УДК 517. 968

А. Г. Щербакова

РАЗРЕШИМОСТЬ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ СО СТЕПЕННО-РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

Устанавливаются условия разрешимости систем интегральных уравнений второго рода с полиномиально-разностными ядрами типа свертки в нормальном и исключительном случаях и исследуются некоторые свойства их решений. В каждом из случаев определяются пространства, которым эти решения принадлежат.

Настоящая работа посвящена детальному изучению системы интегральных уравнений вида

$$P_m(x)\,\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} k_1(x-t)\,Q_n(t)\varphi(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_2(x-t)T_s(t)\,\varphi(t)\,dt = h(x), \qquad x\in R\,. \tag{1}$$

Здесь R – вещественная ось; $h(x)\in L_2$ – известная вектор-функция (в.ф.) размерности n; $k_1(x), k_2(x)\in L$ – известные матрицы-функции (м.ф.) размерности n; $\varphi(x)$ – неизвестная в.ф. размерности n, а

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k, \qquad Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} B_j x^j, \qquad T_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s} C_\nu x^\nu$$

– известные многочлены соответственно степеней m, n, s.

Заметим, что здесь и далее принадлежность м.ф. или в.ф. какому-либо пространству понимается поэлементно. При этом нормы м.ф. и в.ф. являются согласованными друг с другом.

Обозначим через $D^+ = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $D^- = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

На основании свойств преобразования Фурье [3, с. 77; 4, с. 16] исследование уравнения (1) приводится к исследованию следующей дифференциальной краевой задачи (ДКЗ):

$$\left[\sum_{k=0}^{m} A_k(-1)^k\,\Phi^{+(k)}(x) + \sum_{j=0}^{n} B_j(-1)^j K_1(x)\Phi^{+(j)}(x)\right] -$$

$$-\left[\sum_{k=0}^{m} A_k(-1)^k\,\Phi^{-(k)}(x) + \sum_{\nu=0}^{s} C_\nu(-1)^\nu K_2(x)\Phi^{-(\nu)}(x)\right] = H(x)\,,$$

$$x\in R\,, \tag{2}$$

где $K_1(x), K_2(x), H(x)$ – преобразования Фурье соответственно м.ф. $k_1(x)$, $k_2(x)$ и в.ф. $h(x)$; $\Phi^{+(p)}(x)$ и $\Phi^{-(q)}(x)$ – краевые значения на R соответственно неизвестных в.ф. $\Phi^{+(p)}(z)$ и $\Phi^{-(q)}(z)$, где $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ – неизвестные в.ф., аналитические соответственно в областях D^+ и D^-. В силу тождественности преобразований системы (2) и (1) эквивалентны в пространстве L_2 в том смысле, что они одновременно разрешимы в L_2 или нет, и каждому решению $\varphi(x)$ системы уравнений (1) в L_2 соответствует одно и только одно решение $\Phi^{\pm}(x)$ системы уравнений (2) и наоборот. При этом решения системы (1) выражаются через решения системы ДКЗ (2) по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[\Phi^+(t) - \Phi^-(t)\right] e^{-ixt}\,dt, \qquad x \in R. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что м.ф. $K_1(x)$, $K_2(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \ge 0$, $0 < \alpha \le 1$, $H_\alpha^{(0)} = H_\alpha$, а в.ф. $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \ge 0$, $L_2^{(0)} = L_2$. При этом, так как м.ф. $k_1(x), k_2(x) \in L$, то на основании теоремы Римана − Лебега [4, с. 42] $\lim\limits_{x\to\infty} K_{1ij}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} K_{2ij}(x) = 0$, $i, j = 1,\ldots,n$, т.е. $\det K_1(x) = \det K_2(x) = 0$ при $x \to \infty$, где $K_{1ij}(x), K_{2ij}(x)$ − преобразования Фурье элементов $k_{1ij}(x)$, $k_{2ij}(x)$ м.ф. $k_1(x), k_2(x)$ соответственно.

Теория разрешимости систем интегральных уравнений типа свертки с разностными ядрами была построена в работах [3, 6−8] при весьма широких предположениях относительно их ядер и правых частей. При этом исследование систем уравнений такого типа основывалось на исследовании соответствующей задачи Римана на вещественной оси, к решению которой они приводятся с помощью преобразования Фурье. Однако применить методы, указанные в работах [3, 7, 8], к исследованию системы (1) не представляется возможным, так как система уравнений (1) на основании свойств преобразования Фурье приводится к соответствующей дифференциальной краевой задаче (2) на вещественной оси R, а, значит, исследование системы уравнений (1) будет приводиться к исследованию системы ДКЗ (2).

Необходимо отметить, что в работах [1, 5] была сделана попытка исследования случая одного уравнения вида (1), где при исследовании соответствующей ДКЗ применялись интегральные представления для функций и их производных, аналитических в областях D^+ и D^-, ядра которых имели дополнительные точки ветвления в этих областях, что приводило к многозначности искомых функций, аналитических в областях D^+ и D^-. Таким образом, методы, рассмотренные в работах [1, 5], в нашем случае также неприменимы.

Следует также отметить, что интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами (т. е. скалярный случай) было подробно исследовано в работе [11].

