УДК 517.954

Е. А. Буряченко

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КРУГЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА 2*m* В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ИМЕЮЩИХ УГЛЫ НАКЛОНА

Получен критерий нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в единичном круге K для общего уравнения четного порядка $2m$, $m > 2$, с постоянными комплексными коэффициентами и однородным вырожденным символом. Установлена зависимость между значением кратности корней характеристического уравнения и существованием нетривиального решения задачи из пространства $C^{2m}(\bar{K})$ в случае корней характеристического уравнения, не равных $\pm i$.

Введение. Целью данной работы является получение критерия нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в единичном круге K для общего уравнения четного порядка $2m$, $m > 2$, с постоянными комплексными коэффициентами:

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^{2m}u}{\partial x_1^{2m}} + a_1 \frac{\partial^{2m}u}{\partial x_1^{2m-1}\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{2m-1} \frac{\partial^{2m}u}{\partial x_1 \partial x_2^{2m-1}} + a_{2m} \frac{\partial^{2m}u}{\partial x_2^{2m}} = 0\,, \qquad (1)$$

$$u\big|_{\partial K} = 0, \qquad u'_\nu\big|_{\partial K} = 0, \qquad \ldots, \qquad u_\nu^{(m-1)}\big|_{\partial K} = 0\,, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор внешней нормали; $\partial_x = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$ – вектор-градиент; $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,1,\ldots,2m$. В работе [6] был получен критерий нетривиальной разрешимости задачи (1), (2) для уравнений главного типа [10, с. 48], т.е. в случае, когда корни характеристического уравнения $L(1,\lambda) = 0$ простые и не равны $\pm i$.

Напомним [6], что *углом наклона характеристики*, отвечающей корню λ_j характеристического уравнения $L(1,\lambda) = 0$, называется некоторое решение φ_j уравнения $-\mathrm{tg}\,\varphi_j = \lambda_j$, $j = 1,\ldots,2m$. Углом между i-й и j-й характеристикой назовем разность $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, $i \ne j$.

Вопросы тривиальности ядра задачи Дирихле в так называемых исключительных случаях, когда некоторые характеристики уравнения не существуют ($\exists k^* : \lambda_{k^*} = \pm i$) и (или) кратны для общих уравнений второго порядка были рассмотрены А. В. Бицадзе [3], В. П. Бурским [5], Н. Э. Товмасяном [9], а для уравнений четвертого порядка – Е. А. Буряченко [7], А. Н. Бабаяном [11]. Причем в работе [7] полностью решен вопрос о получении критериев нетривиальной разрешимости задачи Дирихле и установлена зависимость между значением кратности корней характеристического уравнения и существованием нетривиального решения соответствующей задачи. В настоящей работе обобщены результаты статей [6, 7] для общего дифференциального уравнения (1) произвольного четного порядка $2m$, $m > 2$, с постоянными комплексными коэффициентами и установлена зависимость между значением кратности корней характеристического уравнения и существованием нетривиального решения задачи (1), (2) в пространстве $C^{2m}(\bar{K})$.

1. Двойственность уравнение-область. Качественные свойства решений общих граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных зависят от области, в которой рассматривается задача. Аналитически установить эту зависимость удалось в монографии [4, с. 199], в которой автором был разработан метод двойственности уравнение-область, позволяющий без больших технических сложностей исследовать общие граничные задачи для бестипных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка в полуалгебраических областях. Суть метода заключается в следующем.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная полуалгебраическая область, заданная неравенством $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}$ с некоторым вещественным эллиптическим полиномом $P(x)$. Уравнение $P(x) = 0$ задает границу $\partial\Omega$, предполагается, что граница области невырождена, т.е. $|\nabla P| \neq 0$ на $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую граничную задачу для бестипного линейного уравнения с постоянными коэффициентами порядка ℓ:

$$L(D)u = \sum_{|\alpha| \le \ell} a_\alpha D^\alpha u = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u'_\nu|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \ldots, \qquad u_\nu^{(\gamma-1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \gamma \le \ell. \tag{3}$$

Под двойственностью уравнение-область понимается соответствие между задачей (3) и уравнением

$$P(-D_\xi)^{\ell-\gamma}\{L(\xi)w(\xi)\} = 0, \tag{4}$$

отмеченное в следующем утверждении.

