

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

*Получены дифференциальные уравнения теплопроводности рассматриваемой задачи и найдено их решение в виде произвольного разложения температуры в ряд по полиномам Лежандра. Учитывается произвольный конвективный теплообмен на лицевых поверхностях пластины. Проведены численные расчеты с целью исследования влияния тепловой анизотропии и величины параметров теплообмена.*

При решении задач термоупругости анизотропных пластин [9, 11] определение температурного поля является отдельной задачей, для решения которой выдвигают предварительные гипотезы [6, 10]. Метод  $\{m, n\}$ -аппроксимации [4] позволяет эффективно решать эти задачи, используя трехмерный подход. В рассматриваемой статье для ортотропных и трансверсально-изотропных пластин найдено решение задачи теплопроводности при сосредоточенных температурных воздействиях, которое имеет вид произвольного разложения температуры в ряд по полиномам Лежандра. Разрешающая система дифференциальных уравнений получена на основе методики сведения трехмерного уравнения теплопроводности к системе двумерных уравнений, которая изложена в [5].

**Уравнения теплопроводности произвольного приближения.** Рассмотрим ортотропную пластину толщиной  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , содержащую источники тепла объемной плотности  $W_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . В преобразованных главных осях ( $x = \bar{x}/\sqrt{\lambda_1}$ ,  $y = \bar{y}/\sqrt{\lambda_2}$ ,  $z = \bar{z}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_x/\lambda_z$ ,  $\lambda_2 = \lambda_y/\lambda_z$ , где  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  – главные коэффициенты теплопроводности) температура  $T(x, y, z)$  пластины должна удовлетворять уравнению теплопроводности для изотропного тела [1]

$$\Delta T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda_z} W_0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1)$$

На лицевых поверхностях пластины ( $z = \pm h$ ) осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой постоянной температуры  $\theta^+$  (при  $z = h$ ) и  $\theta^-$  (при  $z = -h$ ) по закону Ньютона [1]:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} + \frac{\alpha^+}{\lambda_z} (T|_{z=h} - \theta^+) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-h} - \frac{\alpha^-}{\lambda_z} (T|_{z=-h} - \theta^-) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha^\pm$  – коэффициенты теплоотдачи на поверхностях  $z = \pm h$ .

Введем в рассмотрение функцию  $Q = \partial T / \partial z$ . Тогда уравнения теплопроводности (1) и условия (2) запишутся следующим образом:

$$\Delta T + \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda_z} W_0, \quad Q = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3)$$

$$Q^+ + \frac{\alpha^+}{\lambda_z} (T^+ - \theta^+) = 0, \quad Q^- - \frac{\alpha^-}{\lambda_z} (T^- - \theta^-) = 0, \quad (4)$$

где  $Q^\pm = Q(x, y, \pm h)$ ,  $T^\pm = T(x, y, \pm h)$ .

Приближенное решение рассматриваемой задачи ищем с помощью аппроксимаций функций  $T$  и  $Q$  полиномами Лежандра  $P_k$ . Приближение порядка  $N$  разрешающего уравнения (3) строим, используя в соответствии с [5] следующие частные суммы для искомых функций:

$$T = \sum_{k=0}^N T_k P_k \left( \frac{z}{h} \right), \quad T_k = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h T P_k \left( \frac{z}{h} \right) dz, \quad (5)$$

$$Q = \sum_{k=0}^{N+1} Q_k P_k \left( \frac{z}{h} \right), \quad Q_k = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h Q P_k \left( \frac{z}{h} \right) dz. \quad (6)$$

Коэффициенты этих рядов связаны между собой двумя группами рекуррентных зависимостей [5], приведенными в табл. 1.

Таблица 1

Первая группа формул	Вторая группа формул
$Q_0 - \frac{Q_2}{5} = \frac{1}{h} T_1$	$\frac{Q_1}{3} - \frac{Q_3}{7} = \frac{1}{h} T_2$
$\frac{Q_2}{5} - \frac{Q_4}{9} = \frac{1}{h} T_3$	$\frac{Q_3}{7} - \frac{Q_5}{11} = \frac{1}{h} T_4$
...	...
$\frac{Q_{N_1-1}}{2N_1-1} - \frac{Q_{N_1+1}}{2N_1+3} = \frac{1}{h} T_{N_1}$	$\frac{Q_{N_0-1}}{2N_0-1} - \frac{Q_{N_0+1}}{2N_0+3} = \frac{1}{h} T_{N_0}$

Здесь  $N_1 = N - 1$ ,  $N_0 = N$ , если  $N$  четное, и  $N_1 = N$ ,  $N_0 = N - 1$ , если  $N$  нечетное. Имеют место также следующие соотношения, вытекающие из граничных условий [5]:

$$\begin{aligned} \text{Bi}^+ \left( Q_0 + \frac{Q_1}{3} \right) + \text{Bi}^+ \frac{T_0 - \theta^+}{h} + \sum_{k=0,2,\dots}^{N_1+1} Q_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{N_0+1} Q_k &= 0, \\ \text{Bi}^- \left( Q_0 - \frac{Q_1}{3} \right) - \text{Bi}^- \frac{T_0 - \theta^-}{h} + \sum_{k=0,2,\dots}^{N_1+1} Q_k - \sum_{k=1,3,\dots}^{N_0+1} Q_k &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\text{Bi}^\pm = \alpha^\pm h / \lambda_z$  – критерий Био на лицевых поверхностях пластины.