Исследование системы уравнений (1) будем проводить на основе исследования системы ДКЗ (2). Соответствующим интегральным представлением для в.ф. и их производных, аналитических в областях D^+ и D^-, систему ДКЗ приведем к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с ядром Коши на вещественной оси R.

Построим аналитические соответственно в областях D^+ и D^- и исчезающие на бесконечности в.ф. $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, и пусть краевые значения на R соответственно $\Phi^{+(p)}(z)$ и $\Phi^{-(q)}(z)$ удовлетворяют условиям $\Phi^{+(p)}(x)$, $\Phi^{-(q)}(x) \in L_2^{(r)}$, $r \ge 0$, $p \ge 0, q \ge 0$. Согласно работам [9, 11] этим требованиям удовлетворяют функции

$$\Phi^\pm(z) = (2\pi i)^{-1} \int_R P^\pm(x,z)\rho(x)\,dx, \qquad z \in D^\pm, \tag{4}$$

где

$$P^+(x,z) = \frac{(-1)^p (x+i)^{-p}}{(p-1)!} \left[(x-z)^{p-1} \ln\left(1 - \frac{x+i}{z+i}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{p-2} d_{p-k-2} (x+i)^{k+1} (z+i)^{p-k-2}\right], \qquad x \in R, \qquad z \in D^+,$$

$$P^{-}(x,z)=\frac{(-1)^{q}(x-i)^{-q}}{(q-1)!}\left[(x-z)^{q-1}\ln\left(1-\frac{x-i}{z-i}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{q-2}\ell_{p-k-2}(x-i)^{k+1}(z-i)^{q-k-2}\right],\qquad x\in R,\qquad z\in D^{-},$$

а

$$d_{p-k-2}=(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}C_{p-1}^{p-1-j}(k-j+1)^{-1},$$

$$\ell_{q-k-2}=(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}C_{q-1}^{q-1-j}(k-j+1).$$

Здесь C_n^m – биномиальные коэффициенты. Под функцией $\ln\left[1-\dfrac{x+i}{z+i}\right]$ будем понимать главную ветвь $(\ln 1=0)$ логарифмической функции в комплексной плоскости с разрезом, соединяющим точки $z=-i$ и $z=\infty$ и идущим вдоль оси ординат в отрицательном ее направлении; под функцией $\ln\left[1-\dfrac{x-i}{z-i}\right]$ будем понимать главную ветвь $(\ln 1=0)$ логарифмической функции в комплексной плоскости с разрезом, соединяющим точки $z=i$ и $z=\infty$ и идущим вдоль оси ординат в положительном ее направлении.

В силу структуры функций $P^{\pm}(x,z)$ на основании работ [9, 11] получаем, что определяемые по формулам (4) в.ф. $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$ являются однозначными аналитическими функциями соответственно в областях D^{+} и D^{-}. В.ф. $\rho(x)\in L_2$ – плотность интегральных представлений (4) однозначно определяется [9] в.ф. $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$ и, наоборот, по заданной в.ф. $\rho(x)\in L_2$ в.ф. $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$ по формулам (4) строятся единственным образом. При этом [9, 11] справедливы представления

$$\Phi^{+(p)}(z)=(2\pi i)^{-1}\int_R (z+i)^{-p}(x-z)^{-1}\rho(x)\,dx,\qquad z\in D^{+},$$

$$\Phi^{-(q)}(z)=(2\pi i)^{-1}\int_R (z-i)^{-q}(x-z)^{-1}\rho(x)\,dx,\qquad z\in D^{-}.\tag{5}$$

Случай $m=n=s$. Используя свойства частных производных по z функций $P^{\pm}(x,z)$ и формулы Сохоцкого для производных [2, с. 42], на основании представлений (4), (5) систему ДКЗ (2) приводим к исследованию системы СИУ

$$A(x)\rho(x)+B(x)(\pi i)^{-1}\int_R (t-x)^{-1}\rho(t)\,dt+(T\rho)(x)=H(x),\quad x\in R,\tag{6}$$

где

$$A(x)=\frac{1}{2}(-1)^{m}\left\{\left[A_m+B_mK_1(x)\right](x+i)^{-m}+\right.$$
$$\left.+\left[A_m+C_mK_2(x)\right](x-i)^{-m}\right\},$$

$$B(x)=\frac{1}{2}(-1)^{m}\left\{\left[A_m+B_mK_1(x)\right](x+i)^{-m}-\right.$$
$$\left.-\left[A_m+C_mK_2(x)\right](x-i)^{-m}\right\},\tag{7}$$

$$(T\rho)(x)=\int_R K(x,t)\rho(t)\,dt,\qquad x\in R,\tag{8}$$

$$K(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\left[\left[A_k+B_kK_1(x)\right]\frac{\partial^k P^+(t,x)}{\partial x^k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[A_k+C_kK_2(x)\right]\frac{\partial^k P^-(t,x)}{\partial x^k}\right]\right], \qquad (9)$$

где $\dfrac{\partial^k P^{\pm}(t,x)}{\partial x^k}$ означают предельные значения на R функций $\dfrac{\partial^k P^{\pm}(t,z)}{\partial z^k}$, $k=0,\dots,m-1$.