Утверждение 1 [4, с. 199–200]. *Для каждого нетривиального решения задачи* (3) *из пространства* $C^\ell(\bar{\Omega})$ *существует нетривиальное аналитическое в* C^n *решение уравнения* (4) *из некоторого класса* Z *целых функций и, наоборот: каждому ненулевому решению* $w(\xi) \in Z$ *уравнения* (4) *отвечает ненулевое решение* $u \in C^\ell(\bar{\Omega})$ *задачи* (3). *Класс* Z *здесь определен как пространство образов Фурье функций вида* $\Theta_\Omega v$, $v \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$, *где* Θ_Ω *– характеристическая функция области* Ω.

Если L – оператор второго порядка с простыми характеристиками, то двойственной задачей к задаче Дирихле $L(D_x)u = 0$, $u|_{P(x)=0} = 0$, будет задача $P(-D_\xi)w = 0$, $w|_{L(\xi)=0} = 0$, в некотором пространстве целых функций. Здесь ξ – двойственная переменная. Утверждение 1 позволяет установить изоморфизм между произвольным решением граничной задачи (3) из пространства $C^\ell(\bar{\Omega})$ и аналитическим из C^n решением соответствующей двойственной задачи, а также свести вопрос разрешимости краевых задач для бестипных уравнений к аналогичным вопросам, но уже для эллиптических уравнений, возможно, менее сложной структуры и низкого порядка.

2. Формулировка основного результата. В силу разложения символа уравнения (1)

$$L(\xi) = a_0\xi_1^{2m} + a_1\xi_1^{2m-1}\xi_2 + \ldots + a_{2m-1}\xi_1\xi_2^{2m-1} + a_{2m}\xi_2^{2m} =$$
$$= \langle \xi, a^1\rangle\langle \xi, a^2\rangle\langle \xi, a^3\rangle\ldots\langle \xi, a^{2m-1}\rangle\langle \xi, a^{2m}\rangle,$$

уравнение (1) перепишем в виде

$$\langle \nabla, a^1\rangle\langle \nabla, a^2\rangle\langle \nabla, a^3\rangle\ldots\langle \nabla, a^{2m-1}\rangle\langle \nabla, a^{2m}\rangle u = 0, \tag{5}$$

где $a^j \in \mathbb{C}^2$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$, – комплексные векторы, определяемые комплексными коэффициентами уравнения (1); $\langle a, b\rangle = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2$ – скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{C}^2$. В дальнейшем будем рассматривать также векторы $\tilde{a}^j = (-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j) = (-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть все корни характеристического уравнения* $L(1,\lambda) = 0$ *не равны* $\pm i$ *и пусть* λ_1 – *корень кратности* $k > 1$, *остальные корни простые. Тогда*:

1°). *Если* $k = 2$, *то для нетривиальной разрешимости задачи Дирихле* (1), (2) *в* $C^{2m}(\bar{K})$ *необходимо и достаточно, чтобы углы наклона характеристик удовлетворяли следующему условию для некоторого* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m$ *:*

$$\det\begin{bmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cdots & \cos(n-2(m-1))\varphi_1 & \sin(n-2(m-1))\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & \cdots & -(n-2(m-1))\sin(n-2(m-1))\varphi_1 & (n-2(m-1))\cos(n-2(m-1))\varphi_1 \\ \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cdots & \cos(n-2(m-1))\varphi_3 & \sin(n-2(m-1))\varphi_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_{2m} & \sin n\varphi_{2m} & \cdots & \cos(n-2(m-1))\varphi_{2m} & \sin(n-2(m-1))\varphi_{2m} \end{bmatrix} = 0. \tag{6}$$

При выполнении этого условия существует нетривиальное полиномиальное решение задачи (1), (2).

2°). *Если* $k = 3$, *то необходимым и достаточным условием нетривиальной разрешимости задачи* (1), (2) *в* $C^{2m}(\bar{K})$ *является выполнение равенства для некоторого* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m$ *:*

$$\det\begin{bmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cdots & \cos(n-2(m-1))\varphi_1 & \sin(n-2(m-1))\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & \cdots & -(n-2(m-1))\sin(n-2(m-1))\varphi_1 & (n-2(m-1))\cos(n-2(m-1))\varphi_1 \\ n^2\cos n\varphi_1 & n^2\sin n\varphi_1 & \cdots & (n-2(m-1))^2\cos(n-2(m-1))\varphi_1 & (n-2(m-1))^2\sin(n-2(m-1))\varphi_1 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cdots & \cos(n-2(m-1))\varphi_4 & \sin(n-2(m-1))\varphi_4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_{2m} & \sin n\varphi_{2m} & \cdots & \cos(n-2(m-1))\varphi_{2m} & \sin(n-2(m-1))\varphi_{2m} \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

при выполнении которого существует полиномиальное решение задачи.

