УДК 517.956.4

Б. І. Копитко, Ж. Я. Цаповська

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА З УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ ТИПУ ВЕНТЦЕЛЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Вивчається задача спряження для параболічного рівняння другого порядку з параболічним оператором того ж порядку в умові спряження і з граничною умовою першої крайової задачі, заданою на зовнішній частині межі області. Класичну розв'язність задачі в гельдеровому просторі функцій встановлено методом теорії потенціалу.

Розглядається питання про існування та гладкість класичного розв'язку параболічної початково-крайової задачі з умовою спряження, яка, як і рівняння в області, визначається лінійним параболічним оператором другого порядку. Подібного типу задачі виникають у теорії випадкових процесів при побудові математичних моделей явища дифузії в середовищах, де на фіксованих поверхнях розміщені мембрани [8]. У цьому випадку дифузія звичайно описується диференціальним оператором другого порядку з крайовим оператором (оператором спряження) такого ж порядку та типу. Загальний вигляд крайових умов для багатовимірних дифузійних процесів був знайдений О. Д. Вентцелем [3], тому відповідні крайові задачі для параболічних рівнянь називаємо задачами Вентцеля або задачами з крайовою умовою типу Вентцеля. Це питання вивчається за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. Зауважимо, що раніше часткові випадки розглядуваної тут задачі досліджувалися з використанням методу теорії потенціалів у [10], а за допомогою інших методів – в роботах [1, 12]. Відзначимо також працю [9] і монографії [4, 5, 7], у яких для параболічних крайових задач розвинуто загальну теорію.

1. Основні позначення та деякі означення. Нехай $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, – n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{R}_T^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $T > 0$ фіксоване; $\mathbb{R}_T^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \times (0,T)$; $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ – точка в $\mathbb{R}^n$; $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ – точка в $\mathbb{R}^{n-1}$; (x,t) – точка в $\mathbb{R}_T^{n+1}$; (x',t) – точка в $\mathbb{R}_T^n$; $|x|^2 = (x,x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Розглянемо в $\mathbb{R}^n$ обмежену область $\mathcal{D}$ з гладкою межею S. Припустимо, що $\mathcal{D}$ розділена на дві області $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ поверхнею S_1, причому $S \cap S_1 = \varnothing$. Нехай при цьому $\mathcal{D}_1$ – підобласть з межею S_1, а $\mathcal{D}_2$ – підобласть з межею $S_2 = S_1 \cup S$. Через $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ і $\nu^{(1)}(x) = = \left(\nu_1^{(1)}(x), \ldots, \nu_n^{(1)}(x)\right)$ позначатимемо одиничні вектори внутрішніх (стосовно до $\mathcal{D}_2$) нормалей у точках $x \in S$ та $x \in S_1$. Покладемо $\bar{\mathcal{D}}_m = \mathcal{D}_m \cup S_m$, $\Omega_m = \mathcal{D}_m \times (0,T)$, $\Sigma_m = S_m \times [0,T]$, $m = 1,2$; $\Sigma = S \times [0,T]$.

Введемо позначення для операторів диференціювання: D_t^r і D_x^p – символи частинної похідної за t з порядком r і будь-якої частинної похідної за x з порядком p, де r, p – цілі невід'ємні числа; $D_t \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}$; $D_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $D_{ij} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$; $\nabla = (D_1, \ldots, D_n)$; δ_i, $i = 1,\ldots,n$, – тангенціальний диференціальний оператор на S_1, тобто $\delta_i = \sum_{k=1}^n \tau_{ik} D_k$, де $\tau_{ik} = \delta_i^k - \nu_i^{(1)} \nu_k^{(1)}$,

δ_i^k – символ Кронекера. Використовуватимемо означені в [6] простори Гельдера $H^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\bar{\Omega}_m)$, $H^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\Sigma_m)$, $H^{\ell+\lambda}(\mathbb{R}^n)$, ($\ell = 0,1,2$, $m = 1,2$, $\lambda \in (0,1)$ фіксоване) і клас поверхонь $H^{\ell+\lambda}$, $\ell = 1,2$. Підмножину функцій з $H^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\Sigma_m)$, які (у випадку $\ell = 2$ разом з похідною за t) перетворюються в нуль при $t = 0$, позначатимемо через $\underset{0}{H}^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\Sigma_m)$. Через $\| w \|_{H^{\ell+\lambda}(\bar{B})}$ та $\| w \|_{H^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\bar{B})}$ позначимо норму функції w в $H^{\ell+\lambda}(\bar{B})$ та $H^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\bar{B})$, де B – одна з множин $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_T^{n+1}$ та Σ_m, $m = 1,2$, відповідно. Усюди нижче C, c – додатні сталі, які не залежать від (x,t), конкретні величини яких нас цікавити не будуть.