Лемма 1. *Если м.ф.* $K_1(x), K_2(x)\in H_\alpha^{(r)}$, *то определенный формулой* (8) *оператор* $T: L_2^{(r)}\to L_2^{(r)}$, $r\ge 0$, *компактен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы следует из критерия Фреше – Колмогорова – Рисса компактности множеств в.ф. в пространствах $L_p, p>1$, интегральных операторов на вещественной оси, свойств [9] функций $P^{\pm}(x,z)$ и результатов работы [10]. ◊

Согласно работе [7, с. 406] системы ДКЗ (2) и СИУ (6) эквивалентны в пространстве L_2 в том смысле, что они одновременно разрешимы в L_2 или нет, и каждому решению $\rho(x)$ системы СИУ (6) в пространстве L_2 соответствует, возможно, не единственное решение $\Phi^{\pm}(x)$ системы ДКЗ (2) в L_2 и наоборот. Чтобы эта связь была однозначной, необходимо [7, с. 406] задать начальные условия системы ДКЗ (2). Поскольку решения $\Phi^{\pm}(x)$ ищутся в пространствах исчезающих на бесконечности функций, то по свойствам интеграла типа Коши решения системы ДКЗ (2) таковы, что в.ф. $\Phi^{\pm(k)}(\infty)=0$, $k=0,\dots,m-1$, т.е. начальные условия системы ДКЗ (2) являются нулевыми и задаются автоматически. Из этого следует, что системы ДКЗ (2) и СИУ (6) эквивалентны в пространстве L_2 в том смысле, что они одновременно разрешимы в L_2 или нет, и каждому решению $\rho(x)$ системы СИУ (6) в пространстве L_2 соответствует одно и только одно решение $\Phi^{\pm}(x)$ системы ДКЗ (2) в L_2 и наоборот. В силу (4) решения системы ДКЗ (2) выражаются через решения системы СИУ (6) по формулам

$$\Phi^{\pm}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_R P^{\pm}(t,x)\rho(t)\,dt, \qquad x\in R, \qquad (10)$$

где $p=q=m$; $P^{\pm}(t,x)$ – краевые значения на R функций $P^{\pm}(t,z)$, а в.ф. $\rho(x)$ – решение системы СИУ (6). В силу эквивалентности системы уравнений (1) системе ДКЗ (2) и эквивалентности системы ДКЗ (2) системе СИУ (6) следует, что система уравнений (1) и система СИУ (6) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и каждому решению $\rho(x)$ системы СИУ (6) соответствует одно и только одно решение $\varphi(x)$ системы (1) и наоборот. При этом решения системы (1) выражаются через решения системы СИУ (6) по формулам (10), (3). В силу этого систему уравнений (1) будем называть нетеровой, если будет нетеровой система СИУ (6).

Теорема 1. *Система* (1) *не является нетеровой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно работам [3, 6, 7] система СИУ (6) является нетеровой, если выполняются условия

$$\det[A(x)-B(x)]\ne 0, \qquad \det[A(x)+B(x)]\ne 0, \qquad x\in R.$$

Так как

$$A(x)+B(x)=(-1)^m\left[A_m+B_mK_1(x)\right](x+i)^{-m},$$

$$A(x)-B(x)=(-1)^m\left[A_m+C_mK_2(x)\right](x-i)^{-m},$$

то $\det[A(x)+B(x)]$, $\det[A(x)-B(x)]$ имеют на бесконечности ноль, по крайней мере, порядка m. Следовательно, система СИУ (6) не является нетеровой. Тогда в силу эквивалентности систем (1) и (6) следует, что система (1) не является нетеровой. ◊

Установим условия, при которых система уравнений (1) становится нетеровой и в этом случае является разрешимой.

Будем исследовать случай $\det[A_m + B_m K_1(x)] \neq 0$, $\det[A_m + C_m K_2(x)] \neq \neq 0$ в конечных точках вещественной оси R. Тогда для м.ф. $A(x)+B(x)$, $A(x)-B(x)$ согласно работе [8, с. 329] справедливы представления

$$A(x)+B(x) = M(x)\cdot \mathcal{D}_-(x)\cdot \mathcal{R}_-(x),$$

$$A(x)-B(x) = N(x)\cdot \mathcal{D}_+(x)\cdot \mathcal{R}_+(x), \tag{11}$$

где $M(x)$, $N(x)$ – м.ф. размерности n и $\det M(x)\neq 0$, $\det N(x)\neq 0$ на R; $\mathcal{R}_\pm(x)$ – м.ф. с постоянными и отличными от нуля определителями, элементами которых являются полиномы по степеням $\dfrac{1}{x\pm i}$ соответственно; $\mathcal{D}_\pm(x)$ – диагональные м.ф. вида

$$\mathcal{D}_-(x) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{(x+i)^{\nu_0^{(1)}}},\ldots,\frac{1}{(x+i)^{\nu_0^{(n)}}}\right\},$$

$$\mathcal{D}_+(x) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{(x-i)^{\mu_0^{(1)}}},\ldots,\frac{1}{(x-i)^{\mu_0^{(n)}}}\right\}$$

соответственно, где $\nu_0^{(1)},\ldots,\nu_0^{(n)}$, $\mu_0^{(1)},\ldots,\mu_0^{(n)}$ – неотрицательные целые числа такие, что

$$\sum_{j=1}^{n}\nu_0^{(j)} = \nu_0 = m, \qquad \sum_{j=1}^{n}\mu_0^{(j)} = \mu_0 = m, \tag{12}$$

причем $\nu_0^{(j)}$ не обязательно совпадают с $\mu_0^{(j)}$, $j=1,\ldots,n$.

