УДК 517.95

О. М. Боценюк

ПРО ОЦІНКИ СПАДАННЯ ЗА ЧАСОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ДРУГОЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Отримано умови існування глобального розв'язку другої змішаної задачі для одного квазілінійного параболічного рівняння в необмеженій області. Встановлено оцінки спадання розв'язків, які залежать від геометрії області.

Асимптотична поведінка розв'язків при $t \to +\infty$ різних змішаних задач для параболічних рівнянь в необмежених областях розглядалась в роботах [2, 3, 5, 6, 8] (див. також бібліографію в них). У цих роботах для широкого класу областей, що описуються в термінах ізопериметричності, була виділена геометрична характеристика області, яка визначає максимальну швидкість спадання розв'язків при $t \to +\infty$.

Формулювання задачі та основний результат. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, – необмежена область з достатньо гладкою межею Γ і $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$, $Q = \Omega \times (0, \infty)$. Розглянемо в Q змішану задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\big(a_i(x,t,\nabla u)\big) = g(x,t,u), \qquad (x,t) \in Q\,, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\nabla u)\,\nu_i = 0, \qquad (x,t) \in \Sigma\,, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega\,. \tag{3}$$

Тут $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор нормалі до межі $\Gamma = \partial\Omega$; $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. Припускаємо, що функції $a_i(x,t,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $g(x,t,\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, є типу Каратеодорі, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функції $\xi \to a_i(x,t,\xi)$, $\eta \to g(x,t,\eta)$ неперервні і $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$ функції $(x,t) \to a_i(x,t,\xi)$, $(x,t) \to g(x,t,\eta)$ вимірні. Будемо припускати виконання таких умов:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\xi)\xi_i \ge \mu |\xi|^p\,, \qquad 2 < p < \infty\,, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\xi) - a_i(x,t,\xi^*)\big)(\xi_i - \xi_i^*) \ge 0\,, \tag{5}$$

$$|a_i(x,t,\xi)| \le M |\xi|^{p-1}\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,, \tag{6}$$

$$\left|g(x,t,\eta) - g(x,t,\eta^*)\right| \le K\left(|\eta|^\alpha + |\eta^*|^\alpha\right)|\eta - \eta^*|, \qquad \alpha > 0, \qquad K > 0\,, \tag{7}$$

$$g(x,t,0) \equiv 0\,. \tag{8}$$

Опишемо області, в яких розглядається задача (1)–(3). Розглянемо функцію $l(v) = \inf\{\mathrm{mes}_{n-1}(\partial G \cap \Omega) : \mathrm{mes}_n G = v,\ G$ – довільна відкрита підмножина в $\Omega\}$. Нехай додатна функція $g(v)$, $v > 0$, неперервна, монотонно неспадна і нехай існує таке $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \le 1/n$, що функція $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно неспадна і $l(v) \ge g(v) \quad \forall v > 0$. Позначимо

$$P(v) = \int\limits_0^v \frac{d\xi}{\xi} \int\limits_0^\xi \frac{\theta^{p-1}}{g^p(\theta)}\, d\theta, \qquad P_1(v) = v^{p-2}P(v)$$

і нехай неперервна функція $w(t),\ t > 0$, є оберненою до $P_1(v)$. Будемо припускати, що існує таке $\text{æ} > 0$, що функція $t \to t^{\text{æ}}/w(t)$ монотонно неспадна. Скажемо, що *область* Ω *задовольняє умову* **A**, якщо існують функції $g(v),\ w(t)$, які задовольняють перераховані вище умови.

Мета запропонованої роботи – знайти умови розв'язності задачі (1)–(3) і дослідити поведінку розв'язку при $t \to \infty$ залежно від геометрії межі Γ. У випадку $g_i(x,t,u) = -\lambda |u|^{q-1} u,\ q \ge 1,\ \lambda \ge 0$ задачу (1)–(3) досліджено в роботі [6].