Зависимости, приведенные в табл. 1, и соотношения (7) связывают между собой коэффициенты разложений (5) и (6), которые должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям [5]:

$$\begin{aligned} \Delta T_k + \frac{2k+1}{h} \left( \frac{Q^+ - Q^-}{2} - \sum_{i=1,3,\dots}^{k-1} Q_i \right) &= -\frac{1}{\lambda_z} W_{0k}, \quad k = 0, 2, \dots, N_0, \\ \Delta T_k + \frac{2k+1}{h} \left( \frac{Q^+ + Q^-}{2} - \sum_{i=0,2,\dots}^{k-1} Q_i \right) &= -\frac{1}{\lambda_z} W_{0k}, \quad k = 1, 3, \dots, N_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$W_{0k} = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h W_0 P_k \left( \frac{z}{h} \right) dz.$$

Выразим составляющие теплового потока  $Q_k$  через компоненты температуры  $T_k$ . Вначале найдем выражения для  $Q_0$  и  $Q_1$ . Из рекуррентных зависимостей табл. 1 следует, что

$$Q_{m+2} = (2m+5) \left\{ Q_0 - \sum_{i=1,3,\dots}^{m+1} \frac{T_i}{h} \right\}, \quad m = 0, 2, \dots, N_1 - 1,$$

$$Q_{m+2} = (2m+5) \left\{ \frac{Q_1}{3} - \sum_{i=2,4,\dots}^{m+1} \frac{T_i}{h} \right\}, \quad m = 1, 3, \dots, N_0 - 1.$$

Найдем суммы

$$\sum_{k=0,2,\dots}^{N_1+1} Q_k = Q_0 + \sum_{m=0,2,\dots}^{N_1-1} Q_{m+2}, \quad \sum_{k=1,3,\dots}^{N_0+1} Q_k = Q_1 + \sum_{m=1,3,\dots}^{N_0-1} Q_{m+2}.$$

В случае четных  $k$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0,2,\dots}^{N_1+1} Q_k &= Q_0 \left[ 1 + \sum_{m=0,2,\dots}^{N_1-1} (2m+5) \right] - \sum_{m=0,2,\dots}^{N_1-1} (2m+5) \sum_{i=1,3,\dots}^{m+1} \frac{T_i}{h} = \\ &= Q_0 \left[ 1 + \frac{1}{2}(N_1+1)(N_1+4) \right] - \\ &\quad - \sum_{k=1,3,\dots}^{N_1} \frac{T_k}{h} \sum_{m=k,k+2,\dots}^{N_1} (2m+3) = N_{10}^* Q_0 - S_1, \end{aligned}$$

где

$$S_1 = \sum_{k=1,3,\dots}^{N_1} N_{1k}^* \frac{T_k}{h}, \quad N_{mj}^* = (N_m + j + 3)(N_m - j + 2)/2.$$

Аналогично для нечетных  $k$ :

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{N_0+1} Q_k = N_{00}^* Q_1/3 - S_2, \quad S_2 = \sum_{k=2,4,\dots}^{N_0} N_{0k}^* \frac{T_k}{h}.$$

Подставляя найденные значения сумм в соотношения (7), получим систему алгебраических уравнений для определения  $Q_0$  и  $Q_1$ :

$$(Bi^+ + N_{10}^*)Q_0 + (Bi^+ + N_{00}^*)\frac{Q_1}{3} = -Bi^+ \frac{T_0 - \theta^+}{h} + S_1 + S_2,$$

$$(Bi^- + N_{10}^*)Q_0 - (Bi^- + N_{00}^*)\frac{Q_1}{3} = Bi^- \frac{T_0 - \theta^-}{h} + S_1 - S_2.$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} Q_0 &= -N_{00}^* \alpha_N \frac{T_0}{h} + \beta_N S_1 - \alpha_N S_2 + \frac{\theta_0^*}{h}, \\ Q_1 &= -3\gamma_N \frac{T_0}{h} - 3\alpha_N S_1 + 3\delta_N S_2 + \frac{\theta_1^*}{h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\alpha_N = \frac{1}{\Delta_N^*} (Bi^+ - Bi^-), \quad \beta_N = \frac{1}{\Delta_N^*} (Bi^+ + Bi^- + 2N_{00}^*),$$

$$\gamma_N = \frac{1}{\Delta_N^*} [2Bi^+ Bi^- + N_{10}^* (Bi^+ + Bi^-)],$$

$$\delta_N = \frac{1}{\Delta_N^*} (Bi^+ + Bi^- + 2N_{10}^*),$$

$$\theta_0^* = \frac{1}{\Delta_N^*} [\text{Bi}^+ \text{Bi}^- (\theta^+ - \theta^-) + N_{00}^* (\text{Bi}^+ \theta^+ - \text{Bi}^- \theta^-)],$$

$$\theta_1^* = \frac{3}{\Delta_N^*} [\text{Bi}^+ \text{Bi}^- (\theta^+ + \theta^-) + N_{10}^* (\text{Bi}^+ \theta^+ + \text{Bi}^- \theta^-)],$$

$$\Delta_N^* = 2 \text{Bi}^+ \text{Bi}^- + (N_{00}^* + N_{10}^*) (\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 2 N_{00}^* N_{10}^*.$$