Обозначим

$$r_0 = \max\left\{\nu_0^{(1)},\ldots,\nu_0^{(n)},\mu_0^{(1)},\ldots,\mu_0^{(n)}\right\}. \tag{13}$$

Рассмотрим м.ф. $M(x), N(x)\in H_\alpha^{(r)}$, $r\geq r_0$, $0<\alpha\leq 1$, где число r_0 определяется по формуле (13). Согласно работе [6, с. 53] м.ф. $N(x)M^{-1}(x)$ допускает факторизацию

$$N(x)M^{-1}(x) = \mathrm{X}^+(x)\cdot\Lambda(x)\cdot\mathrm{X}^-(x), \tag{14}$$

где $\det \mathrm{X}^\pm(x)\neq 0$ на R, а

$$\Lambda(x) = \operatorname{diag}\left\{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_1},\ldots,\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_n}\right\}, \tag{15}$$

и χ_j, $j=1,\ldots,n$, – частные индексы м.ф. $N(x)M^{-1}(x)$. Поскольку среди частных индексов могут быть как положительные, так и отрицательные, обозначим их следующим образом:

$$w = \sum_{\chi_j\geq 0}\chi_j, \qquad q = -\sum_{\chi_j<0}\chi_j, \tag{16}$$

тогда суммарный индекс м.ф. $N(x)M^{-1}(x)$ находим по формуле

$$\chi = w - q. \tag{17}$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть м.ф.* $k_1(x), k_2(x) \in L$, *в.ф.* $h(x) \in L_2$, *м.ф.* $K_1(x)$, $K_2(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq r_0$, $0 < \alpha \leq 1$, *в.ф.* $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \geq r_0$, *где число* r_0 *определяется по формуле* (13), $\det[A_m + B_m K_1(x)] \neq 0$, $\det[A_m + C_m K_2(x)] \neq 0$ *в конечных точках вещественной оси* R, *числа* w, q *определяются по формуле* (16), *а число* χ *– по формуле* (17) *и справедливы представления* (11).

Если $w - 2m \geq 0$, *то однородная система* (1) *в* L_2 *имеет не меньше чем* $w - 2m$ *линейно независимых решений. Неоднородная система* (1) *разрешима в* L_2, *если выполнено не меньше чем* q *условий разрешимости*

$$\int_R H(x)\psi_j(x)\,dx = 0\,, \tag{18}$$

где в.ф. $H(x)$ *– правая часть системы СИУ* (6), *в.ф.* $\psi_j(x)$ *– линейно независимые решения системы однородных СИУ, союзной системе СИУ* (6), *которая имеет вид*

$$A'(x)\psi(x) - \frac{1}{\pi i}\int_R \frac{B'(t)\psi(t)}{t-x}\,dt + \int_R K'(t,x)\psi(t)\,dt = 0\,, \tag{19}$$

где $A'(x)$, $B'(x)$, $K'(t,x)$ *обозначают матрицы, транспонированные по отношению к матрицам* $A(x)$, $B(x)$, $K(x,t)$ *– коэффициентам и регулярному ядру в СИУ* (6) *соответственно.*

Если $w - 2m < 0$, *то неоднородная система* (1) *в* L_2, *вообще говоря, неразрешима. Она будет разрешима в* L_2, *если будут выполнены* $q + 2m$ *условий разрешимости* (18).

Суммарный индекс системы (1) *равен* $\chi - 2m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим индекс системы СИУ (6). Поскольку согласно работе [8, с. 380–389] суммарный индекс системы СИУ (6) [8, с. 385] равен $æ - m$, где

$$æ = \frac{1}{2\pi}\arg\left\{\det\frac{A(x)-B(x)}{A(x)+B(x)}\right\},$$

или, что то же самое,

$$æ = \operatorname{ind}\left\{\det\frac{A(x)-B(x)}{A(x)+B(x)}\right\},$$

тогда

$$\det\frac{A(x)-B(x)}{A(x)+B(x)} = \det\left\{\frac{N(x)\cdot\mathcal{D}_+(x)\cdot\mathcal{R}_+(x)}{M(x)\cdot\mathcal{D}_-(x)\cdot\mathcal{R}_-(x)}\right\} =$$

$$= \det\left\{\frac{N(x)}{M(x)}\right\}\cdot\det\left\{\frac{\mathcal{D}_+(x)\cdot\mathcal{R}_+(x)}{\mathcal{D}_-(x)\cdot\mathcal{R}_-(x)}\right\} =$$

$$= \det\left\{\mathrm{X}^+(x)\cdot\Lambda(x)\cdot\mathrm{X}^-(x)\right\}\det\left\{\frac{\mathcal{D}_+(x)}{\mathcal{D}_-(x)}\right\}\cdot\det\left\{\frac{\mathcal{R}_+(x)}{\mathcal{R}_-(x)}\right\}.$$