Позначення. Нехай Ω – задана область в $\mathbb{R}^n$. Норму в просторі $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, позначаємо через $|\cdot|_p = |\cdot|_{p,\Omega}$ і покладемо також $|\cdot| = |\cdot|_2$. Позначимо через V поповнення за нормою $\|v\| = |\nabla v|_p + |v|_2$ множини функцій із класу $C_0^1(\mathbb{R}^n)$, неперервно диференційовних з компактним носієм в $\mathbb{R}^n$. Покладемо $H = L^2(\Omega)$. Простір V вкладений в H і щільний в ньому, причому вкладення неперервне. Нехай H^* і V^* позначають простори, спряжені до H і V. Ототожнюючи за теоремою Рісса H і H^*, приходимо до включень $V \subset H \subset V^*$. Через $\langle \cdot,\cdot \rangle$ позначимо скалярний добуток між V^* і V. Означимо оператори $A(t) : V \to V^*$ і $G(t) : V \cap L^\infty(\Omega) \to V^*$ за допомогою рівностей

$$\Big\langle A(t)u, v \Big\rangle = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega a_i(x,t,\nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = a(t;u,v) \qquad \forall u, v \in V,$$

$$\Big\langle G(t)u, v \Big\rangle = \int\limits_\Omega g(x,t,u) v\, dx \qquad \text{для} \qquad u \in V \cap L^\infty(\Omega),\ v \in V$$

і для майже всіх $t > 0$. Через u' позначаємо похідну за змінною t в $\mathcal{D}^*(\,]0,T[\,;V^*) = L(\mathcal{D}(\,]0,T[\,);V^*)$.

Означення. *Слабким розв'язком* задачі (1)–(3) назвемо функцію $u(x,t)$ таку, що $u \in L^p(0,T;V),\ u \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)),\ u' \in L^{p'}(0,T;V^*) \quad \forall T > 0 \quad p' :=$ $:= p/(p-1),\ 2 < p < \infty,\ u(0) = u_0,\ u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, і $u(t)$ задовольняє таке рівняння:

$$u'(t) + A(t)u(t) = G(t)u(t) \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}^*(\,]0,T[\,;V^*). \tag{9}$$

Теорема 1. *Нехай* Ω *задовольняє умову* **A** *і виконуються умови* (4)–(8). *Тоді існують додатні константи* δ, ν *такі, що, якщо*

$$|u_0|_1^\alpha \int\limits_1^\infty \left(w(\tau |u_0|_1^{p-2}) \right)^{-\alpha} d\tau < \delta \tag{10}$$

і $w(2|u_0|_1^{p-2})|u_0|_\infty < \nu |u_0|_1$, *то задача* (1)–(3) *має єдиний слабкий глобальний розв'язок* $u(x,t)$ *і для нього виконується оцінка*

$$|u(t)|_\infty \le c|u_0|_1 \left(w([t+1]|u_0|_1^{p-2}) \right)^{-1}, \qquad t > 0. \tag{11}$$

Надалі літерою c будемо позначати різні додатні сталі.

Допоміжні твердження. Розглянемо задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad u(0) = u_0, \tag{12}$$

де $f \in L^{p'}(0,T; L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ – задана функція, $u_0 \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $p > 2$, $p' := p/(p-1)$, $T > 0$.

Теорема 2. *Для розв'язку* u *задачі* (12) *справджується оцінка*

$$w(t|u_0|_1^{p-2})|u(t)|_\infty \le c(\gamma)\sup_{[0,t]}|u(\tau)|_1 +$$

$$+ c(\gamma)t^{1/p-2\gamma/p'}w(t|u_0|_1^{p-2})\left(\int_0^t \tau^{2\gamma}|f(\tau)|_\infty^{p'}\,d\tau\right)^{1/p'}, \tag{13}$$

де $\gamma > 1/(p-2)$ *– довільне число.*

Д о в е д е н н я. Нехай $v = t^\gamma u$, де $\gamma > 0$ – довільне число. Тоді

$$v'(t) + t^\gamma A(t)u(t) = \gamma t^{-1}v(t) + t^\gamma f(t), \qquad v(0) = 0. \tag{14}$$