2. Параболічні потенціали. Регуляризатор. Розглянемо у шарі $\mathbb{R}_T^{n+1}$ два рівномірно параболічні оператори другого порядку з обмеженими коефіцієнтами

$$L_s u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(x,t) D_i u + a_0^{(s)}(x,t) u - D_t u\,, \quad s = 1,2. \qquad (1)$$

Припускаємо, що коефіцієнти операторів L_1 і L_2 визначені в $\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1}$ і виконуються умови:

(**A1**) $\quad (A_s(x,t)\xi, \xi) \ge \delta_{0s} |\xi|^2$, $\quad A_s(x,t) = \left(a_{ij}^{(s)}(x,t)\right)_{i,j=1}^{n}$, $\quad a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}$, $\quad s = 1,2$, $\delta_{0s} > 0$, $\quad \forall\, (x,t) \in \bar{\mathbb{R}}_T^{n+1}$, $\quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$;

(**A2**) $\quad a_{ij}^{(s)}$, $a_i^{(s)}$, $a_0^{(s)} \in H^{\lambda,\lambda/2}(\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1})$, $\quad s = 1,2$, $\quad i,j = 1,\ldots,n$.

Відомо (див. [6, гл. IV, § 11]), що умови (**A1**), (**A2**) забезпечують існування звичайного фундаментального розв'язку (ф. р.) $G_s(x,t;\, \xi,\tau)$, $(x,t) \in \bar{\mathbb{R}}_T^{n+1}$, $(\xi,\tau) \in \mathbb{R}_T^{n+1}$, для оператора L_s, $s = 1,2$. Зазначимо, що при $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ для ф. р. $G_s(x,t;\, \xi,\tau)$ має місце оцінка

$$\left| D_t^r D_x^p G_s(x,t;\, \xi,\tau) \right| \le C\,(t-\tau)^{-(n+2r+p)/2} \exp\left\{ -c\, \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}, \qquad 2r + p \le 2. \qquad (2)$$

Розглянемо інтеграли − параболічні потенціали простого шару:

$$u_s^{(1)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S_1} G_s(x,t;\xi,\tau) V_s(\xi,\tau)\, d\sigma_\xi, \quad (x,t) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \quad s = 1,2, \qquad (3)$$

$$u_2^{(0)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S} G_2(x,t;\xi,\tau) V_0(\xi,\tau)\, d\sigma_\xi, \quad (x,t) \in \bar{\mathbb{R}}_T^{n+1}, \qquad (4)$$

де V_s, $s = 1,2$, та V_0 – задані відповідно на Σ_1 і Σ обмежені вимірні функції. Як наслідок з означення ф. р. та нерівності (2), функції $u_s^{(1)}$, $u_2^{(0)}$ неперервні в $\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1}$, задовольняють рівняння $L_s u_s^{(1)} = 0$, $s = 1,2$, в $\mathbb{R}_T^{n+1} \setminus \Sigma_1$, $L_2 u_2^{(0)} = 0$ – в $\mathbb{R}_T^{n+1} \setminus \Sigma$ і початкову умову $u_s^{(1)}(x,0) = 0$, $u_2^{(0)}(x,0) = 0$.

Нехай для $(x,t) \in \Sigma_1$ означено вектор $N^{(s)}(x,t) = \left(N_1^{(s)}(x,t), \ldots, N_n^{(s)}(x,t)\right)$, $N_i^{(s)}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t) \nu_j^{(1)}(x)$, $i = 1,\ldots,n$, $s = 1,2$, який має назву конормалі.

Тоді, якщо $V_s \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$, $s = 1,2$, то $u_s^{(1)} \in \underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\bar{\Omega}_s)$ (див. [2, 11]), і для конормальної похідної функції $u_s^{(1)}$, $s = 1,2$, правильна формула (стрибка) ([6, с. 459])

$$\frac{\partial u_s^{(1)}(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)} = \int_0^t d\tau \int_{S_1} \frac{\partial G_s(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(s)}(x,t)} V_s(\xi,\tau)\, d\sigma_\xi + (-1)^{s-1}\frac{1}{2} V_s(x,t),$$

$$(x,t) \in \Sigma_1. \qquad (5)$$

Інтеграл у правій частині (5) називається прямим значенням конормальної похідної потенціалу простого шару. Його існування випливає з нерівності (при $0 \le \tau < t \le T$, $x,\xi \in S_1$)

$$\left| \frac{\partial G_s(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(s)}(x,t)} \right| \le C(t-\tau)^{-(n+1-\lambda)/2} \exp\left\{ -c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}. \qquad (6)$$