Рассмотрим теперь разрешающую систему дифференциальных уравнений (8). Преобразуем слагаемые, содержащие компоненты теплового потока. Для первой группы уравнений при четных  $k$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{Q^+ - Q^-}{2} - \sum_{i=1,3,\dots}^{k-1} Q_i &= \sum_{i=k+1,k+3,\dots}^{N_0+1} Q_i = \sum_{m=k-1,k+1,\dots}^{N_0-1} Q_{m+2} = \\ &= \frac{Q_1}{3} \sum_{m=k-1,k+1,\dots}^{N_0-1} (2m+5) - \sum_{m=k-1,k+1,\dots}^{N_0-1} (2m+5) \sum_{i=2,4,\dots}^{m+1} \frac{T_i}{h} = \frac{Q_1}{3} N_{0k}^* - \\ &- \sum_{i=2,4,\dots}^k \frac{T_i}{h} \sum_{m=k-1,k+1,\dots}^{N_0-1} (2m+5) - \sum_{i=k+2,k+4,\dots}^{N_0} \frac{T_i}{h} \sum_{m=i-1,i+1,\dots}^{N_0-1} (2m+5) = \\ &= \left\{ \frac{Q_1}{3} - \sum_{i=2,4,\dots}^k \frac{T_i}{h} \right\} N_{0k}^* - \sum_{i=k+2,k+4,\dots}^{N_0} N_{0i}^* \frac{T_i}{h}. \end{aligned}$$

Аналогично для второй группы уравнений при нечетных  $k$ :

$$\frac{Q^+ + Q^-}{2} - \sum_{i=0,2,\dots}^{k-1} Q_i = \left\{ Q_0 - \sum_{i=1,3,\dots}^k \frac{T_i}{h} \right\} N_{1k}^* - \sum_{i=k+2,k+4,\dots}^{N_1} N_{1i}^* \frac{T_i}{h}.$$

Таким образом, все составляющие теплового потока выражены через компоненты температуры, и уравнения (8) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta T_k + \sum_{i=0}^N A_{ki} \frac{T_i}{h^2} &= -\frac{1}{\lambda_z} W_{0k} - \frac{\theta_k}{h^2}, & k = 0, \dots, N, \\ \theta_k &= (2k+1)\theta_1^* N_{0k}^*/3, & k = 0, 2, \dots, N_0, \\ \theta_k &= (2k+1)\theta_0^* N_{1k}^*, & k = 1, 3, \dots, N_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Элементы матрицы  $A_{ki}$  с использованием обозначений

$$\alpha_{ki} = -\alpha_N N_{0i}^* N_{1k}^*, \quad \beta_{ki} = (\beta_N N_{1i}^* - 1) N_{1k}^*, \quad \delta_{ki} = (\delta_N N_{0i}^* - 1) N_{0k}^*,$$

имеют структуру, представленную в табл. 2.

Таблица 2

$A_{ki}$	
$k = 0, 2, \dots, N_0$	$k = 1, 3, \dots, N_1$
$(2k+1)\alpha_{ik}, \quad i = 1, 3, \dots, N_1$	$(2k+1)\alpha_{ki}, \quad i = 0, 2, \dots, N_0$
$(2k+1)\delta_{ki}, \quad i = 0, 2, \dots, k$	$(2k+1)\beta_{ki}, \quad i = 1, 3, \dots, k$
$(2k+1)\delta_{ik}, \quad i = k+2, k+4, \dots, N_0$	$(2k+1)\beta_{ik}, \quad i = k+2, k+4, \dots, N_1$

После решения системы (10) с помощью соотношений (9) и рекуррентных зависимостей из табл. 1 находим все компоненты температурного потока.

**Постановка задачи и методика решения.** Пусть в начале координат находится сосредоточенный интегральный источник тепла, т.е. объемные источники тепла распределены по произвольному закону  $f(\bar{z})$  вдоль одной линии координатной оси  $O\bar{z}$ . Тогда

$$W_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = W_0^* \delta(\bar{x}, \bar{y}) f(\bar{z}),$$

где  $\delta(\bar{x}, \bar{y})$  – дельта-функция Дирака,  $W_0^*$  – размерная константа.