Позначимо $A_k(t) = \{x \in \Omega : |v(x,t)| > k\}$, $a_k(t) = \sup\limits_{0\le s\le t} \operatorname{mes} A_k(s)$, $k \ge 0$, $t \ge 0$, $\zeta = (\operatorname{sgn} v)\max\{|v| - k, 0\}$. Помножимо обидві частини рівняння (14) на ζ. Тоді, враховуючи рівність $\nabla u = t^{-\gamma}\nabla\zeta$ на $A_k(t)$, одержимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + t^\gamma \sum_{i=1}^n \int_{A_k(t)} a_i(x,t,t^{-\gamma}\nabla\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= \gamma t^{-1}\int_{A_k(t)} v\zeta\,dx + t^\gamma \int_{A_k(t)} f\zeta\,dx. \tag{15}$$

Позначимо $B_k(v) = \{x \in \Omega : |v(x)| > k\}$. У роботі [5] доведено нерівність

$$\int_{B_k(v)} (|v(x)| - k)^p\,dx \le cP(\operatorname{mes} B_k(v))\int_{B_k(v)} |\nabla v|^p\,dx \qquad \forall v \in V. \tag{16}$$

Для функції $\zeta(t)$ із (16) випливає нерівність

$$\int_{A_k(t)} |\zeta(t)|^p\,dx \le cP(\operatorname{mes} A_k(t))\int_{A_k(t)} |\nabla\zeta(t)|^p dx, \qquad k \ge 0, \quad p \ge 2. \tag{17}$$

За допомогою нерівності (17) маємо

$$\left|\int_{A_k(t)} v\zeta\,dx\right| \le |v(t)|_{p',A_k(t)}|\zeta(t)|_p \le c|v(t)|_{p',A_k(t)}\left(P(\operatorname{mes} A_k(t))\right)^{1/p}|\nabla\zeta|_p \le$$

$$\le c|v(t)|_\infty (\operatorname{mes} A_k(t))^{1/p'}\left(P(\operatorname{mes} A_k(t))\right)^{1/p}|\nabla\zeta|_p. \tag{18}$$

Так само оцінюємо другий інтеграл у правій частині рівності (15). Із (15), враховуючи (4), (18), отримуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + \mu t^{\gamma(2-p)}|\nabla\zeta(t)|_p^p \le c\left(t^{\gamma(2-p)/p}|\nabla\zeta(t)|_p\right)(\operatorname{mes} A_k(t))^{1/p'} \times$$

$$\times \left(P(\operatorname{mes} A_k(t))\right)^{1/p}\left(\gamma t^{\gamma(p-2)/p-1}|v(t)|_\infty + t^{2\gamma/p'}|f(t)|_\infty\right). \tag{19}$$

Застосуємо до правої частини (19) нерівність Юнга $ab \le \varepsilon a^p/p + \varepsilon^{-p'/p}b^{p'}/p'$,

$p > 1$, $1/p + 1/p' = 1$, $\varepsilon > 0$, $a, b \ge 0$, і виберемо ε достатньо малим. Тоді одержимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + ct^{\gamma(2-p)}|\nabla\zeta(t)|_p^p \le c(\gamma)(\operatorname{mes} A_k(t))\big(P(\operatorname{mes} A_k(t))\big)^{p'/p} \times$$

$$\times\big(t^{\delta}|v(t)|_{\infty}^{p'} + t^{2\gamma}|f(t)|_{\infty}^{p'}\big), \tag{20}$$

де $\delta = p'\left[\dfrac{\gamma(p-2)}{p} - 1\right]$. Зауважимо, що $|\zeta(t)|^2 \ge (h-k)^2 \operatorname{mes} A_h(t)$ при $h > k > > 0$. Тоді, інтегруючи нерівність (20) за t, отримуємо

$$(h-k)^2 a_h(t) \le c a_k(t)\big(P(a_k(t))\big)^{p'/p}\int_0^t\left(\tau^{\delta}|v(\tau)|_{\infty}^{p'} + \tau^{2\gamma}|f(\tau)|_{\infty}^{p'}\right)d\tau. \tag{21}$$

Застосуємо до (21) наступну лему [1].