За допомогою ф.р. G_s, $s = 1,2$, можна означити ще два параболічні потенціали, які застосовують при розв'язанні задачі Коші для загального параболічного рівняння другого порядку. Це – потенціал Пуассона

$$u_s^{(2)}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,0)\varphi_s(\xi)\, d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \qquad (7)$$

і об'ємний потенціал

$$u_s^{(3)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,\tau) f_s(\xi,\tau)\, d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \qquad (8)$$

де $\varphi_s(\xi)$ і $f_s(\xi,\tau)$, $s = 1,2$, – задані функції. Якщо припустити, що φ_s – обмежена й неперервна в $\mathbb{R}^n$, а $f_s \in H^{\lambda,\lambda/2}(\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1})$, то можна стверджувати (див. [6, гл. IV, § 14]), що функції $u_s^{(2)}$, $u_s^{(3)}$, $s = 1,2$, неперервні в $\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1}$, задовольняють рівняння $L_s u_s^{(2)} = 0$, $L_s u_s^{(3)} = -f_s$, $s = 1,2$, в $\mathbb{R}_T^{n+1}$ і початкові умови $u_s^{(2)}(x,0) = \varphi_s(x)$, $u_s^{(3)}(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s = 1,2$. Крім того, $u_s^{(2)} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1})$, $s = 1,2$, а у випадку, коли $\varphi_s \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то й $u_s^{(3)} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1})$, $s = 1,2$.

Означимо крайові оператори $\mathscr{E}_s$, $s = 0,1,2$, які потім використаємо як регуляризатори системи інтегральних рівнянь Вольтерра, еквівалентної у деякому сенсі до сформульованої у **п. 3** задачі спряження. Зауважимо, що конструкція цих операторів збігається з конструкцією інтегро-диференціального оператора $\mathscr{E}$, який введений у роботах [2, 11] і використовувався там як регуляризатор першої крайової задачі. Для визначеності опишемо коротко структуру оператора $\mathscr{E}_0$, який пов'язаний з оператором L_2 та потенціалом $u_2^{(0)}$ з рівності (4).

Нехай $\psi \in \underset{0}{H}^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\Sigma_1)$, $\ell = 1,2$. Тоді дія оператора $\mathscr{E}_0$ на функцію ψ визначається формулою

$$\mathscr{E}_0(x,t)\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau \int_{S_1} \mathscr{H}_2(x,\tilde{t};\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)\, d\sigma_\xi \right\} \Bigg|_{\tilde{t}=t},$$

$$(x,t) \in \Sigma, \qquad (9)$$

де функція $\mathscr{H}_2(x,t;\xi,\tau)$ визначена при $0 \le \tau < t \le T$, $x,\xi \in S_1$ і для побудови якої треба використати атлас $(n-1)$-вимірного многовиду $S \in H^{\ell+\lambda}$, $\ell = 1,2$, за допомогою розбиття одиниці, а також ф.р. для оператора $L_{2,n-1}$, який є слідом головної частини оператора L_2 на Σ в локальних внутрішніх координатах. Це означає, що при $n \geq 2$ побудова оператора $\mathcal{E}_0$ є істотно локальною. Конструкція оператора $\mathcal{E}_0$ буде значно простішою, якщо розглянути «модельні» варіанти поверхні Σ. Зокрема, у випадку, коли $\Sigma = \overline{\mathbb{R}}_T^n$, то $\mathcal{H}_2(x', t; \xi', \tau)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, – ф. р. рівномірно параболічного оператора

$$L_{2,n-1} \equiv \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{a}_{ij}^{(2)}(x', t) D_{ij} - D_t , \tag{10}$$

з коефіцієнтами $\tilde{a}_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(2)} - a_{in}^{(2)} a_{jn}^{(2)} (a_{nn}^{(2)})^{-1}$, $i, j = 1, \ldots, n-1$.

Подібний вигляд функція $\mathcal{H}_2$ матиме також в іншому модельному варіанті, коли S – елементарна поверхня, тобто $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = F(x')\}$, де функція F задовольняє умову $F \in H^{\ell+\lambda}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\ell = 1, 2$ (цей випадок детально розглянуто в [10]).