Функция  $f(\bar{z})$  представима в виде суммы четной и нечетной функции. Четная составляющая дает коэффициенты  $W_{0k}$  с четными номерами, а нечетная – с нечетными номерами в системе (8). Интегральные источники тепла с четной функцией распределения  $f(\bar{z})$  обуславливают лишь плоское термоупругое состояние в пластине с симметричным теплообменом ( $Bi^+ = Bi^-$ ) и являются «плоскими» источниками тепла, а с нечетной функцией распределения обуславливают лишь состояние термоупругого изгиба при тех же условиях и являются «изгибными» источниками тепла [6, 8].

Создаваемое сосредоточенными источниками температурное поле является локальным. Считаем, что оно затухает при приближении к краю пластины, поэтому граничные условия на краю пластины не принимаются в расчет. Коэффициенты теплообмена и температуру окружающей среды предполагаем постоянными. Из структуры уравнений (10) следует, что учет температуры окружающей среды вносит постоянную составляющую в решение, которую необходимо учитывать лишь при практических расчетах. Поэтому принимаем  $\theta^+ = \theta^- = 0$ .

Перейдем к безразмерной системе координат ( $x_1 = x/h$ ,  $x_2 = y/h$ ,  $x_3 = z/h$ ) и применим двумерное интегральное преобразование Фурье к разрешающим уравнениям. В пространстве трансформант  $(\xi_1, \xi_2)$  система (10) имеет вид

$$-p^2 \tilde{T}_k + \sum_{i=0}^N A_{ki} \tilde{T}_i = -\frac{2k+1}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} w_{0k}, \quad k = 0, \dots, N. \quad (11)$$

Здесь

$$p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad w_{0k} = \frac{w_0^*}{2} \int_{-1}^1 f(x_3) P_k(x_3) dx_3,$$

$\tilde{T}_k$  – трансформанты компонент температуры;  $w_0^* = h^2 W_0^* / \lambda_z$  – приведенная интенсивность сосредоточенного источника тепла.

Обозначая  $\xi = p^2$ ,  $A_N = \|A_{ki}\|$ ,  $E$  – единичная матрица, запишем систему (11) в матричном виде

$$(A_N - \xi E) \mathbf{T} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \mathbf{w}_0, \quad (12)$$

$$\mathbf{T} = (\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_N)^\top, \quad \mathbf{w}_0 = (w_{00}, 3w_{01}, \dots, (2N+1)w_{0N})^\top.$$

Ее решение по правилу Крамера [3] имеет вид

$$\tilde{T}_k(\xi) = \frac{G_k(\xi)}{\Lambda(\xi)}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (13)$$

где  $\Lambda(\xi)$  – характеристический многочлен матрицы  $A_N$ ,  $G_k(\xi)$  – определитель, получающийся заменой  $k$ -го столбца матрицы  $A_N - \xi E$  столбцом свободных членов системы (12). Дальнейшие преобразования связаны с воз-

возможностью разложения решения (13) на сумму простейших дробей, что приводит к задаче на собственные значения для матрицы  $A_N$ .

Докажем следующие утверждения:

– все характеристические корни матрицы  $A_N$  действительные и отрицательные;

– кратность собственных значений матрицы  $A_N$  не превышает 2.

Из структуры рассматриваемой матрицы следует, что

$$A_N = K_N L_N.$$

Здесь

$$K_N = \text{diag} \{K_0, K_1, \dots, K_N\}, \quad K_i = 2i + 1, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$L_N = \|L_{ki}\| = \|A_{ki}/(2k + 1)\|, \quad k, i = 0, \dots, N.$$

Матрицы  $K_N$  и  $L_N$  симметрические, причем матрица  $K_N$  невырожденная.

Для доказательства первого утверждения используем следующую теорему [3].

**Теорема.** Если  $A$  и  $C$  – положительно и неотрицательно определенные матрицы соответственно, то корни  $\det(A\lambda - C)$  вещественны и неотрицательны.

Положим в условиях данной теоремы  $A = K_N^{-1}$ ,  $C = -L_N$ . Тогда

$$\begin{aligned} \det(A\lambda - C) &= \det(-K_N^{-1}(-\lambda) + L_N) = \\ &= \frac{1}{\det K_N} \det(K_N L_N - (-\lambda)E) = \frac{1}{\det K_N} \det(A_N - (-\lambda)E). \end{aligned}$$

Показав, что матрицы  $K_N^{-1}$  и  $(-L_N)$  удовлетворяют условиям теоремы, докажем, что все  $\lambda$  действительны и неотрицательны, т.е. все  $(-\lambda)$ , являющиеся характеристическими корнями матрицы  $A_N$ , действительны и неположительные. Матрица  $K_N^{-1} = \text{diag} \{K_0^{-1}, K_1^{-1}, \dots, K_N^{-1}\}$  является положительно определенной, поскольку  $K_i^{-1} > 0$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Для доказательства положительной определенности матрицы  $(-L_N)$  покажем, что все ее ведущие главные миноры  $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N)$  положительны [3]. Имеем (с учетом связи  $\delta_N N_{00}^* - 1 = -\gamma_N$ )

$$\Delta_0 = |-\delta_{00}| = -\delta_{00} = \gamma_N N_{00}^* > 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\delta_{00} & -\alpha_{10} \\ -\alpha_{10} & -\beta_{11} \end{vmatrix} = \delta_{00}\beta_{11} - \alpha_{10}^2 = N_{00}^* N_{11}^* \{ \gamma_N (1 - \beta_N N_{11}^*) - \alpha_N^2 N_{00}^* N_{11}^* \}.$$