Так как $\det \mathrm{X}^\pm(x) \neq 0$, $\det\mathcal{R}_\pm(x) \neq 0$ на R, а

$$\det[\Lambda(x)] = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_1+\ldots+\chi_n},$$

$$\det[\mathcal{D}_+(x)] = \frac{1}{(x-i)^{\mu_0^{(1)}+\ldots+\mu_0^{(n)}}} = \frac{1}{(x-i)^m},$$

$$\det[\mathcal{D}_-(x)] = \frac{1}{(x+i)^{\nu_0^{(1)}+\ldots+\nu_0^{(n)}}} = \frac{1}{(x+i)^m},$$

тогда

$$\det\left[\frac{\mathcal{D}_+(x)}{\mathcal{D}_-(x)}\right]=\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^m=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-m}.$$

Следовательно,

$$\det\left\{\frac{A(x)-B(x)}{A(x)+B(x)}\right\}=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_1+\ldots+\chi_n}\cdot\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-m}=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_1+\ldots+\chi_n-m}.$$

Таким образом, суммарный индекс системы СИУ (6) будет

$$\chi_1+\ldots+\chi_n-2m=\chi-2m.$$

С другой стороны, с учетом (17),

$$\chi-2m=w-q-2m.$$

Таким образом, согласно работам [3, 6–8], если $w-2m\ge 0$, то однородная система СИУ (6) имеет не меньше чем $w-2m$ линейно независимых решений, а неоднородная система СИУ (6) разрешима, если выполнены не меньше чем q условий ее разрешимости (18).

Если $w-2m<0$, то неоднородная система СИУ (6), вообще говоря, неразрешима. Она будет разрешима, если будут выполнены не меньше чем $q+2m$ условий ее разрешимости (18).

Из эквивалентности систем (1) и (6) следует утверждение теоремы. ◊

Согласно [3] символом $L_2[-\mu;0]$ обозначим пространство функций $\varphi(x)\in L_2$, удовлетворяющих условиям $(x+i)^{\mu}\cdot\varphi(x)\in L_2$.

Теорема 3. *Пусть м.ф.* $k_1(x),k_2(x)\in L$, *в.ф.* $h(x)\in L_2$, *м.ф.* $K_1(x)$, $K_2(x)\in H_{\alpha}^{(r)}$, $r\ge r_0$, $0<\alpha\le 1$, *в.ф.* $H(x)\in L_2^{(r)}$, $r\ge r_0$, *где число* r_0 *определяется по формуле* (13), $\det[A_m+B_mK_1(x)]\ne 0$, $\det[A_m+C_mK_2(x)]\ne 0$ *в конечных точках вещественной оси* R, *и система* (1) *разрешима. Тогда ее решения принадлежат пространству* $L_2[-r-m+r_0;0]$.

Доказательство. В силу условий теоремы согласно работе [3] решения $\rho(x)$ системы СИУ (6), если они существуют, принадлежат пространству $L_2^{(r-r_0)}$. Тогда в силу свойств функций $P^{\pm}(x,z)$ определяемые формулой (10) в.ф. $\Phi^{\pm}(x)$ принадлежат пространству $L_2^{(r-r_0+m)}$, $r\ge r_0$. Тогда из свойств преобразования Фурье [3] следует, что решения системы (1) принадлежат пространству $L_2[-r-m+r_0;0]$, $r\ge r_0$.

Пусть теперь условия $\det[A_m+B_mK_1(x)]\ne 0$, $\det[A_m+C_mK_2(x)]\ne 0$ на R не выполняются. В этом случае будем предполагать, что $\det[A_m+B_mK_1(x)]$ и $\det[A_m+C_mK_2(x)]$ обращаются в ноль на вещественной оси R в точках $a_1,a_2,\ldots,a_u$ и $b_1,b_2,\ldots,b_u$ соответственно целых порядков $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_u$ и $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_u$. Тогда согласно работе [8, с. 328] для м.ф. $A(x)+B(x)$, $A(x)-B(x)$ вновь справедливы представления (11), в которых м.ф. $M(x),N(x)$, $\mathcal{R}_{\pm}(x)$ те же, что и в предыдущем случае, а $\mathcal{D}_{\pm}(x)$ – диагональные м.ф. соответственно вида

$$\mathcal{D}_-(x)=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{(x+i)^{\nu_0^{(1)}}}\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x+i}\right)^{\nu_j^{(1)}},\ldots,\ldots,\frac{1}{(x+i)^{\nu_0^{(n)}}}\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x+i}\right)^{\nu_j^{(n)}}\right\},\tag{20}$$

$$\mathcal{D}_+(x) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{(x-i)^{\mu_0^{(1)}}}\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x-i}\right)^{\mu_j^{(1)}}, \ldots,\right.$$

$$\left.\ldots, \frac{1}{(x-i)^{\mu_0^{(n)}}}\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x-i}\right)^{\mu_j^{(n)}}\right\}, \tag{21}$$