3°). *При* $k = \beta$, $3 < \beta < 2m$, *задача* (1), (2) *имеет нетривиальное решение в* $C^{2m}(\bar{K})$ *тогда и только тогда, когда углы наклона характеристик удовлетворяют условию вида* (6), β *строка определителя которого является производной* $(\beta - 1)$*-й строки.*

4°). *Если* $k = 2m$, *то задача* (1), (2) *имеет только нулевое решение в пространстве* $C^{2m}(\bar{K})$.

Доказательство. ***1°***). *Необходимость.* Согласно утверждению 1, существование нетривиального решения задачи Дирихле (1), (2) в пространстве $C^{2m}(\bar{K})$ влечет существование нетривиального аналитического в C^2 решения $w(\xi) \in Z$ уравнения

$$(\Delta_\xi + 1)^m \{L(\xi)\cdot w(\xi)\} = 0. \tag{8}$$

Раскладывая функцию $w(\xi)$ в степенной ряд, для младшей нетривиальной однородной полиномиальной части $\tilde{v}(\xi) = L(\xi)\tilde{w}(\xi)$ ряда $v(\xi) = L(\xi)w(\xi)$ получим уравнение

$$\Delta_\xi{}^m \tilde{v}(\xi) = 0. \tag{9}$$

Из соотношений (32.15)–(32.22) в [8] или из формулы Альманси [2, с. 208] общее полиномиальное решение уравнения (9) можно записать в виде

$$\tilde{v}(\xi) = \mathrm{Re}\left\{f_1(z) + \ldots + \bar{z}^{m-1} f_m(z)\right\} + i\,\mathrm{Re}\left\{g_1(z) + \ldots + \bar{z}^{m-1} g_m(z)\right\},$$

где $f_i(z) = \sum f_{in} z^n$, $g_i(z) = \sum g_{in} z^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, − некоторые полиномы; $z = \xi_1 + i\xi_2$. Переходя к тригонометрической записи комплексного числа $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$, получим

$$\begin{aligned} v(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \big(&\alpha_{1n} \cos n\varphi - \beta_{1n} \sin n\varphi + \alpha_{2n} \cos(n-2)\varphi - \\ &- \beta_{2n} \sin(n-2)\varphi + \cdots + \\ &+ \alpha_{mn} \cos(n - 2(m-1))\varphi - \beta_{mn} \sin(n - 2(m-1))\varphi\big). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь постоянные α_{in}, β_{in} строятся по коэффициентам разложения полиномов $f_i(z) = \sum f_{in} z^n$, $g_i(z) = \sum g_{in} z^n$, $i = 1, \ldots, m$, следующим образом:

$$\mathrm{Re}\,\alpha_{in} = \mathrm{Re}\, f_{i,n-(i-1)}, \qquad \mathrm{Im}\,\alpha_{in} = \mathrm{Re}\, g_{i,n-(i-1)},$$

$$\mathrm{Re}\,\beta_{in} = \mathrm{Im}\, f_{i,n-(i-1)}, \qquad \mathrm{Im}\,\beta_{in} = \mathrm{Im}\, g_{i,n-(i-1)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Условия делимости целой функции $\tilde{v}(\xi) = L(\xi)\tilde{w}(\xi)$ на символ

$$\left\langle \xi, a^1 \right\rangle^2 \left\langle \xi, a^3 \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m-1} \right\rangle \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle$$

имеют вид

$$\tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \quad \tilde{v}'_\varphi\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \quad \tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_3} = 0, \quad \ldots, \quad \tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_{2m}} = 0. \tag{11}$$

Здесь использован тот факт, что условие $\left\langle \xi, a^j \right\rangle = 0$ эквивалентно равенству

$$\varphi = -\varphi_j, \qquad j = 1, 3, \ldots, 2m.$$

Подставляя (10) в (11) приходим к системе линейных уравнений относительно постоянных α_{in}, β_{in} с определителем, стоящим в левой части равенства (6). Поскольку двойственная задача (8) имеет нетривиальное решение, то существует ненулевой набор постоянных α_{in}, β_{in}, $n = 1, \ldots, m$. Значит, линейная система обладает ненулевым решением, что влечет обращение в нуль её определителя, т.е. выполнение условия (6).