Лема 1. *Нехай* φ *− невід'ємна й монотонно незростаюча функція на* $[k_0, \infty)$ *така, що*

$$\varphi(h) \le C(h-k)^{-\alpha}\varphi^{\beta}(k)\big(P(\varphi(k))\big)^{\theta}, \qquad h > k > k_0,$$

де C, α, β, θ *− додатні сталі,* P *− невід'ємна монотонно неспадна функція на* $[0, \infty)$ *така, що* $\exists\varepsilon > 0$ $\forall\lambda \in (0,1]$, $\forall\xi \ge 0$ $P(\lambda\xi) \le \lambda^{\varepsilon}P(\xi)$ *і* $\mu = = \alpha/(1-\beta-\varepsilon\theta) < 0$. *Тоді* $\varphi(k_0 + d) = 0$, *де*

$$d^{\alpha} = 2^{\alpha-\mu}C(\varphi(k_0))^{\beta-1}\big(P(\varphi(k_0))\big)^{\theta}. \tag{22}$$

Застосувавши лему 1 до (21) (для $\varphi(k) = a_k(t)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\theta = p'/p$, $\varepsilon = p\varepsilon_0$, $C = c\int_0^t\left(\tau^{\delta}|v(\tau)|_{\infty}^{p'} + \tau^{2\gamma}|f(\tau)|_{\infty}^{p'}\right)d\tau$), отримаємо $a_{k_0+d}(t) = 0$, і тому $|v(t)|_{\infty} \le k_0 + d$ $\forall k_0 > 0$. Тоді, враховуючи (22), одержимо для всіх $k > 0$

$$|v(t)|_{\infty}^2 \le 2k^2 + c(\gamma)\big(P(a_k(t))\big)^{1/(p-1)}\int_0^t\left(\tau^{\delta}|v(\tau)|_{\infty}^{p'} + \tau^{2\gamma}|f(\tau)|_{\infty}^{p'}\right)d\tau. \tag{23}$$

Застосувавши лему Біхарі [4] до (23), отримаємо

$$|v(t)|_{\infty} \le ck + c(\gamma)\big(P(a_k(t))\big)^{1/(p-2)}\left(\int_0^t \tau^{\delta}d\tau\right)^{1/(2-p')} +$$

$$+ c(\gamma)\big(P(a_k(t))\big)^{1/2(p-1)}\left(\int_0^t \tau^{2\gamma}|f(\tau)|_{\infty}^{p'}d\tau\right)^{1/2}. \tag{24}$$

З огляду на нерівність Чебишева маємо $a_k(t) \le s$, де $s := k^{-1}\sup\limits_{0\le\tau\le t}|v(\tau)|_1$. Будемо припускати, що $\gamma > 1/(p-2)$. Тоді $\delta > -1$. Із (24) випливає

$$|v(t)|_{\infty} \le cs^{-1}\sup_{[0,t]}|v(\tau)|_1 + c(\gamma)\big(P(s)\big)^{1/(p-2)}t^{(\delta+1)/(2-p')} +$$

$$+ c(\gamma)\big(P(s)\big)^{1/(2p-2)}\left(\int_0^t \tau^{2\gamma}|f(\tau)|_{\infty}^{p'}d\tau\right)^{1/2} \qquad \forall s > 0.$$

Звідси отримуємо

$$|u(t)|_\infty \le cs^{-1}\sup_{[0,t]}|u(\tau)|_1 + c(\gamma)(P_1(s))^{1/(p-2)}s^{-1}\, t^{-1/(p-2)} +$$

$$+\, c(\gamma)(P_1(s))^{1/(2p-2)}s^{(2-p)/(2p-2)}\, t^{-\gamma}\left(\int_0^t \tau^{2\gamma}\,|f(\tau)|_\infty^{p'}\,d\tau\right)^{1/2}, \qquad (25)$$