Поскольку выражение в фигурных скобках после подстановки всех коэффициентов с учетом зависимости  $N_{11}^* = N_{10}^* - 1$  приводится к сумме положительных слагаемых, то знак этого минора определен:  $\Delta_1 > 0$ .

Для определения знака остальных ведущих главных миноров осуществим элементарные преобразования, которые не меняют значения этих миноров [3]. Из  $k$ -й строки матрицы  $(-L_N)$  вычтем  $(k-2)$ -ю, умноженную на коэффициент  $c_k = N_{0k}^*/N_{0(k-2)}^*$  для  $k = 2, 4, \dots, N_0$  и на  $c_k = N_{1k}^*/N_{1(k-2)}^*$  для  $k = 3, 5, \dots, N_1$ . Элементы преобразованной матрицы  $(-L_N^*)$ , не считая первых двух строк ( $k = 0, 1$ ), которые остаются без изменения, определяются выражениями, приведенными в табл. 3.

Таблица 3

$-L_{ki}^*$	
$k = 2, 4, \dots, N_0$	$k = 3, 5, \dots, N_1$
$(2k-1) \frac{N_{0i}^*}{N_{0(k-2)}^*}, \quad i = k, k+2, \dots, N_0$	$(2k-1) \frac{N_{1i}^*}{N_{1(k-2)}^*}, \quad i = k, k+2, \dots, N_1$
$0, \quad i = 0, \dots, k-1, k+1, k+3, \dots, N_1$	$0, \quad i = 0, \dots, k-1, k+1, k+3, \dots, N_0$

Структура матрицы  $(-L_N^*)$  такова, что позволяет выразить  $\Delta_k$  через  $\Delta_{k-1}$ ,  $k = 2, \dots, N$ , раскрывая  $\Delta_k$  по элементам последней строки, в которой лишь последний элемент ненулевой. Поэтому имеем следующие зависимости:

$$\Delta_2 = (-L_{22}^*)\Delta_1, \quad \Delta_3 = (-L_{33}^*)\Delta_2, \quad \dots, \quad \Delta_N = (-L_{NN}^*)\Delta_{N-1}.$$

Так как все  $(-L_{kk}^*)$  положительны, то  $\Delta_k > 0 \forall k = 0, \dots, N$  и матрица  $(-L_N)$  положительно определена. Таким образом, все характеристические корни матрицы  $A_N$  вещественны и неположительные.

Проведенные выше преобразования позволяют заключить, что  $\Delta_N = \det(-L_N) \neq 0$ , то есть матрица  $L_N$  – невырожденная. Значит, и матрица  $A_N = K_N L_N$  также невырожденная [3]. Следовательно, у матрицы  $A_N$  нет нулевых характеристических корней, все ее собственные значения отрицательны.

Для доказательства второго утверждения преобразуем матрицу  $A_N - \lambda E$  следующим образом:

$$\begin{aligned} A_N - \lambda E &= K_N L_N - \lambda E = K_N^{1/2} K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2} K_N^{-1/2} - \lambda K_N^{1/2} K_N^{-1/2} = \\ &= K_N^{1/2} (K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2} - \lambda E) K_N^{-1/2} = K_N^{1/2} (B_N - \lambda E) K_N^{-1/2}, \end{aligned}$$

где  $B_N = K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2}$ ,  $K_N^{1/2} = \text{diag}\{\sqrt{K_0}, \sqrt{K_1}, \dots, \sqrt{K_N}\}$ . Матрица  $B_N$  имеет такие же собственные значения, как и матрица  $A_N$ , поскольку

$$\det(A_N - \lambda E) = \det(K_N^{1/2}) \det(B_N - \lambda E) \frac{1}{\det(K_N^{1/2})} = \det(B_N - \lambda E).$$

Поскольку матрица  $B_N$  вещественная и симметрическая, то она и эрмитова [3]. Следовательно, она простая и для каждого собственного значения этой матрицы его кратность равна геометрической кратности [3]. С целью определения геометрических кратностей собственных значений найдем ранг матрицы  $B_N - \lambda_0 E$ , где  $\lambda_0$  – произвольное собственное значение матрицы  $B_N$ . Для этого преобразуем ее следующим образом:

$$B_N - \lambda_0 E = K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2} - \lambda_0 K_N^{1/2} K_N^{-1} K_N^{1/2} = K_N^{1/2} (L_N - \lambda_0 K_N^{-1}) K_N^{1/2}.$$

Тогда

$$M_N = L_N - \lambda_0 K_N^{-1} = K_N^{-1/2} (B_N - \lambda_0 E) K_N^{1/2}.$$

Удобнее находить ранг матрицы  $M_N$ , которая получена из  $B_N - \lambda_0 E$  путем элементарных преобразований, не меняющих ранг исходной матрицы. По аналогии с предыдущим пунктом вычтем из  $k$ -й строки матрицы  $M_N$  строку с номером  $k-2$ , умноженную на коэффициент  $c_k$ . Элементы

полученной матрицы  $M_N^*$ , кроме двух первых строк ( $k = 0, 1$ ), имеют значения, приведенные в табл. 4.