Достаточность. При выполнении условия (6) для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m$, построим нетривиальное решение задачи (1), (2) в явном виде. Тем самым будет доказана достаточность условия (6) для нетривиальной разрешимости задачи (1), (2). В силу кратности корня λ_1 уравнение (5) приобретает вид

$$\left\langle \nabla, a^1 \right\rangle^2 \left\langle \nabla, a^3 \right\rangle \ldots \left\langle \nabla, a^{2m-1} \right\rangle \left\langle \nabla, a^{2m} \right\rangle u = 0,$$

и ему, вследствие ортогональности векторов a^j и $\tilde{a}^j$ при каждом $j = 1, 2, \ldots, \ldots, 2m$, удовлетворяет функция вида

$$u(x) = \sum_{j=1, j\neq 2}^{2m} C_j F_j(-\tilde{a}^j \cdot x) + C_2 \left\langle x, a^1 \right\rangle F_2(-\tilde{a}^1 \cdot x). \tag{12}$$

Здесь $F_j(y)$ − некоторые гладкие функции одного аргумента, C_j − постоянные, $j = 1, 2, \ldots, 2m$.

Для построения нетривиального решения задачи (1), (2) необходимо так подобрать функции $F_j(-\tilde{a}^j \cdot x)$, чтобы (12) удовлетворяла граничным условиям (2) для некоторого ненулевого набора постоянных C_j. В работе [6] было доказано, что в качестве $F_j(y)$, $j \neq 2$, можно взять функцию, являющуюся с точностью до постоянной $(m-1)$-й первообразной полинома Чебышева первого рода порядка $N = n - m + 1$ [1]:

$$F_j(y) = F_{m-1}(y) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{s} \left\{ C_r^+(N) T_{N+2r+1}(y) + C_r^-(N) T_{N-2r-1}(y) \right\}, & m-1 = 2s+1, \\ \sum\limits_{r=0}^{s} \left\{ D_r^+(N) T_{N+2r}(y) + D_r^-(N) T_{N-2r}(y) \right\}, & m-1 = 2s, \end{cases} \quad (13)$$

$j \neq 2$, C_r^+, C_r^-, D_r^+, D_r^- – постоянные, зависящие только от N и возникающие при вычислении $(m-1)$-й первообразной полинома Чебышева первого рода порядка $N = n - m + 1$.

Покажем, что в качестве функции $F_2(y)$ можно взять

$$F_2(y) = F_j'(y) = F_{m-2}(y) = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{m-2} T_{n-m+1}(y)\, dy .$$

Тогда согласно формуле (13) получим

$$F_2(y) = F_{m-2}(y) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{s} \left\{ D_r^+(N) T_{N+2r+1}(y) + D_r^-(N) T_{N+1-2r}(y) \right\}, & m-2 = 2s, \\ \sum\limits_{r=0}^{s} \left\{ C_r^+(N) T_{N+2r+2}(y) + C_r^-(N) T_{N-2r}(y) \right\}, & m-2 = 2s-1. \end{cases} \quad (14)$$

Для определенности рассмотрим случай четного $m : m-1 = 2s+1$. Учитывая, что на ∂K

$$(\tilde{a}^j \cdot x) = -\cos(\tau + \varphi_j), \qquad \left\langle x, a^j \right\rangle = \sin(\tau + \varphi_j) ,$$

$$T_n(\cos(\tau + \varphi_j)) = \cos n(\tau + \varphi_j) ,$$

подставляя (12) (с учетом (13) и (14)) в первое граничное условие из (2), получим линейную систему $2m$ однородных уравнений относительно постоянных C_j, $j = 1, 2, \ldots, 2m$:

$$\sum_{j=1, j\neq 2}^{2m} C_j \cos(n - 2(i-1))\varphi_j - C_2 (n - 2(i-1)) \sin(n - 2(i-1))\varphi_1 = 0 ,$$

$$\sum_{j=1, j\neq 2}^{2m} C_j \sin(n - 2(i-1))\varphi_j + C_2 (n - 2(i-1)) \cos(n - 2(i-1))\varphi_1 = 0 ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m . \quad (15)$$