Лема. *Оператор* $\mathcal{E}_0$ *є лінійним обмеженим оператором, що відображає простір* $\underset{0}{H}^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\Sigma)$ *на простір* $\underset{0}{H}^{\ell-1+\lambda,(\ell-1+\lambda)/2}(\Sigma)$, $\ell = 1, 2$. *При цьому існує обернений оператор* $\mathcal{E}_0^{-1} : \underset{0}{H}^{\ell-1+\lambda,(\ell-1+\lambda)/2}(\Sigma) \to \underset{0}{H}^{\ell+\lambda,(\ell+\lambda)/2}(\Sigma)$.

Твердження леми для випадку, коли $\ell = 1$, встановлено в [11]. Використовуючи запропоновану там схему доведення, можна отримати й другу частину цього твердження.

Як уже зазначалось, $\mathcal{E}_0$ – регуляризатор у випадку першої крайової задачі [2, 10, 11]:

$$\mathcal{E}_0 u_2^{(0)} = \left(A_2(x,t)\nu(x), \nu(x)\right)^{-1/2} V_0(x,t) + \int_0^t d\tau \int_S K_0(x,t;\xi,\tau) V_0(\xi,\tau)\, d\sigma_\xi ,$$
$$\forall\ V_0 \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma), \tag{11}$$

крім того, для ядра $K_0(x,t;\xi,\tau)$ у кожній області вигляду $0 \leq \tau < t \leq T$, $x, \xi \in \Sigma$ справджується оцінка (6).

Крім регуляризатора $\mathcal{E}_0$, будемо використовувати також побудовані за аналогічною схемою граничні оператори $\mathcal{E}_s$, $s = 1, 2$, які пов'язані з поверхнею S_1, операторами L_s, $s = 1, 2$, та потенціалами $u_s^{(1)}$, $s = 1, 2$.

3. Постановка задачі та її розв'язання. Розглянемо задачу спряження

$$L_s u_s(x,t) = -\, f_s(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_s, \qquad s = 1, 2, \tag{12}$$

$$u_s(x,0) = \varphi_s(x), \qquad x \in \mathcal{D}_s, \qquad s = 1, 2, \tag{13}$$

$$L_3 u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t) = z(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{14}$$

$$L_4 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i\delta_j u_2 + \left(\beta(x,t), \nabla u_2\right) + \beta_0(x,t) u_2 - D_t u_2 -$$
$$- \left(\alpha(x,t), \nabla u_1\right) + \alpha_0(x,t) u_1 = \theta(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \tag{15}$$

$$L_5 u_2(x,t) \equiv u_2(x,t) = \psi(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \tag{16}$$

де $u(x,t) = (u_1, u_2)$, $\beta(x,t) = \left(\beta_1(x,t), \ldots, \beta_n(x,t)\right)$,
$\alpha(x,t) = \left(\alpha_1(x,t), \ldots, \alpha_n(x,t)\right)$.

Припускаємо, що для коефіцієнтів операторів L_1 і L_2 виконуються умови (**A1**), (**A2**) з **п. 2**, а коефіцієнти оператора спряження типу Вентцеля L_4 задовольняють такі умови:

(**B1**) $\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu_0 |\xi|^2$, $\quad \beta_{ij}(x,t) = \beta_{ji}(x,t)$, $\quad \mu_0 > 0$, $\quad \forall\ (x,t) \in \Sigma_1$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, $\quad \xi \perp \nu^{(1)}(x)$;

(**B2**) β_{ij}, β_i, α_i, β_0, $\alpha_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$, $\ i,j = 1,\ldots,n$, $\ (\beta, \nu^{(1)}) \geq 0$, $\ (\alpha, \nu^{(1)}) \geq 0$.

Стосовно поверхонь S і S_1 та правих частин рівностей (12)–(16), то будемо вважати, що

$$S,\, S_1 \in H^{2+\lambda}, \qquad \rho(S,\, S_1) \geq d_0 > 0\,, \tag{17}$$

$$f_s \in H^{\lambda,\lambda/2}(\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1}), \qquad \varphi_s \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n), \qquad s = 1,2\,,$$

$$z \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1), \quad \theta \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1), \quad \psi \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)\,, \tag{18}$$

і виконуються умови узгодження

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = z(x,0), \qquad x \in S_1, \qquad \varphi_2(x) = \psi(x,0), \qquad x \in S\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,0)\delta_i\delta_j\varphi_2 + \big(\beta(x,0), \nabla\varphi_2\big) - \big(\alpha(x,0), \nabla\varphi_1\big) + \beta_0(x,0)\varphi_2 +$$
$$+ \alpha_0(x,0)\varphi_1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,0)D_{ij}\varphi_s - \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(x,0)D_i\varphi_s -$$
$$- a_0^{(s)}(x,0)\varphi_s - f_s = \theta(x,0) + (s-2)\, D_t z(x,t)\Big|_{t=0},$$
$$x \in S_1, \qquad s = 1,2\,. \tag{19}$$