Таблица 4

$M_{ki}^*$	
$k = 2, 4, \dots, N_0$	$k = 3, 5, \dots, N_1$
$c_k \lambda_0 / K_{k-2}, \quad i = k - 2$	$c_k \lambda_0 / K_{k-2}, \quad i = k - 2$
$L_{kk}^* - \lambda_0 / K_k, \quad i = k$	$L_{kk}^* - \lambda_0 / K_k, \quad i = k$
$L_{ki}^*, \quad i = k + 2, k + 4, \dots, N_0$	$L_{ki}^*, \quad i = k + 2, k + 4, \dots, N_1$
$0, \quad i = 0, \dots, k - 3, k - 1, k + 1, \dots, N_1$	$0, \quad i = 0, \dots, k - 3, k - 1, k + 1, \dots, N_0$

Вычеркивая первые две строки и последние два столбца матрицы  $M_N^*$ , получим минор  $\Delta'$  порядка  $N - 1$

$$\Delta' = \lambda_0^{N-1} \prod_{m=2}^N \frac{c_m}{K_{m-2}} \neq 0.$$

Тогда для ранга имеем оценку

$$N - 1 \leq \text{rank}(L_N - \lambda_0 K_N^{-1}) < N + 1. \quad (14)$$

Геометрическая кратность  $\lambda_0$  есть разность между размерностью  $(N + 1)$  матрицы  $B_N$  и рангом матрицы  $B_N - \lambda_0 E$  (14) [3] и может равняться либо 1, либо 2.

При симметричном теплообмене ( $\text{Bi}^+ = \text{Bi}^- = \text{Bi}$ ) система дифференциальных уравнений (10) распадается на две независимые системы с матрицами  $A_N^0$  и  $A_N^1$ , которые описывают четное и нечетное распределение температуры по толщине. Анализ собственных значений матриц  $A_N^0$  и  $A_N^1$  показал, что кратность характеристических корней в обоих случаях равна 1.

Таким образом, для случая простых корней  $\lambda_j, j = 0, \dots, N$ , характеристического многочлена матрицы  $A_N$  решение (13), представленное в виде суммы простейших дробей, имеет вид [2]

$$\tilde{T}_k(\xi) = \sum_{j=0}^N \frac{C_{kj}}{\xi - \lambda_j}, \quad k = 0, \dots, N,$$

$$C_{kj} = (-1)^{N+1} \frac{G_k(\lambda_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^N (\lambda_j - \lambda_i)}. \quad (15)$$

При наличии  $s$  собственных значений  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}$  кратности 2, решение (13) представимо в виде

$$\tilde{T}_k(\xi) = \sum_{j=0}^{N-s} \frac{C_{kj}^*}{\xi - \lambda_j} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{D_{kj}^*}{(\xi - \lambda_j)^2}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (16)$$

где коэффициенты  $C_{kj}^*, D_{kj}^*$  находятся известными методами [2].

При обращении трансформант (15), (16) использована методика, описанная в [7], и полученные с ее помощью формулы обращения

$$F^{-1}\left[\frac{1}{p^2 + \rho_j^2}\right] = K_0(\rho_j r),$$

$$F^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + \rho_j^2)^2}\right] = \frac{1}{2} \frac{r}{\rho_j} K_1(\rho_j r).$$

Здесь  $\rho_j^2 = -\lambda_j$ ,  $j = 0, \dots, N$ ,  $K_0(z)$  и  $K_1(z)$  – функции Макдональда,  $r$  – полярный радиус в безразмерной системе координат.

Окончательное решение для компонентов температуры имеет вид – при отсутствии кратных собственных значений матрицы  $A_N$ :

$$T_k = \sum_{j=0}^N C_{kj} K_0(\rho_j r), \quad r = \sqrt{\left(\frac{\bar{x}}{h}\right)^2 \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{\bar{y}}{h}\right)^2 \frac{1}{\lambda_2}}, \quad k = 0, \dots, N;$$

– при наличии  $s$  собственных значений матрицы  $A_N$  кратности 2:

$$T_k = \sum_{j=0}^{N-s} C_{kj}^* K_0(\rho_j r) + \frac{r}{2} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{D_{kj}^*}{\rho_j} K_1(\rho_j r), \quad k = 0, \dots, N.$$

**Анализ результатов численных исследований.** Для качественного исследования температурных полей при сосредоточенных температурных воздействиях достаточно рассмотреть простейший «плоский» ( $f(\bar{z}) = 1$ ) и «изгибный» ( $f(\bar{z}) = 3\bar{z}/h$ ) источники тепла.