Как нетрудно заметить, определитель системы (15) совпадает с определителем условия (6), а, значит, равен нулю для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m$. Следовательно, существует нетривиальное решение $\{C_j^*\}_{j=1}^{2m}$ системы (15). Этот набор будет определять нетривиальное решение (12) уравнения (1), удовлетворяющее первому граничному условию в (2). Используя соотношения

$$\int_0^x T_{n-1}(t)\, dt = \frac{1}{2n} T_n(x) - \frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(x) ,$$

$$T_{n-1}'(x) = (n-1) U_{n-2}(x), \qquad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} ,$$

где $U_n(x)$ – полиномы Чебышева второго рода n-го порядка [1, с. 184–188], покажем, что функция (12) удовлетворяет остальным граничным условиям в (2), если набор $\{C_j^*\}_{j=1}^{2m}$ – решение системы (15).

Действительно, $u_\nu^{(p)}\Big|_{\partial K}$ для каждого $p = 0,1,\dots,m-1$ имеет такой вид:

$$u_\nu^{(p)}\Big|_{\partial K} = \sum_{j=1,j\neq 2}^{2m} C_j \cos^p(\tau+\varphi_j) F_{m-1}^{(p)}(\cos(\tau+\varphi_j)) +$$

$$+ C_2\left\{\left\langle \nu, a^1\right\rangle F_{m-2}(\cos(\tau+\varphi_1)) + \left\langle x, a^1\right\rangle F_{m-2}^{(p)}(\cos(\tau+\varphi_1))\right\} =$$

$$= \sum_{j=1,j\neq 2}^{2m} C_j \cos^p(\tau+\varphi_j) F_{m-1-p}(\cos(\tau+\varphi_j)) +$$

$$+ C_2\left\{\sin(\tau+\varphi_1) F_{m-2}\big(\cos(\tau+\varphi_1)\big) +\right.$$

$$\left.+ \sin(\tau+\varphi_1) F_{m-2-p}\big(\cos(\tau+\varphi_1)\big)\right\}. \qquad (16)$$

Будем для определенности считать p четным: $p=2q$, тогда $m-p-1= = 2s+1-2q = 2(s-q)+1$ – нечетное, $m-p-2 = 2s-2q = 2(s-q)$ – четное. Следовательно, используя формулы (13) и (14), а также равенство

$$\cos^p(\tau+\varphi_j) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_{2i}^{(2q)} \cos 2i(\tau+\varphi_j), \qquad (17)$$

где

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \qquad \alpha_0^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_0^{(2q)} = \frac{1}{2}\alpha_1^{(2q-1)}, \qquad \alpha_{2q}^{(2q)} = \frac{1}{2}\alpha_{2q-1}^{(2q-1)},$$

$$\alpha_{2i}^{(2q)} = \frac{1}{2}\alpha_{2i-1}^{(2q-1)} + \frac{1}{2}\alpha_{2i+1}^{(2q-1)}, \qquad i = 1,2,\dots,q-1,$$

из (16) получим

$$u_\nu^{(p)}\Big|_{\partial K} =$$

$$= \sum_{j=1,j\neq 2}^{2m} C_j \sum_{i=0}^{q} \alpha_{2i}^{(2q)} \cos 2i(\tau+\varphi_j) \sum_{r=0}^{s-q}\left\{C_r^+(N)\cos(N+2r+1)(\tau+\varphi_j) +\right.$$

$$\left.+ C_r^-(N)\cos(N-2r-1)(\tau+\varphi_j)\right\} +$$

$$+ C_2\left\{\sin(\tau+\varphi_1)\left[\sum_{r=0}^{s-1}\left\{D_r^+(N)\cos(N+2r)(\tau+\varphi_1) +\right.\right.\right.$$

$$\left.+ D_r^-(N)\cos(N-2r)(\tau+\varphi_1)\right\} + \sum_{r=0}^{s-q}\left\{D_r^+(N)\cos(N+2r)(\tau+\varphi_1) +\right.$$

$$\left.\left.\left.+ D_r^-(N)\cos(N-2r)(\tau+\varphi_1)\right\}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P_k \cos(n-2(k-1))\tau\left\{\sum_{j=1,j\neq 2}^{2m} C_j \cos(n-2(k-1))\varphi_j -\right.$$

