 є незалежними змінними в області $\mathbf{\Lambda}$. Оскільки $\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2)$ є аналітичною функцією в околі точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$ і $\mathscr{P}'_{\lambda_2}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \neq$ $\neq 0$, то згідно з теоремою про неявну функцію в деякому околі точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$ існує єдина неперервна диференційовна функція $\lambda_2 = \gamma(\lambda_1)$, яка є розв'язком рівняння (27). Звідси випливає існування зв'язної компоненти спектра оператор-функції $\mathscr{A}(\cdot, \cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{L}(E, E)$ в деякій бікруговій області $\mathbf{\Lambda}_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}_0 : |\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}| < \varepsilon_1,\ |\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}| < \varepsilon_2\}$.

Теорему доведено. ◊

У випадку, коли $T(\lambda_1, \lambda_2)$ є матрицею n-го порядку або є цілком неперервним оператором, то для знаходження наближених розв'язків допоміжної задачі

$$\tilde{\mathscr{A}}_n(\lambda_1)x = 0 \tag{29}$$

одержуємо на підставі рівності (26) рівняння $\tilde{\mathscr{P}}_n(\lambda_1) = \det(T_n(\lambda_1) - I_n) = 0$. Якщо $\lambda_{1,i}^{(0)} \in \Lambda_1$ – корінь цього рівняння, то $(\lambda_{1,i}^{(0)}, z(\lambda_{1,i}^{(0)})) \in \mathbf{\Lambda}$ є власним значенням задачі (25). Тоді, розглядаючи в деякому околі точки $(\lambda_{1,i}^{(0)}, z(\lambda_{1,i}^{(0)}))$ рівняння $\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2) = \det(T_n(\lambda_1, \lambda_2) - I_n) = 0$ як задачу на знаходження неявно заданої функції $\lambda_{2,i} = \lambda_{2,i}(\lambda_1)$, для якої виконуються умови теореми існування [18], приходимо до задачі Коші

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\mathscr{P}'_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2)}{\mathscr{P}'_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2)}, \tag{30}$$

$$\lambda_2(\lambda_{1,i}^{(0)}) = z(\lambda_{1,i}^{(0)}). \tag{31}$$

Розв'язуючи задачу (30), (31) в деякому околі точки $\lambda_{1,i}^{(0)}$, знаходимо i-ту зв'язну компоненту спектра оператор-функції $\mathscr{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)$.

Примітка 1. Зазначимо, що у випадку дійсних параметрів λ_1, λ_2 одним з достатніх критеріїв виконання умови $s(\mathscr{A}) \neq \mathbf{\Lambda}$ є наявність особливої точки в рівнянні $\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ [5]. Точка $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ є особливою точкою кривої, що подається рівнянням $\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, якщо $\dfrac{\partial \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_1} = 0$, $\dfrac{\partial \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_2} = 0$, а частинні похідні другого порядку відмінні від нуля:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_1^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_2^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \neq 0$$

і ці похідні разом з похідними третього порядку неперервні в околі точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$. Якщо при цьому

$$\left(\frac{\partial^2 \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathscr{P}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})}{\partial \lambda_2^2} < 0,$$

то точка $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$ є коренем рівняння $\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ кратності два. Усередині круга достатньо малого радіуса з центром в точці $\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}\right)$ ліва частина рівняння $\mathscr{P}\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = 0$ перетворюється в нуль лише в самій точці $\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}\right)$, тобто $\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}\right)$ – ізольована точка спектра. ◄

Повернемось до знаходження розв'язків рівняння (23), спектральними параметрами в якому є c_1, c_2. Нехай $(c_1, c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c$, $\mathbf{\Lambda}_c = \Lambda_{c_1} \times \Lambda_{c_2}$, де $\Lambda_{c_i} = \left\{c_i \in \Lambda_{c_i} : 0 < c_i < r_c\right\}$. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що при довільних значеннях параметрів $(c_1, c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c$ однією з власних функцій є

$$\varphi_1(Q, \mathbf{c}) = \iint\limits_{\Omega} F(Q')\mathscr{K}(Q, Q', \mathbf{c})\, d\Omega_{Q'} . \tag{32}$$

Запишемо необхідне надалі спряжене з (23) рівняння

$$\psi(Q) = T^*(\mathbf{c})\psi \equiv \frac{F(Q)}{f_0(Q, \mathbf{c})} \iint\limits_{\bar{\Omega}} \mathscr{K}(Q, Q', \mathbf{c})\psi(Q')\, d\Omega_{Q'} . \tag{33}$$

При довільних $(c_1, c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c$ однією з власних функцій рівняння (33) є

$$\psi_1(Q) = F(Q), \tag{34}$$

яка, на відміну від $\varphi_1(Q, \mathbf{c})$, не залежить від c_1, c_2.