где $\nu_0^{(1)}, \ldots, \nu_0^{(n)}, \nu_1^{(1)}, \ldots, \nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_u^{(1)}, \ldots, \nu_u^{(n)}$, $\mu_0^{(1)}, \ldots, \mu_0^{(n)}, \mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_u^{(1)}$, $\ldots, \mu_u^{(n)}$ – неотрицательные целые числа такие, что для μ_0, ν_0 имеют место равенства (12) и, кроме того,

$$\nu_k = \sum_{j=1}^{n}\nu_k^{(j)}, \qquad k = 1,\ldots,u, \qquad \nu = \sum_{k=1}^{u}\nu_k\,, \tag{22}$$

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n}\mu_k^{(j)}, \qquad k = 1,\ldots,u, \qquad \mu = \sum_{k=1}^{u}\mu_k\,. \tag{23}$$

Обозначим

$$r_0 = \max\{\nu_0^{(1)}, \ldots, \nu_0^{(n)}, \nu_1^{(1)}, \ldots, \nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_u^{(1)}, \ldots, \nu_u^{(n)}, \mu_0^{(1)}, \ldots, \mu_0^{(n)}, \mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_u^{(1)}, \ldots, \mu_u^{(n)}\}\,. \tag{24}$$

Вновь рассмотрим м.ф. $M(x), N(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \ge r_0$, $0 < \alpha \le 1$, где число r_0 определяется по формуле (24). Аналогично предыдущему случаю м.ф. $N(x)M^{-1}(x)$ допускает факторизацию (14), где м.ф. $\Lambda(x)$ имеет вид (15), и χ_j, $j = 1,\ldots,n$, – частные индексы м.ф. $N(x)M^{-1}(x)$, для которых справедливы обозначения (16), а для суммарного индекса СИУ (6) сохраняется обозначение (17). ◊

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть м.ф.* $k_1(x), k_2(x) \in L$, $h(x) \in L_2$, *м.ф.* $K_1(x), K_2(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \ge r_0$, *в.ф.* $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \ge r_0$, *где число* r_0 *определено соотношением* (24), $\det[A_m + B_m K(x)]$ *и* $\det[A_m + C_m K_2(x)]$ *имеют на вещественной оси* R *нули в конечных точках* $a_1, \ldots, a_u$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_u$ *соответственно целых порядков* $\nu_1, \ldots, \nu_u$ *и* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_u$ *и справедливо представление* (11), *где м.ф.* $\mathcal{D}_\mp(x)$ *имеют вид соответственно* (20) *и* (21), *а* $\det M(x) \ne 0$, $\det N(x) \ne 0$ *на* R, *числа* w, q *определяются по формуле* (16), *числа* ν, μ *– по формулам* (22) *и* (23) *соответственно, а число* χ *– по формуле* (17), *и справедливо представление* (14).

Если $w - 2m - 2\nu - \mu \ge 0$, *то однородная система* (1) *в пространстве* L_2 *имеет не меньше чем* $w - 2m - 2\nu - \mu$ *линейно независимых решений. Неоднородная система* (1) *разрешима в* L_2, *если выполнено не меньше чем* q *условий разрешимости вида* (18).

Если $w - 2m - 2\nu - \mu < 0$, *то неоднородная система* (1) *в пространстве* L_2, *вообще говоря, не разрешима. Она будет разрешима в* L_2, *если будут выполнены* $q + 2m + 2\nu + \mu$ *условий разрешимости* (18).

Суммарный индекс системы (1) *равен* $\chi - 2m - 2\nu - \mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим индекс системы СИУ (6). Поскольку согласно работе [8, с. 380–389] суммарный индекс системы СИУ (6) [8, с. 388] равен $æ - m - \nu$, где

$$æ = \frac{1}{2\pi}\arg\left\{\det\frac{A(x)-B(x)}{A(x)+B(x)}\cdot\frac{\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x-i}\right)^{\nu_j}}{\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x+i}\right)^{\mu_j}}\right\}$$

или, что то же самое,

$$æ = \operatorname{ind}\left\{\det\frac{A(x)-B(x)}{A(x)+B(x)}\cdot\frac{\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x-i}\right)^{\nu_j}}{\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x+i}\right)^{\mu_j}}\right\}.$$

Тогда аналогично нормальному случаю имеем

$$\det\frac{A(x)-B(x)}{A(x)+B(x)} = \det\left\{\frac{N(x)\cdot\mathcal{D}_+(x)\cdot\mathcal{R}_+(x)}{M(x)\cdot\mathcal{D}_-(x)\cdot\mathcal{R}_-(x)}\right\} =$$

$$= \det\left\{\frac{N(x)}{M(x)}\right\}\cdot\det\left\{\frac{\mathcal{D}_+(x)\cdot\mathcal{R}_+(x)}{\mathcal{D}_-(x)\cdot\mathcal{R}_-(x)}\right\} =$$

$$= \det\left\{X^+(x)\cdot\Lambda(x)\cdot X^-(x)\right\}\det\left\{\frac{\mathcal{D}_+(x)}{\mathcal{D}_-(x)}\right\}\cdot\det\left\{\frac{\mathcal{R}_+(x)}{\mathcal{R}_-(x)}\right\}.$$