де $P_1(s) = s^{p-2}P(s)$. Покладемо в (25) $s = w(t|u_0|_1^{p-2})$. Тоді

$$|u(t)|_\infty\, w(t|u_0|_1^{p-2}) \le c(\gamma)\sup_{[0,t]}|u(\tau)|_1 + c(\gamma)|u_0|_1^{(p-2)/(2p-2)}\, t^{1/(2p-2)-\gamma} \times$$

$$\times\left(w(t|u_0|_1^{p-2})\right)^{p'/2}\left(\int_0^t \tau^{2\gamma}\,|f(\tau)|_\infty^{p'}\,d\tau\right)^{1/2}. \qquad (26)$$

Застосувавши до останнього члена в (26) нерівність Юнга з показниками $\beta = 2/p'$, $\beta' = \beta/(\beta-1)$, отримаємо (13). ◊

Оцінка розв'язків.

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Використаємо метод зрізання. Для заданої додатної функції $m \in C([0,+\infty))$ означимо оператор S_m на $L^p_{\rm loc}(0,\infty; V)$:

$$S_m(v) = \min\{\max\{v(x,t),\ -m(t)\},\ m(t)\}, \qquad v \in L^p_{\rm loc}(0,\infty; V).$$

Надалі припускаємо, що $0 < m(t) \le \bar m \quad \forall t \ge 0$, де $\bar m = \text{const}$. Розглянемо «апроксимуючу» задачу

$$u'_m(t) + A(t)u_m(t) = G(t)S_m(u_m(t)), \qquad u_m(0) = u_0. \qquad (27)$$

Застосовуючи метод Фаедо – Гальоркіна, покажемо, що для всіх $u_0 \in L^2(\Omega)$ і $m(t)$ задача (27) має єдиний глобальний розв'язок $u_m \in L^p_{\rm loc}(0,\infty; V)$, $u_m \in C([0,\infty); H)$. Нехай $\{w_1, w_2, \ldots\}$ – повна в V система лінійно незалежних функцій з компактним носієм в $\mathbb{R}^n$ і нехай V_k – лінійна оболонка множини $\{w_1,\ldots,w_k\}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ означимо наближений розв'язок u_{mk} задачі (27) таким чином:

$$u_{mk}(t) \in V_k,$$

$$(u'_{mk}, v_k) + a(t; u_{mk}(t), v_k) = \left(g\left(x,t,S_m(u_{mk}(t))\right), v_k\right) \quad \forall v_k \in V_k, \qquad (28)$$

$$u_{mk}(0) = u_{0k}, \qquad (29)$$

де через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток в $L^2(\Omega)$ і u_{0k} у (29) є ортогональною проекцією в H функції u_0 на V_k. Поклавши в (28) $v_k = u_{mk}(t)$ і застосувавши лему Ґронуолла, отримаємо апріорну оцінку

$$|u_{mk}(t)|^2 + \int_0^t |\nabla u_{mk}|_p^p\,d\tau \le c|u_0|^2\exp(c\bar m^{\alpha} t) \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (30)$$

Аналогічним способом, як при доведенні теореми 3.1 у [7, с. 226], виводимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\left|F\left[\chi_{[0,T]}(t)u_{mk}(t)\right](\tau)\right|^2 d\tau \le c(T) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4}, \qquad (31)$$

де $\chi_{[0,T]}(t)$ – характеристична функція $[0,T]$ і $F[\varphi](\tau)$ – перетворення Фур'є функції $\varphi(t)$ за змінною t. Оцінки (30), (31) і теорема 2.2 з [7, с. 220] дозволяють стверджувати, що існують функція $u_m \in L^p(0,T;V)$, $u_m \in L^\infty(0,T;H)$ і підпослідовність $u_{mk'}$ такі, що $u_{mk'} \to u_m$ слабко в $L^p(0,T;V)$, $u_{mk'} \to u_m$ *-слабко в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ і сильно в $L^2(0,T;L^2(\Omega'))$, $k' \to \infty$, де Ω' – будь-яка обмежена підобласть області Ω. Ці результати про збіжність дають можливість з використанням методу монотонності перейти до границі в (28), (29) і отримати існування глобального розв'язку задачі (27).