Перед проведением численных исследований проверялись граничные условия (4) на лицевых поверхностях пластины. Расчеты показали, что ошибка при удовлетворении этих условий для простейшего приближения ( $N = 1$ ) составляет около 3% для «плоского» и 22% для «изгибного» источников тепла. При рассмотрении каждого последующего приближения эта ошибка уменьшается на порядок.

Численные исследования проведены для трансверсально-изотропных и ортотропных пластин, содержащих простейшие сосредоточенные источники тепла единичной интенсивности ( $w_0^* = 1^\circ\text{C}$ ). Результаты исследований представлены на рис. 1–6 в виде графиков изменения температуры  $T$  ( $^\circ\text{C}$ ) по толщине пластины при  $\bar{r} = 1$  (рис. 1–4) и температуры на верхней лицевой поверхности пластины ( $x_3 = 1$ ) от радиальной координаты  $\bar{r}$  (рис. 5, 6), где принято  $\bar{r} = \sqrt{(\bar{x}/h)^2 + (\bar{y}/h)^2}$ .

Графики на рис. 1 являются четными функциями, а на рис. 2 – нечетными. Рис. 1, 3, 5 соответствуют случаю действия «плоского» источника, рис. 2, 4, 6 – случаю действия «изгибного» источника тепла.

Графики на рис. 1–4 построены для трансверсально-изотропного материала. Они демонстрируют влияние параметра относительной теплопроводности в плоскости изотропии  $\lambda^* = \lambda_1 = \lambda_2$  на значения температуры. Кривые на этих рисунках соответствуют значениям  $\lambda^* = 1/2, 1, 2$ . На рис. 1, 2 представлены данные для симметричного теплообмена ( $Bi^+ = Bi^- = 1$ ), а на рис. 3, 4 – для верхнего одностороннего теплообмена ( $Bi^+ = 1, Bi^- = 0$ ). Пунктирной линией на этих рисунках показаны графики для температуры, найденной в первом приближении. Сплошная линия соответствует графикам для температуры, найденной в третьем приближении (рис. 1–4) и пятом приближении (рис. 1, 2), которые совпадают. Сплошной линией с маркерами обозначены графики для температуры в изотропной пластине, которая найдена с помощью уравнений теплопроводности, полученных операторным методом [6].

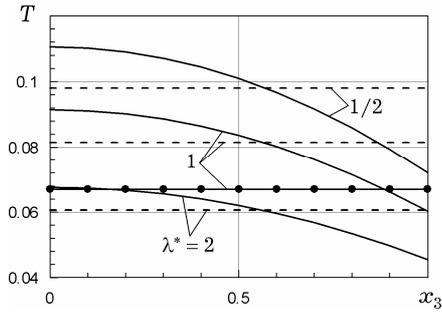


Рис. 1

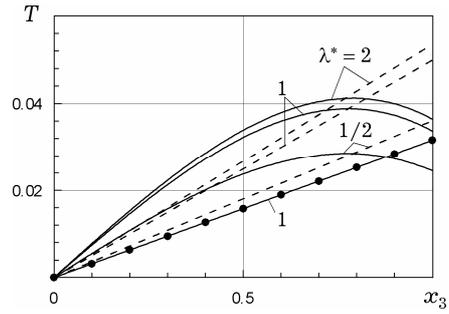


Рис. 2

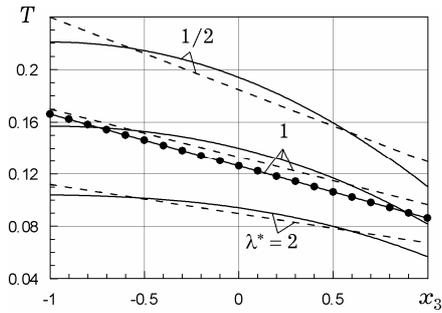


Рис. 3

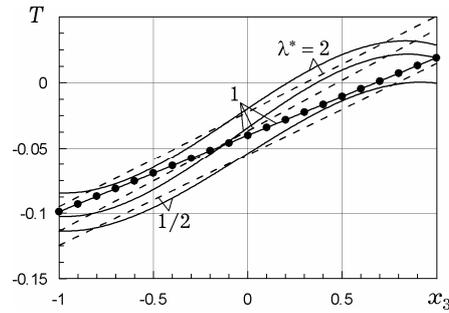


Рис. 4

Проведенные расчеты температуры показали, что использование пятого приближения вместо третьего не вносит существенного уточнения. Оно составляет 0.6% для «плоского» и 3.2% для «изгибного» источника тепла.

Исходя из представленных на рис. 1–4 кривых, посчитана погрешность при использовании уравнений теплопроводности, полученных на базе операторного метода [6], вместо уравнений (10). Ее максимальные значения составляют 26.5% ( $Bi^+ = Bi^-$ ), 10.5% ( $Bi^- = 0$ ) для «плоского» источника тепла и 58.3% ( $Bi^+ = Bi^-$ ), 93.4% ( $Bi^- = 0$ ) для «изгибного» источника тепла.