Так как $\det X^{\pm}(x)\neq 0$, $\det\mathcal{R}_{\pm}(x)\neq 0$ на R, а

$$\det[\Lambda(x)] = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_1+\ldots+\chi_n},$$

$$\det[\mathcal{D}_+(x)] = \frac{1}{(x-i)^{\mu_0^{(1)}+\ldots+\mu_0^{(n)}}}\cdot\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x-i}\right)^{\mu_j^{(1)}+\ldots+\mu_j^{(n)}} =$$

$$= \frac{1}{(x-i)^m}\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x-i}\right)^{\mu_j},$$

$$\det[\mathcal{D}_-(x)] = \frac{1}{(x+i)^{\nu_0^{(1)}+\ldots+\nu_0^{(n)}}}\cdot\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x+i}\right)^{\nu_j^{(1)}+\ldots+\nu_j^{(n)}} =$$

$$= \frac{1}{(x+i)^m}\prod_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x+i}\right)^{\nu_j},$$

тогда

$$æ = \operatorname{ind}\left\{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_1+\ldots+\chi_n}\frac{\frac{1}{(x-i)^{\nu_0}}\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x-i}\right)^{\mu_j}}{\frac{1}{(x+i)^{\nu_0}}\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x+i}\right)^{\nu_j}}\cdot\frac{\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-a_j}{x-i}\right)^{\nu_j}}{\prod\limits_{j=1}^{u}\left(\frac{x-b_j}{x+i}\right)^{\mu_j}}\right\} =$$

$$= \operatorname{ind}\left\{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi_1+\ldots+\chi_n}\cdot\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\nu_0}\cdot\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\mu_1+\ldots+\mu_u}\cdot\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\nu_1+\ldots+\nu_u}\right\}.$$

Следовательно, суммарный индекс системы СИУ (6) будет

$$\chi_1+\ldots+\chi_n-\nu_0-\nu_1-\ldots-\nu_u-\mu_1-\ldots-\mu_u-m-\nu = \chi-2m-2\nu-\mu.$$

С другой стороны, с учетом (17)

$$\chi-2m-2\nu-\mu = w-q-2m-2\nu-\mu.$$

Таким образом, согласно работам [3, 6–8], если $w-2m-2\nu-\mu\geq 0$, то однородная система СИУ (6) имеет не меньше чем $w-2m-2\nu-\mu$ линейно независимых решений, а неоднородная система СИУ (6) разрешима, если выполнены не меньше чем q условий ее разрешимости вида (18).

Если $w - 2m - 2\nu - \mu < 0$, то неоднородная система СИУ (6), вообще говоря, неразрешима. Она будет разрешима, если будут выполнены не меньше чем $q + 2m + 2\nu + \mu$ условий ее разрешимости (18).

Из эквивалентности систем (1) и (6) следует утверждение теоремы. ◊

Теорема 5. *Пусть м.ф.* $k_1(x), k_2(x) \in L$, *в.ф.* $h(x) \in L_2$, *м.ф.* $K_1(x)$, $K_2(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq r_0$, $0 < \alpha \leq 1$, *в.ф.* $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \geq r_0$, *где число* r_0 *определяется по формуле* (24), $\det[A_m + B_m K(x)]$ *и* $\det[A_m + C_m K_2(x)]$ *имеют на вещественной оси* R *нули в конечных точках* $a_1, \dots, a_u$ *и* $b_1, b_2, \dots, b_u$ *соответственно целых порядков* $\nu_1, \dots, \nu_u$ *и* $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_u$, *справедливо представление* (11), *где* $\det M(x) \neq 0$, $\det N(x) \neq 0$ *на* R, *и система* (1) *разрешима. Тогда ее решения принадлежат пространству* $L_2[-r - m + r_0; 0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий теоремы согласно работе [3] решения $\rho(x)$ системы СИУ (6), если они существуют, принадлежат пространству $L_2^{(r-r_0)}$. Тогда в силу свойств функций $P^{\pm}(x,z)$ определяемые формулой (10) в.ф. $\Phi^{\pm}(x)$ принадлежат пространству $L_2^{(r-r_0+m)}$, $r \geq r_0$. Тогда из свойств преобразования Фурье [3] следует, что решения системы (1) принадлежат пространству $L_2[-r - m + r_0; 0]$, $r \geq r_0$. ◊

Другие случаи соотношений между числами m, n, s.

Если $m > n$, $m > s$, то в этом случае в формулах (4), (5) $p = q = m$. В этом случае $A(x) + B(x) = (-1)^m A_m (x+i)^{-m}$, $A(x) - B(x) = (-1)^m A_m (x-i)^{-m}$, а, значит, имеют место утверждения теорем 2 и 3.