Існування відмінних від тотожного нуля розв'язків рівняння (23) при довільних $(c_1, c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c$ свідчить про існування зв'язної компоненти спектра, яка співпадає з областю $\mathbf{\Lambda}_c$. Отже, не виконується умова теореми 1 $s(\tilde{\mathscr{A}}) \neq \neq \mathbf{\Lambda}_c$. Для виконання цієї умови виключимо з ядра інтегрального рівняння (23) власну функцію (32), а саме: розглянемо рівняння

$$\varphi(Q, \mathbf{c}) = \tilde{T}(\mathbf{c})\varphi \equiv \iint\limits_{\bar{\Omega}} \tilde{\mathscr{K}}(Q, Q', \mathbf{c})\varphi(Q')\, d\Omega_{Q'} , \tag{35}$$

де

$$\tilde{\mathscr{K}}(Q, Q', \mathbf{c}) = \frac{F(Q')}{f_0(Q', \mathbf{c})}\mathscr{K}(Q, Q', \mathbf{c}) - \frac{\psi_1(Q)\varphi_1(Q', \mathbf{c})}{\|\psi_1\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}} . \tag{36}$$

Із леми Шмідта [2, с. 132] випливає, що $\mu = 1$ ні при яких значеннях (c_1, c_2) не буде характеристичним значенням рівняння (35), тобто $\varphi_1(Q, \mathbf{c})$ не буде власною функцією цього рівняння. Тим самим зі спектра оператора виключена зв'язна компонента, яка співпадає з областю $\mathbf{\Lambda}_c$ й відповідає функції $\varphi_1(Q, \mathbf{c})$.

Використовуючи формулу (9), переконуємось, що для ядра оператора $\tilde{T}(\mathbf{c})$ виконується нерівність

$$\iint\limits_{\Omega}\iint\limits_{\Omega} \left|\tilde{\mathscr{K}}(Q, Q', \mathbf{c})\right|^2 d\Omega_Q\, d\Omega_{Q'} \le$$

$$\le 1 + \alpha_1 \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2}\left[\frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2}\mu^2(\bar{\Omega}) + \alpha_F \alpha_{f_0}\right] < +\infty , \tag{37}$$

де

$$\alpha_1 = \max_{\substack{Q \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{c} \in \mathbf{\Lambda}_c}} \left|\frac{F(Q)}{f_0(Q, \mathbf{c})}\right|, \qquad \alpha_F = \iint\limits_{\bar{\Omega}} \frac{F(Q)}{\|f_0(Q, \mathbf{c})\|_{L_2}}\, d\Omega_Q ,$$

$$\alpha_{f_0} = \iint\limits_{\bar{\Omega}} \frac{|f_0(Q', \mathbf{c})|}{\|f_0(Q', \mathbf{c})\|_{L_2}}\, d\Omega_{Q'} .$$

З нерівності (37) випливає, що $\tilde{T}(\mathbf{c})$ є оператором Фредгольма з нульовим індексом [6]. Більше того, він є цілком неперервним оператором у просторі $L_2(\Omega)$ [14].

Функції, що входять в ядро оператора (35), допускають аналітичне продовження в комплексну область $\mathbf{\Lambda}_c$, якщо c_1, c_2 вважати комплексними параметрами. Голоморфність оператор-функції $\mathscr{A}(c_1, c_2) = \tilde{T}(c_1, c_2) - I$ випливає [3] з диференційовності оператора $\tilde{T}(c_1, c_2)$ за Фреше [19]. Існування часткових похідних Фреше $\dfrac{\partial \mathscr{A}(c_1, c_2)}{\partial c_i}$, $i = 1, 2$, в довільній точці $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$ випливає з неперервності ядра $\tilde{\mathscr{K}}(Q, Q', \mathbf{c})$ за сукупністю своїх змінних в області $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \bar{\mathbf{\Lambda}}_c$ та існування й неперервності в $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \bar{\mathbf{\Lambda}}_c$ частинних похідних $\dfrac{\partial \tilde{\mathscr{K}}(c_1, c_2)}{\partial c_i}$, $i = 1, 2$, у чому легко переконатись.