Основним результатом статті є

Теорема. *Нехай коефіцієнти операторів* L_s, $s = 1,2$, і L_4 *задовольняють відповідно умови* (**A1**), (**A2**) і (**B1**), (**B2**), *а для поверхонь* S і S_1 *та функцій* f_s, φ_s, $s = 1,2$, z, θ, ψ з (12)–(16) *виконуються умови* (17), (18). *Тоді при виконанні умов узгодження* (19) *задача* (12)–(16) *має єдиний розв'язок*

$$u_s \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\bar{\Omega}_s), \qquad s = 1,2\,, \tag{20}$$

для якого справджується оцінка

$$\sum_{s=1}^{2} \| u_s \|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\bar{\Omega}_s)} \leq C\Bigg[\sum_{s=1}^{2} \| f \|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\bar{\mathbb{R}}_T^{n+1})} + \sum_{s=1}^{2} \| \varphi \|_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \| z \|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)} + \| \theta \|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)} + \| \psi \|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)}\Bigg]. \tag{21}$$

Д о в е д е н н я. Розв'язок задачі (12)–(16) будемо шукати у вигляді

$$u_s(x,t) = \sum_{m=0}^{3} u_s^{(m)}(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_s, \qquad s = 1,2\,, \tag{22}$$

де $u_1^{(0)} \equiv 0$, а функції $u_s^{(1)}, u_2^{(0)}, u_s^{(2)}, u_s^{(3)}$, $s = 1,2$, визначені за формулами (3), (4), (7), (8). У зображенні (22) невідомими є функції V_m, $m = 0,1,2$, що входять до потенціалів простого шару $u_2^{(0)}, u_s^{(1)}$, $s = 1,2$. З властивостей потенціалів, описаних в **п. 2**, випливає, що для розв'язання задачі треба підібрати V_m, $m = 0,1,2$, у такий спосіб, щоб для u виконувалися умови спряження (14), (15), крайова умова (16), а при виконанні (19) були правильними умова (20) і нерівність (21).

Припустимо a priori, що V_m, $m = 0,1,2$, задовольняють умови

$$V_0 \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma), \qquad V_s \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1), \qquad s = 1,2, \tag{23}$$

і займемося спочатку вивченням умови спряження (15). З цією метою перетворимо рівність (15), виділивши в ній у виразах, що містять похідні першого порядку за просторовими змінними, окремо тангенціальну і конормальну складові. Таке перетворення легко здійснити, якщо скористатися співвідношеннями

$$\big(\alpha(x,t),\nabla u_1\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x,t)\,\tilde{\delta}_i^{(1)} u_1 + \gamma_1(x,t)\,\frac{\partial u_1}{\partial N^{(1)}},$$

$$\big(\beta(x,t),\nabla u_2\big) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\,\tilde{\delta}_i^{(2)} u_2 + \gamma_2(x,t)\,\frac{\partial u_2}{\partial N^{(2)}}, \tag{24}$$

де $\tilde{\delta}_i^{(s)} = D_i - \dfrac{\nu_i^{(s)}}{(N^{(s)},\nu^{(1)})}\sum_{k=1}^{n} N_k^{(s)} D_k$, $i = 1,\dots,n$, $s = 1,2$, – дотичні диференціальні оператори на S_1,

$$\gamma_1(x,t) = \frac{\big(\alpha(x,t),\nu^{(1)}(x,t)\big)}{\big(N^{(1)}(x,t),\nu^{(1)}(x,t)\big)}, \qquad \gamma_2(x,t) = \frac{\big(\beta(x,t),\nu^{(1)}(x,t)\big)}{\big(N^{(2)}(x,t),\nu^{(1)}(x,t)\big)}.$$

Враховуючи співвідношення (24) та (14), умову спряження (15) можна переписати у такому вигляді (для $(x,t)\in\Sigma_1\setminus S_1$):

$$\begin{aligned}\tilde{L}_4 u(x,t) \equiv{}& \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\,\delta_i\delta_j u_2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\,\tilde{\delta}_i^{(2)} u_2 - \\ &- \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x,t)\,\tilde{\delta}_i^{(1)} u_2 + \tilde{\beta}_0(x,t)u_2 - D_t u_2 = \tilde{\theta}(x,t),\end{aligned} \tag{25}$$