Єдиність розв'язку доводимо за допомогою леми Ґронуолла.

Розглянемо розв'язок задачі (27) з $m(t) = m_0\left(w([t+1]|u_0|_1^{p-2})\right)^{-1}$, де число $m_0 > 0$ виберемо нижче. Для задачі (12), використовуючи методи роботи [1] при доведенні оцінок в $L^1(\Omega)$, отримуємо нерівність

$$|u(t)|_1 \le |u_0|_1 + \int_0^t |f(\tau)|_1\, d\tau. \tag{32}$$

Застосовуючи нерівність (32) до задачі (27), дістанемо

$$|u_m(t)|_1 \le |u_0|_1 + c\int_0^t m(\tau)^\alpha\, |u_m(\tau)|_1\, d\tau. \tag{33}$$

Застосуємо до (33) лему Ґронуолла. Тоді отримаємо

$$|u_m(t)|_1 \le |u_0|_1 \exp(cM(t)), \tag{34}$$

де $M(t) = \int_0^t m(\tau)^\alpha d\tau$.

Застосувавши нерівність (13) до задачі (27), дістанемо

$$w(t|u_0|_1^{p-2})|u_m(t)|_\infty \le c(\gamma)\sup_{[0,t]}|u_m(\tau)|_1 +$$

$$+ c(\gamma)t^{1/p-2\gamma/p'}w(t|u_0|_1^{p-2})J(t), \tag{35}$$

де $J(t) = \left(\int_0^t \tau^{2\gamma} m(\tau)^{p'(1+\alpha)} d\tau\right)^{1/p'}$.

Оскільки $t^{\text{æ}}/w(t)$ – монотонно неспадна функція, то при $2\gamma \ge \text{æ}\dfrac{p+\alpha}{p-1}$ маємо

$$J(t) \le m_0^{1+\alpha/p}(t+1)^{2\gamma/p'}\left(w([t+1]|u_0|_1^{p-2})\right)^{-(p+\alpha)/p}(M(t))^{1/p'}.$$

Звідси, використовуючи нерівність $M(t) \ge m_0^\alpha\, t\left(w([t+1]|u_0|_1^{p-2})\right)^{-\alpha}$, отримуємо

$$J(t) \le m_0(t+1)^{2\gamma/p'}t^{-1/p}\left(w([t+1]|u_0|_1^{p-2})\right)^{-1}M(t). \tag{36}$$

Нехай $L(t) := m_0^{-\alpha}M(t)$. Тоді з (35), використавши (34), (36), одержимо при $t \ge 1$

$$w(t|u_0|_1^{p-2})|u_m(t)|_\infty \le c|u_0|_1 \exp(cm_0^\alpha L) + cL(t)m_0^{1+\alpha}. \tag{37}$$

Оскільки функція $t^{æ}/w(t)$ монотонно неспадна, то $w(t|u_0|_1^{p-2}) \geq$ $\geq [t/(t+1)]^{æ} w([t+1]|u_0|_1^{p-2})$. Тоді з (37) при $t \geq 1$ випливає

$$w([t+1]|u_0|_1^{p-2})|u_m(t)|_\infty \leq c|u_0|_1 \exp(cm_0^\alpha L(t)) + cL(t)m_0^{1+\alpha}. \qquad (38)$$

Розглянемо функцію $f(x) = a_1 x^{1+\alpha} - x + a_0 \exp(dx^\alpha)$, де $a_0, a_1, d > 0$, $\alpha > 0$. Справджується така лема.

Лема 2. *Нехай виконується умова*

$$a_0 < \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1}{a_1(1+\alpha)}\right)^{1/\alpha} \exp\left(-\frac{d}{a_1(1+\alpha)}\right). \qquad (39)$$

Тоді $f(x_0) < 0$, *де* $x_0 = \dfrac{a_0(1+\alpha)}{\alpha} \exp\left(\dfrac{d}{a_1(1+\alpha)}\right)$.