$$\left.- C_2(n-2(k-1))\sin(n-2(k-1))\varphi_1\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} Q_k \sin(n-2(k-1))\tau\left\{\sum_{j=1,j\neq 2}^{2m} C_j \sin(n-2(k-1))\varphi_j +\right.$$

$$\left.+ C_2(n-2(k-1))\cos(n-2(k-1))\varphi_1\right\} = 0.$$

Здесь коэффициенты P_k, Q_k определяются N, p, $\alpha_{2i}^{(2q)}$, C_r^+, C_r^-, D_r^+, D_r^-. Последнее равенство выполнено для всех τ тогда и только тогда, когда выражения в фигурных скобках равны нулю, т.е. коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$, удовлетворяют системе (15). Достаточность условия (6) доказана.

2°). *Необходимость.* Заметим, что в данном случае условия делимости целой функции $\tilde{v}(\xi) = L(\xi)\tilde{w}(\xi)$ на символ $\left\langle \xi, a^1 \right\rangle^3 \left\langle \xi, a^4 \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m-1} \right\rangle \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle$ имеют вид

$$\tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \qquad \tilde{v}'_\varphi\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \qquad \tilde{v}''_{\varphi\varphi}\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0,$$

$$\tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_4} = 0, \qquad \ldots, \qquad \tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_{2m}} = 0. \tag{18}$$

Подставляя (10) в (18), приходим к системе линейных уравнений относительно постоянных α_{in}, β_{in} с определителем, стоящим в левой части равенства (7). Поскольку двойственная задача (8) имеет нетривиальное решение, то существует ненулевой набор постоянных α_{in}, β_{in}, $n = 1, 2, \ldots, m$. Значит, линейная система обладает ненулевым решением, что влечет обращение в нуль её определителя, т.е. выполнение условия (7).

Достаточность. При выполнении условия (7) нетривиальное полиномиальное решение задачи

$$\left\langle \nabla, a^1 \right\rangle^3 \left\langle \nabla, a^4 \right\rangle \ldots \left\langle \nabla, a^{2m-1} \right\rangle \left\langle \nabla, a^{2m} \right\rangle u = 0, \tag{19}$$

$$u\,\big|_{\partial K} = 0, \qquad u'_\nu\big|_{\partial K} = 0, \qquad \ldots, \qquad u_\nu^{(m-1)}\big|_{\partial K} = 0 \tag{2}$$

можно представить в виде

$$u(x) = \sum_{j=1, j\neq 2,3}^{2m} C_j F_{m-1}(-\tilde{a}^j \cdot x) + C_2 \left\langle x, a^1 \right\rangle F_{m-2}(-\tilde{a}^1 \cdot x) +$$

$$+ C_3 \left\{ (\tilde{a}^1 \cdot x) F_{m-2}(-\tilde{a}^1 \cdot x) + \left\langle x, a^1 \right\rangle^2 F_{m-3}(-\tilde{a}^1 \cdot x) \right\}. \tag{20}$$

Как и при доказательстве пункта ***1***°), существование ненулевого набора коэффициентов $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$, а, следовательно, ненулевого решения вида (20) задачи (19), (2) следует из выполнения условия (7).

3°). Для обобщения результатов первых двух пунктов достаточно заметить, что в случае, если кратность k корня λ_1 равна $k = \beta$, $3 < \beta < 2m$, то условия делимости целой функции $\tilde{v}(\xi) = L(\xi)\tilde{w}(\xi)$ на символ

$$\left\langle \xi, a^1 \right\rangle^\beta \left\langle \xi, a^{\beta+1} \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m-1} \right\rangle \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle$$

имеют вид

$$\tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \qquad \tilde{v}'_\varphi\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \tilde{v}_\varphi^{(\beta-1)}\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0,$$

$$\tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_{\beta+1}} = 0, \qquad \ldots, \qquad \tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_{2m}} = 0.$$

И, подставляя (10) в каждое из этих условий, с необходимостью приходим к выполнению условия существования нетривиально решения задачи Дирихле в виде условия (6) (или (7)), β строка определителя которого является производной $(\beta - 1)$-й строки.