або

$$\begin{aligned}\tilde{L}_4 u(x,t) \equiv{}& \sum_{k,\ell=1}^{n} \tilde{\beta}_{k\ell}(x,t) D_{k\ell} u_2 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\beta}_k(x,t) D_k u_2 + \\ &+ \tilde{\beta}_0(x,t)u_2 - D_t u_2 = \tilde{\theta}(x,t),\end{aligned} \tag{26}$$

де

$$\tilde{\beta}_0(x,t) = \beta_0(x,t) + \alpha_0(x,t),$$

$$\tilde{\beta}_{k\ell}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\tau_{ik}(x)\tau_{j\ell}(x), \qquad k,\ell = 1,\dots,n,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_k(x,t) ={}& \beta_k(x,t) - \alpha_k(x,t) + \sum_{s=1}^{2} (-1)^{s-1}\gamma_s(x,t)N_k^{(s)}(x,t) - \\ &- \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i\big(\nu_j^{(1)}(x)\cdot\nu_k^{(1)}(x)\big), \qquad k = 1,\dots,n,\end{aligned}$$

$$\tilde{\theta}(x,t) = \theta_0(x,t) + \sum_{s=1}^{2} \gamma_s(x,t)\,\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)},$$

$$\theta_0(x,t) = \theta(x,t) - \alpha_0(x,t)z(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x,t)\,\tilde{\delta}_i^{(1)}(x,t)z(x,t). \tag{27}$$

Як бачимо, до правої частини рівнянь (25), (26), тобто до функції $\tilde{\theta}$, входять похідні вздовж конормалей від шуканих функцій u_s, $s = 1, 2$, які можна розкрити, використовуючи зображення (22). При цьому похідні $\dfrac{\partial u_s^{(1)}(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)}$ визначаються за допомогою формули (5), а для $\dfrac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)}$ має місце співвідношення

$$\frac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial N^{(2)}(x,t)} = \int_0^t d\tau \int_S \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(x,t)} V_0(\xi,\tau)\, d\sigma_\xi, \qquad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{28}$$

причому для ядра $\dfrac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(x,t)}$ з врахуванням (17) легко отримати оцінку (при $0 \le \tau < t \le T$, $(x,t) \in \Sigma_1$, $(\xi,\tau) \in \Sigma$)

$$\left| \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(x,t)} \right| \le C \cdot \exp\left\{ -c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}, \tag{29}$$

де стала C залежить від d_0. Оцінка (29) гарантує існування інтеграла в правій частині (28).

Розглянемо умову спряження (26) як автономне параболічне рівняння на $\Sigma_1 \setminus S_1$. У цьому рівнянні, як випливає з умов теореми, умови (23), формул (27) і властивостей потенціалів (див. **п. 2**), його коефіцієнти та права частина $\tilde{\theta}$ належать до класу $H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$. Відомо (див. [1, 2, 9, 12]), що для розв'язку u_2 цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \qquad x \in S_1, \tag{30}$$

виконується нерівність

$$\| u_2 \|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)} \le C\Big[\| \tilde{\theta} \|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)} + \| \varphi_2 \|_{H^{2+\lambda}(S_1)} \Big].$$

Знайдемо інтегральне зображення розв'язку задачі Коші для рівняння (25). З цією метою для оператора $\tilde{L}_4$ побудуємо ф. р., який надалі позначатимемо через $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in S_1$. Насамперед відзначимо, що ідея, на якій базується побудова ф. р. Γ, є подібною до ідеї, за допомогою якої було здійснено конструкцію регуляризатора $\mathcal{E}_0$ (див. **п. 2**).

Отже, спочатку розглядається випадок, коли $S_1 = \mathbb{R}^{n-1}$. У цьому випадку $\delta_i = D_i$, $\tilde{\delta}_i^{(s)} = D_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\delta_n = \tilde{\delta}_n^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$, а тому рівняння (25) перетворюється у лінійне параболічне рівняння другого порядку з гельдеровими коефіцієнтами, яке розглядається на $\Sigma_1 = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,T)$. Існування ф. р. Γ для оператора $\tilde{L}_4$ забезпечують умови (**B1**), (**B2**). Наступний крок − це припущення про те, що S_1 − елементарна поверхня з класу $H^{2+\lambda}$, тобто $S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = g(x') \}$, де $g \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^{n-1})$. Цей випадок, який детально вивчено в роботі [10], можна звести до попереднього, якщо використати так зване розпрямлююче перетворення координат. Тут ми зауважимо лише, що в розглядуваному випадку параболічне рівняння відносно функції $\bar{u}_2(x',t) = u_2(x', g(x'), t)$, якому відповідає шуканий ф. р. $\bar{\Gamma}(x',t;\xi',\tau)$, $0 \le \tau < t \le T$, $x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, безпосередньо отримується з рівняння (26), якщо покласти там $D_n \bar{u}_2 = 0$, $D_{kn} \bar{u}_2 = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $\bar{\tilde{\beta}}_{k\ell}(x',t) = \tilde{\beta}_{k\ell}(x', g(x'), t)$, $k, \ell = 1, \ldots, n-1$, $\bar{\tilde{\beta}}_k(x',t) = \tilde{\beta}_k(x', g(x'), t$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Нарешті, розглядаючи загальний випадок гіперповерхні $S_1 \in H^{2+\lambda}$, при побудові ф. р. Γ треба використати атлас многовиду S_1, побудований за допомогою розбиття одиниці.