Если $m < n = s$, то в этом случае в формулах (4), (5) $p = q = n$. Имеют место представления (11), где м.ф. $\mathcal{D}_{\mp}(x)$ имеют вид (20) и (21) соответственно, в которых вместо $\nu_0^{(1)}, \dots, \nu_0^{(n)}$ следует положить $\gamma_0^{(1)}, \dots, \gamma_0^{(n)}$, а вместо $\mu_0^{(1)}, \dots, \mu_0^{(n)}$ положить $\delta_0^{(1)}, \dots, \delta_0^{(n)}$, при этом

$$\gamma_0^{(j)} = \nu_0^{(j)} + \tilde{\nu}_0^{(j)}, \qquad \delta_0^{(j)} = \mu_0^{(j)} + \tilde{\mu}_0^{(j)}, \tag{25}$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_0^{(j)} = \nu_0 = n, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_0^{(j)} = \mu_0 = n, \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\nu}_0^{(j)} = \tilde{\nu}_0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}_0^{(j)} = \tilde{\mu}_0, \tag{27}$$

и при этом $\tilde{\nu}_0, \tilde{\mu}_0$ являются порядками нулей на бесконечности соответственно м.ф. $K_1(x)$ и $K_2(x)$. При этом

$$r_0 = \max\{\gamma_0^{(1)}, \dots, \gamma_0^{(n)}, \nu_1^{(1)}, \dots, \nu_1^{(n)}, \dots, \nu_u^{(1)}, \dots, \nu_u^{(n)}, \delta_0^{(1)}, \dots, \delta_0^{(n)}, \mu_1^{(1)}, \dots, \mu_1^{(n)}, \dots, \mu_u^{(1)}, \dots, \mu_u^{(n)}\}. \tag{28}$$

В этом случае имеют место утверждения, аналогичные теоремам 4 и 5.

Если $m < s < n$, то в этом случае в формулах (4), (5) $p = s$, $q = n$. Имеют место представления (11), где м.ф. $\mathcal{D}_{\mp}(x)$ имеют вид (20) и (21) соответственно, в которых вместо $\nu_0^{(1)}, \dots, \nu_0^{(n)}$ вновь следует положить $\gamma_0^{(1)}, \dots, \gamma_0^{(n)}$, а вместо $\mu_0^{(1)}, \dots, \mu_0^{(n)}$ положить $\delta_0^{(1)}, \dots, \delta_0^{(n)}$, определяемые по формулам (25), в которых остаются справедливыми представления (27), а в представлениях (26) следует положить $\nu_0 = s$, $\mu_0 = n$. Число r_0 будет определяться по формуле (28) с учетом значений $\delta_0^{(1)},\ldots,\delta_0^{(n)}$ и $\gamma_0^{(1)},\ldots,\gamma_0^{(n)}$, и имеют место утверждения, аналогичные теоремам 4 и 5.

Если $m = s < n$, то в этом случае в формулах (4), (5) $p = n$, $q = s$. Имеют место представления (11), где м.ф. $\mathcal{D}_+(x)$ имеет вид (21), а м.ф. $\mathcal{D}_-(x)$ – вид (20), в котором вместо $\nu_0^{(1)},\ldots,\nu_0^{(n)}$ полагаем $\gamma_0^{(1)},\ldots,\gamma_0^{(n)}$, определяемые формулой (25), (27), а в (26) $\nu_0 = n$, и

$$r_0 = \max\{\gamma_0^{(1)},\ldots,\gamma_0^{(n)},\nu_1^{(1)},\ldots,\nu_1^{(n)},\ldots,\nu_u^{(1)},\ldots,\nu_u^{(n)},\mu_0^{(1)},\ldots,$$
$$\ldots,\mu_0^{(n)},\mu_1^{(1)},\ldots,\mu_1^{(n)},\ldots,\mu_u^{(1)},\ldots,\mu_u^{(n)}\}.$$

В этом случае имеют место утверждения, аналогичные теоремам 4 и 5.

1. *Азаматова В. И., Лизунова И. В.* Об одном интегральном уравнении типа свертки // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. науки. – 1971. – № 2. – С. 43–50.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – Москва: Наука, 1978. – 295 с.
4. *Князев П. Н.* Интегральные преобразования. – Минск: Выш. шк., 1969. – 197 с.
5. *Лизунова И. В.* Парные интегральные уравнения типа сверки с полиномиальными коэффициентами // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. науки. – 1976. – № 4. – С. 40–46.
6. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – Москва: Наука, 1977. – 448 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 541 с.
8. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. – Москва: Мир, 1979. – 493 с.
9. *Тихоненко Н. Я., Мельник А. С.* Разрешимость и свойства решений сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на вещественной оси // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 9. – С. 1218–1224.
10. *Тихоненко Н. Я., Свяжина Н. Н.* О компактности коммутатора на вещественной оси // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 83–87.
11. *Тихоненко Н. Я., Щербакова А. Г.* Разрешимость и свойства решений интегральных уравнений типа свертки со степенно-разностными ядрами // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 9. – С. 1218–1224.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ І ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ ЗІ СТЕПЕНЕВО-РІЗНИЦЕВИМИ ЯДРАМИ

Встановлюються умови розв'язності систем інтегральних рівнянь другого роду з поліноміально-різницевими ядрами типу згортки в нормальному і винятковому випадках і вивчаються певні властивості їх розв'язків. У кожному з випадків визначаються простори, до яких ці розв'язки належать.

SOLVABILITY AND PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE WITH DEGREE-DIFFERENCE KERNELS

The conditions of solvability of systems of the second kind integral equations with polynomial difference kernels of the convolution type in the normal and singular cases are defined here. Besides some properties of their solutions are studied. The spaces to which the solutions belong in every case are defined also.

Приднестр. гос. ун-т
им. Т. Г. Шевченко, Тирасполь, Молдова

Получено
25.11.07