Явное нетривиальное решение задачи

$$\left\langle \nabla, a^1 \right\rangle^\beta \left\langle \nabla, a^{\beta+1} \right\rangle \ldots \left\langle \nabla, a^{2m-1} \right\rangle \left\langle \nabla, a^{2m} \right\rangle u = 0,$$

$$u\big|_{\partial K} = 0, \qquad u'_\nu\big|_{\partial K} = 0, \qquad \ldots, \qquad u_\nu^{(m-1)}\big|_{\partial K} = 0$$

представимо в виде

$$u(x) =$$

$$= \sum_{j=\beta+1}^{2m} C_j F_{m-1}(-\tilde{a}^j \cdot x) + C_1 F_{m-1}(-\tilde{a}^1 \cdot x) + C_2 \left\langle x, a^1 \right\rangle F_{m-2}(-\tilde{a}^1 \cdot x) +$$

$$+ \; C_3 \left\{ (\tilde{a}^1 \cdot x) F_{m-2}(-\tilde{a}^1 \cdot x) + \left\langle x, a^1 \right\rangle^2 F_{m-3}(-\tilde{a}^1 \cdot x) \right\} + \ldots +$$

$$+ C_\beta \left\{ (\tilde{a}^1 \cdot x)^{\beta-2} F_{m-(\beta-1)}(-\tilde{a}^1 \cdot x) + \left\langle x, a^1 \right\rangle^{\beta-1} F_{m-\beta}(-\tilde{a}^1 \cdot x) \right\},$$

$\beta = 2, 3, 4, \ldots, 2m-1$. Заметим, что в случае $\beta = 2$ последнее выражение совпадает с (12), а при $\beta = 3$ – с (20).

4°). Рассмотрим, наконец, случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{2m} \neq \pm i$. Решением двойственной задачи в этом случае будет являться функция (10), удовлетворяющая следующим условиям делимости целой функции $\tilde{v}(\xi) = L(\xi)\tilde{w}(\xi)$ на символ $L(\xi) = \left\langle \xi, a^1 \right\rangle^{2m}$:

$$\tilde{v}\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \qquad \tilde{v}'_\varphi\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \tilde{v}_\varphi^{(2m-1)}\big|_{\varphi=-\varphi_1} = 0. \tag{21}$$

После подстановки (10) в (21) получим линейную однородную систему относительно постоянных α_{in}, β_{in}, $i = 1, 2, \ldots, m$, определитель которой является определителем Вронского линейно независимой тригонометрической системы, а, следовательно, отличен от нуля. Следовательно, двойственная задача имеет только тривиальное решение, и, согласно утверждению 1, однородная задача Дирихле (1), (2) в этом случае имеет только тривиальное решение. Теорема доказана. ◊

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1965. – 295 с.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
3. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 6. – С. 211–212.
4. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
5. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем второго порядка в круге // Мат. заметки. – 1990. – **3**, № 48. – С. 32–36.
6. *Бурский В. П., Буряченко Е. А.* Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного чётного порядка в круге // Мат. заметки. – 2005. – **4**, № 78. – С. 33–44.
7. *Буряченко Е. А.* О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – 10. – С. 44–49.
8. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 296 с.
9. *Товмасян Н. Э.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 1. – С. 3–23.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: В 4 т. – Москва: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
11. *Babayan A. O.* On unique solvability of Dirichlet problem for fourth order properly elliptic equation // Изв. НАН Армении. – 1999. – **34**, № 5. – С. 5–18.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ В КРУЗІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПОРЯДКУ 2*m* У ВИПАДКУ КРАТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК, ЯКІ МАЮТЬ КУТИ НАХИЛУ

Одержано критерій нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі K *для загального рівняння парного порядку* $2m$, $m > 2$, *зі сталими комплексними коефіцієнтами і однорідним виродженим символом. Встановлено залежність між значенням кратності коренів характеристичного рівняння та існуванням нетривіального розв'язку задачі з простору* $C^{2m}(\bar{K})$ *у випадку, коли корені характеристичного рівняння відмінні від* $\pm i$.

SOLVABILITY OF HOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM FOR 2*m* ORDER EQUATIONS IN THE CASE OF EXISTENCE OF MULTIPLE CHARACTERISTICS WITH ANGLES OF INCLINATION

A criterion of nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem in a unit disk K *for a general equation of even order* $2m$, $m > 2$, *with constant complex coefficients and homogeneous degenerated symbol is obtained. Dependence between the value of multiplicity of roots of characteristic equation and existence of nontrivial solution from the space* $C^{2m}(\bar{K})$ *in the case when characteristic roots are not equal to* $\pm i$ *is established.*

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено
15.09.07