Використовуючи ф. р. Γ, єдиний розв'язок задачі (25), (30) подамо у вигляді

$$u_2(x,t) = \int_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)\,d\sigma_\xi - \int_0^t d\tau \int_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\tilde{\theta}(\xi,\tau)\,d\sigma_\xi\,,$$

$$(x,t) \in \Sigma_1\,. \tag{31}$$

Отже, маємо два вирази для значень функції u_2 на Σ_1: співвідношення (22), де треба покласти $s = 2$, $(x,t) \in \Sigma_1$, та співвідношення (31). Якщо прирівняти між собою їх праві частини, враховуючи при цьому (3)–(5) та (28), то знайдемо перше рівняння, що зв'язує невідомі функції V_m, $m = 0,1,2$. Друге і третє рівняння для V_m отримаємо, використовуючи (31) та умову спряження (14), а також крайову умову (16). Тоді система рівнянь відносно V_m, $m = 0,1,2$, матиме вигляд

$$\int_0^t d\tau \int_{S^{(m)}} G_m(x,t;\xi,\tau)V_m(\xi,\tau)\,d\sigma_\xi + \sum_{\ell=0}^{2}\int_0^t d\tau \int_{S^{(\ell)}} K_{m\ell}(x,t;\xi,\tau)V_\ell(\xi,\tau)\,d\sigma_\xi =$$

$$= \Phi_m(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^{(m)}, \qquad m = 0,1,2, \tag{32}$$

де

$$\Sigma^{(m)} = S^{(m)} \times [0,T], \qquad S^{(0)} = S, \qquad S^{(1)} = S^{(2)} = S_1,$$

$$G_0 = K_{02} \equiv G_2, \qquad K_{00} = K_{01} \equiv 0\,,$$

$$K_{10}(x,t;\xi,\tau) = \int_\tau^t ds \int_{S_1} \Gamma(x,t;\eta,s)\gamma_2(\eta,s)\frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(\eta,s)}\,d\sigma_\eta\,,$$

$$K_{20}(x,t;\xi,\tau) = K_{10}(x,t;\xi,\tau) + G_2(x,t;\xi,\tau)\,,$$

$$K_{m\ell}(x,t;\xi,\tau) = (-1)^{\ell-1}\frac{1}{2}\gamma_\ell(\xi,\tau)\Gamma(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+ \int_\tau^t ds \int_{S_1} \Gamma(x,t;\eta,s)\gamma_\ell(\eta,s)\frac{\partial G_\ell(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(\ell)}(\eta,s)}\,d\sigma_\eta, \qquad m,\ell = 1,2\,,$$

$$\Phi_0(x,t) = \psi(x,t) - \sum_{\ell=2}^{3} u_2^{(\ell)}(x,t)\,,$$

$$\Phi_m(x,t) = \int_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)\,d\sigma_\xi - \int_0^t d\tau \int_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\Bigg[\theta_0(\xi,\tau) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{3}\gamma_i(\xi,\tau)\frac{\partial u_i^{(j)}(\xi,\tau)}{\partial N^{(i)}(\xi,\tau)}\Bigg]d\sigma_\xi - \sum_{\ell=2}^{3} u_m^{(\ell)}(x,t) + z_m(x,t)\,,$$

$$z_1 \equiv z\,,\; z_2 \equiv 0\,.$$

При цьому для ядер $K_{m\ell}$ є правильною нерівність (2), у якій замість n, r і p треба покласти відповідно $n-1$, 0 і 0, а для функцій Φ_m, $m = 0,1,2$, як випливає з припущень теореми, умов узгодження (19) і властивостей потенціалів, виконується умова

$$\Phi_m \in \underset{0}{H}{}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma^{(m)}), \qquad m = 0,1,2\,.$$