Из графиков на рис. 1, 3 следует, что при действии «плоского» источника тепла температура в трансверсально-изотропной пластине при  $\lambda^* < 1$  будет больше, чем в изотропной пластине.

Графики на рис. 5, 6 иллюстрируют влияние параметра теплообмена на значения температуры, полученные в пятом приближении. Рассмотрен случай симметричного теплообмена. Линиями без маркеров показаны графики для трансверсально-изотропных пластин ( $\lambda^* = 1/2$ ), с маркерами – для ортотропных пластин ( $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1/2$ ). Прямоугольными маркерами отмечены кривые для температуры на оси  $Ox$ , а треугольными – на оси  $Oy$  при  $Bi = 10^{-2}$ . Кривые без маркеров соответствуют значениям параметра  $Bi = 1, 10^{-2}, 10^{-4}$  (кривые для  $Bi = 10^{-2}$  и  $Bi = 10^{-4}$  на рис. 6 совпадают).

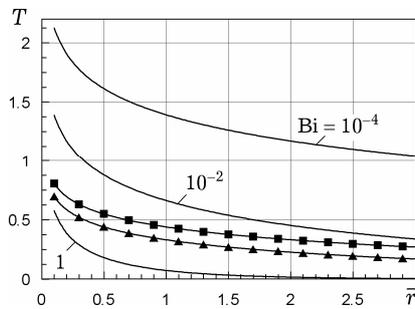


Рис. 5

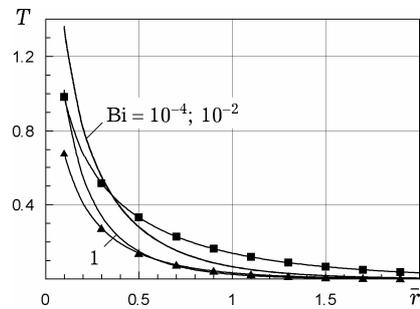


Рис. 6

Из этих графиков следует, что с увеличением параметра теплообмена  $Bi$  значения температуры убывают. Затухание температуры при действии «изгибного» источника тепла происходит значительно быстрее, чем при действии «плоского» источника тепла. По данным графиков на рис. 5, 6 оценивалась также погрешность, вносимая в расчет температуры при игнорировании тепловой анизотропии трансверсально-изотропных пластин. Эта погрешность максимальна при сильной термоизоляции пластины ( $Bi = 10^{-4}$ ) и составляет 85 % при действии «плоского» источника тепла.

Таким образом, из анализа полученных результатов следует, что при расчете температурных полей в анизотропных пластинах, подверженных сосредоточенным и локальным температурным воздействиям, необходимо учитывать их анизотропные тепловые свойства и теплообмен с окружающей средой. При этом в разложении температуры по полиномам Лежандра достаточно ограничиться четырьмя членами.

1. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности: В 2 ч. – Москва: Высш. шк., 1982. – Ч. 1. – 327 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1978. – 832 с.
3. Ланкастер П. Теория матриц. – Москва: Наука, 1982. – 272 с.
4. Пелех Б. Л., Лазько В. А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
5. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
6. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
7. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Уч. пособие. – Донецк: Донецк. гос. ун-т, 1980. – 128 с.
8. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 159–196.
9. Abadi Mohammad Tahaye, Reza Daghyani Hamid, Fariborz Shahriar. Finite element analysis of thermoplastic composite plates in forming temperature // Compos. Sci. and Technol. – 2006. – **66**, No. 2. – P. 306–313.
10. Noor A. K., Burton W. S. Steady-state heat conduction in multilayered composite plates and shells // Computers and Struct. – 1991. – **39**, No. 1–2. – P. 185–193.
11. Vel Senthil S., Batra R. C. Generalized plane strain thermoelastic deformation of laminated anisotropic thick plates // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – **38**, No. 8. – P. 1395–1414.

### РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ПРИ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОЛІНОМІВ ЛЕЖАНДРА

Одержано диференціальні рівняння теплопровідності розглянутої задачі і знайдено їхній розв'язок у вигляді довільного розвинення температури в ряд за поліномами Лежандра. Враховується довільний конвективний теплообмін на лицьових поверхнях пластини. Виконано чисельні розрахунки для дослідження впливу теплової анизотропії і величини параметрів теплообміну.

### SOLUTION OF HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR ANISOTROPIC PLATES AT CONCENTRATED THERMAL LOADING WITH USING LEGENDRE POLYNOMIALS

The differential heat conduction equations for the problem considered are defined and their solution in the form of arbitrary series expansion for temperature by Legendre polynomials is obtained. The arbitrary convective heat exchange on the plate faces is taken into account. The numerical calculations are made to investigate of the influence of heat anisotropy and the value of heat exchange parameters.

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено  
05.03.09