Д о в е д е н н я. Із умови (39) випливає нерівність $x_0^\alpha < \dfrac{1}{a_1(1+\alpha)}$. Використовуючи двічі цю нерівність, маємо

$$f(x_0) < -\alpha x_0/(1+\alpha) + a_0 \exp(dx_0^\alpha) < 0. \qquad \Diamond$$

Застосуємо лему 2 до нерівності (38), покладаючи $a_1 = cL(t)$, $a_0 = c|u_0|_1$, $d = cL(t)$. Умова (39) буде рівносильна нерівності $|u_0|_1^\alpha L(t) < c(\alpha)$ $\forall t \geq 0$. Припустимо, що ця нерівність випливає з умови (10). Тоді з (38) при $m_0 =$ $= x_0 = c|u_0|_1 \exp[c/(1+\alpha)](1+\alpha)/\alpha$ отримуємо

$$w([t+1]|u_0|_1^{p-2})|u_m(t)|_\infty < m_0 \quad \forall t \geq 1.$$

Отже, $|u_m(t)|_\infty < m(t)$ $\forall t \geq 1$, і тому $S_m(u_m(x,t)) = u_m(x,t)$ $\forall t \geq 1$.

Розглянемо тепер випадок, коли $t > 0$. Для задачі (12), використовуючи принцип порівняння розв'язків, отримуємо нерівність

$$|u_m(t)|_\infty \leq |u_0|_\infty + \int_0^t |f(\tau)|_\infty \, d\tau. \qquad (40)$$

Застосувавши нерівність (40) до задачі (27), дістанемо

$$|u_m(t)|_\infty \leq |u_0|_\infty + c\int_0^t m(\tau)^\alpha |u_m(\tau)|_\infty \, d\tau. \qquad (41)$$

Застосуємо до (41) лему Ґронуолла. Тоді отримаємо

$$|u_m(t)|_\infty \leq |u_0|_\infty \exp(cm_0^\alpha L(t)). \qquad (42)$$

Оскільки $m_0 = c|u_0|_1$ і виконується умова (10), то із (42) випливає

$$|u_m(t)|_\infty \leq c|u_0|_\infty \qquad \forall t \geq 0. \qquad (43)$$

Нехай u_0 задовольняє додаткову умову $c|u_0|_\infty < m(1)$ з формулювання теореми 1. Тоді з (43) маємо $|u_m(t)|_\infty < m(1)$. Звідси, оскільки функція $m(t)$ є монотонно незростаючою, випливає $|u_m(t)|_\infty < m(t)$ $\forall t \leq 1$, тому $S_m(u_m(x,t)) =$ $= u_m(x,t)$ $\forall t \leq 1$.

Із (27) випливає, що функція $u_m(t)$ задовольняє рівняння (9) і для неї справджується оцінка (11). $\Diamond$

1. *Боценюк О. М.* Про оцінки спадання за часом розв'язків змішаної задачі для одного квазілінійного параболічного рівняння другого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 3. – С. 16–23.
2. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – **126**. – С. 5–45.
3. *Гущин А. К.* Об оценке интеграла Дирихле в неограниченных областях // Мат. сб. – 1977. – **99**, № 2. – С. 282–294.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
5. *Тедеев А. Ф.* Стабилизация решения третьей смешанной задачи для квазилинейных параболических уравнений второго порядка в нецилиндрической области // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 1. – С. 63–73.
6. *Тедеев А. Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1795–1806.
7. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса. – Москва: Мир, 1981. – 408 с.
8. *Ушаков В. И.* Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Мат. сб. – 1980. – **111,** № 1. – С. 95–115.

ОБ ОЦЕНКАХ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПО ВРЕМЕНИ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Получены условия существования глобального решения второй смешанной задачи для одного квазилинейного параболического уравнения в неограниченной области. Установлены оценки убывания решений, которые зависят от геометрии области.

ON TIME DECAY ESTIMATES OF SOLUTIONS TO SECOND MIXED PROBLEM FOR ONE QUASI-LINEAR PARABOLIC EQUATION

The conditions of existence of global solution to the second mixed problem for one quasi-linear parabolic equation in the unbounded domain are obtained. The decay estimates of solution which depend on the geometry of domain are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.02.07