Система рівнянь (32) є системою інтегральних рівнянь Вольтерра I роду. На підставі (11), леми та умов теореми переконуємося в тому, що після застосування оператора $\mathcal{E}_m$, $m = 0,1,2$, до відповідного рівняння системи (32) остання замінюється еквівалентною системою інтегральних рівнянь Вольтерра II роду вигляду

$$V_m(x,t) + \sum_{\ell=0}^{2} \int_0^t d\tau \int_{S^{(\ell)}} R_{m\ell}(x,t;\xi,\tau) V_\ell(\xi,\tau)\, d\sigma_\xi = \psi_m(x,t),$$

$$(x,t) \in \Sigma^{(m)}, \ m = 0,1,2, \qquad (33)$$

де

$$\psi_m(x,t) = \left(A_m(x,t)\nu^{(m)}(x), \nu^{(m)}(x)\right)^{-1/2} \mathcal{E}_m(x,t)\,\Phi_m,$$

$$A_0(x,t) \equiv A_2(x,t), \qquad \nu^{(0)}(x) \equiv \nu(x), \qquad \nu^{(1)}(x) \equiv \nu^{(2)}(x),$$

а $\mathcal{E}_m \Phi_m \in \underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\Sigma^{(m)})$, $\psi_m \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma^{(m)})$, а для ядер $R_{m\ell}$ виконується нерівність (6).

Розв'язуючи систему рівнянь (33) методом послідовних наближень, знаходимо V_m, $m = 0,1,2$. Крім цього, доводимо, що для V_m виконується умова (23).

Завершуючи доведення теореми, залишилося перевірити виконання умови (20), оцінки (21) та обґрунтувати єдиність побудованого розв'язку задачі (12)–(16). Для цього достатньо зауважити, що кожну з побудованих за формулами (22), (33) функцій u_s, $s = 1,2$, можна розглядати як розв'язок наступної параболічної першої крайової задачі:

$$L_s u_s(x,t) = -f_s(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_s,$$

$$u_s(x,0) = \varphi_s(x), \qquad x \in \mathcal{D}_s,$$

$$u_s(x,t) = v(x,t) + (2-s)z(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1, \quad s = 1,2,$$

$$u_2(x,t) = \psi(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma,$$

при виконанні умов узгодження

$$\varphi_s(x) = v(x,0) + (2-s)z(x,0), \qquad x \in S_1,$$

$$\varphi_2(x) = \psi(x,0), \qquad x \in S,$$

$$\left.\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} + (2-s)\left.\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad x \in S_1, \quad s = 1,2,$$

де функція $v \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)$ визначена за допомогою співвідношення (31). Тоді (див. [6]) умови теореми разом з умовами (19) гарантують існування єдиного розв'язку цієї задачі, що належить до класу (20), і для якого справджується оцінка (21). Теорему доведено. ◊

1. *Апушкинская Е. А., Назаров А. И.* Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений // Алгебра и анализ. – 1994. – **6**, вып. 6. – С. 1–29.
2. *Бадерко Е. А.* О решении первой краевой задачи для параболического уравнения с помощью потенциала простого слоя // Докл. АН СССР. – 1985. – **283**, № 1. – С. 11–13.
3. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятности и ее применения. – 1959. – **4**, № 2. – С. 172–185.
4. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. – Кишенев: Штиница, 1992. – 328 с.

5. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. М.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
7. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
8. *Портенко М. І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – 199 с.
9. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1965. – № 83. – С. 3–162.
10. *Цаповська Ж. Я.* Розв'язання методом потенціалів одної параболічної задачі спряження у нециліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 2. – С. 39–46.
11. *Черепова М. Ф.* Решение методом потенциала I-й краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрической области. – Москва, 1985. – Деп. в ВИНИТИ 11.01.85. – № 361-85 Деп.
12. *Yi Zeng, Yousong Luo* Linear parabolic equations with Ventsel initial boundary conditions // Bull. Austral. Math. Soc. – 1995. – **51**. – P. 465–479.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ТИПА ВЕНТЦЕЛЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Изучается задача сопряжения для параболического уравнения второго порядка с параболическим оператором того же порядка в условии сопряжения и с граничным условием первой краевой задачи, заданным на внешней части границы области. Классическая разрешимость задачи в гельдеровом пространстве функций установлена методом теории потенциала.

INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH CONJUGATION CONDITION OF WENTZEL TYPE FOR PARABOLIC EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

We investigate the conjugation problem for the second-order parabolic equation with parabolic operator of the same order under the conjugation condition and boundary condition of the first boundary-value problem obtained on the exterior part of the domain boundary. Using the method of potential theory we prove the theorem on classical solvability of the problem in the Hölder function space.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів
Одержано
17.10.07