Покладаючи в (35) $c_2 = z(c_1) = c_1$, розглянемо одновимірну спектральну задачу

$$\varphi(Q) = \tilde{\tilde{T}}(c_1)u \equiv \iint\limits_G \tilde{\tilde{\mathscr{K}}}(Q, Q', c_1)\varphi(Q')\, d\Omega_{Q'}\,, \tag{38}$$

де $\tilde{\tilde{\mathscr{K}}}\left(Q, Q', c_1\right) = \tilde{\mathscr{K}}\left(Q, Q', c_1, c_1\right)$. Оскільки $\tilde{\tilde{T}}(c_1)$ є звуженням оператора $\tilde{T}(c)$, то звідси випливає, що $\tilde{\tilde{T}}(c)$ – фредгольмів оператор з нульовим індексом при будь-якому $c_1 \in \Lambda_1$, а оператор-функція $\tilde{\mathscr{A}}(\,\cdot\,) \equiv \left(\tilde{\tilde{T}}(\,\cdot\,) - I\right) : \Lambda_1 \to \mathscr{L}(E, E)$ є голоморфною.

Якщо $s(\tilde{\mathscr{A}}) \neq \Lambda_1$, то з голоморфності оператор-функції і фредгольмовості ядра $\tilde{\tilde{\mathscr{K}}}\left(Q, Q', c_1\right) = \tilde{\mathscr{K}}\left(Q, Q', c_1, c_1\right)$ випливає виконання умов теореми 1, згідно з якою кожна точка $c_1^{(0)} \in s(\tilde{\mathscr{A}})$ ізольована, є власним значенням рівняння (38). Відповідно точки $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) = \left(c_1^{(0)}, z\left(c_1^{(0)}\right)\right)$ будуть власними значеннями рівняння (38). Для знаходження зв'язних компонент спектра рівняння (38) в околах точок $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$ розв'язуємо задачу Коші (30), (31), в якій за початкові умові використовуємо знайдені розв'язки допоміжної задачі $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) = \left(c_1^{(0)}, z\left(c_1^{(0)}\right)\right)$.

1. *Асланян М. А., Картышев С. В.* Модификация одного численного метода решения нелинейной спектральной задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. – **37**, № 5. – С. 713–717.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
3. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. – 161 с.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 2. – С. 43–117.
5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
6. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
7. *Зелкин Е. Г., Соколов В. Г.* Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом. – Москва: Сов. радио, 1980. – 256 с.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. М.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 742 с.

9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.
10. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
11. *Крейн С. Г., Трофимов В. П.* О нетеровых операторах, голоморфно зависящих от параметров // Тр. мат. факультета Воронежск. гос. ун-та (Тр. семинара по функц. анализу). – Воронеж, 1970. – С. 63–85.
12. *Ляшко И. И., Емельянов В. Ф., Боярчук А. К.* Основы классического и современного математического анализа. – Киев: Вища шк., 1988. – 591 с.
13. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – Москва: Наука, 1970. – 512 с.
14. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике. – Москва–Ленинград: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1950. – 428 с.
15. *Подлевський Б. М.* Про один підхід до побудови методів двосторонніх наближень розв'язування нелінійних спектральних задач // Доп. НАН України. – 2005. – № 3. – С. 16–21.
16. *Процах Л. П., Савенко П. О., Ткач М. Д.* Метод неявної функції розв'язування задачі на власні значення з нелінійним двовимірним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 3. – С. 41–46.
17. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
18. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 450 с.
19. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
20. *Трофимов В. П.* О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметров // Мат. исслед. – 1968. – **3**, вып. 3. – С. 117–125.
21. *Grigorieff R. D., Jeggle H.* Approximation von Eigevwertproblemen bei nichtlinearer Parameterabhangikeit. // Manuscr. math. – 1973. – **10**, No. 3. – P. 245–271.
22. *Sleeman B. D.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space. – London: Pitman Press, 1978. – 140 p.
23. *Voitovich N. N., Reshnyak O. O.* Solutions of nonlinear integral equation of synthesis of the linear antenna arrays // BSUAE. J. Appl. Electromagnetizm. – 1999. – **2**, No. 1. – P. 43–52.

О НАИЛУЧШЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ФИНИТНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ МОДУЛЕМ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Исследуется нелинейная задача среднеквадратической аппроксимации действительной финитной неотрицательной непрерывной функции от двух переменных модулем двойного интеграла Фурье, зависимого от двух параметров. Нахождение решений этой задачи сведено к решению нелинейного двумерного интегрального уравнения типа Гаммерштейна. Построены и обоснованны численные алгоритмы для нахождения линий ветвления и ответвленных решений этого уравнения. Приведены численные примеры.

ON THE BEST MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF REAL NON-NEGATIVE FINITE FUNCTION WITH RESPECT TO TWO VARIABLES BY THE MODULE OF DOUBLE FOURIER INTEGRAL

The nonlinear problem of mean-square approximation of real finite non-negative continuous function with respect to two variables by module of double Fourier integral that depends on two parameters is investigated. Finding the solutions of this problem is reduced to solving the nonlinear two-dimensional integral equation of Hammerstein type. Numerical algorithms for finding the branching lines and branched solutions of this equation are constructed and justified. The numerical examples are given.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
06.04.07