

МЕТОД МЕХАНІЧНИХ КВАДРАТУР ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНОК З ТЕПЛОВІДДАЧЕЮ

Наведено квадратурні формули для обчислення особливих інтегралів, що містять функції Бесселя другого роду та похідні від них. З використанням отриманих формул і методу інтегральних рівнянь досліджено вплив тепловіддачі на температуру в пластинках при їх нагріві потоками тепла.

Для розв'язування статичних задач теорії пружності для багатозв'язних пластинок широко застосовують метод граничних інтегральних рівнянь [6]. Висока точність і ефективність цього методу базується на застосуванні методу механічних квадратур, у якому інтеграли замінюються квадратурними формулами підвищеної точності.

При розв'язуванні динамічних і температурних задач теорії пружності з використанням методу інтегральних рівнянь виникають інтеграли, що містять логарифмічні функції або функції Бесселя другого роду та похідні від них [1, 2]. Наведемо квадратурні формули для обчислення таких інтегралів і застосуємо їх до розв'язування задач термопружності для пластинок з тепловіддачею, які послаблені отворами.

1°. Спочатку наведемо квадратурні формули для інтеграла з логарифмічною особливістю уздовж кола

$$\Phi(\varphi) = \int_0^{2\pi} F(\theta) \ln \rho \, d\theta, \quad (1)$$

де $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$; $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$; $\xi = \cos \theta$, $\eta = \sin \theta$; F – дійсна функція. На підставі [3] запишемо

$$\Phi(\theta_v) \approx h \left[\sum_{n=1, n \neq v}^N F_n \ln \rho_{vn} - F_v \ln N - \frac{\delta}{N^2} F''(\theta_v) \right] + O(N^{-5}), \quad (2)$$

де $\delta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1/N)(m-2/N)}$; ρ_{vn} – відстань між точками з координатами $(x_v, y_v) = (\cos \theta_v, \sin \theta_v)$ і $(x_n, y_n) = (\cos \theta_n, \sin \theta_n)$; $F_n = F(\theta_n)$, $\theta_n = nh$, $h = 2\pi/N$.

Перетворимо цю формулу так, щоб в неї входили значення підінтегральної функції тільки у вузлових точках. Для цього використаємо формулу чисельного диференціювання [7]

$$F''(\theta_v) \approx \frac{F_{v+1} - 2F_v + F_{v-1}}{h^2},$$

похибка якої має порядок $O(h^2)$. Підставивши її у квадратурну формулу (2), отримаємо

$$\Phi(\theta_v) = h \sum_{n=1}^N \alpha_{vn} F_n + O(N^{-5}), \quad (3)$$

$$\text{де } \alpha_{vn} = \begin{cases} \ln \rho_{vn}, & n \neq v \pm 1, v, \\ \ln \rho_{vn} - \frac{\delta}{2\pi^2} - \ln N, & n = v, \\ \frac{\delta}{4\pi^2}, & n = v \pm 1. \end{cases}$$

2°. Розглянемо інтеграл уздовж замкнутого гладкого контуру L

$$A(x, y) = \int_L f(t) \ln r \, ds, \quad (4)$$

де r – відстань між заданою точкою $(x, y) \in L$ і точкою $(\xi, \eta) \in L$, за якою проводиться інтегрування. Запишемо рівняння контуру у параметричному вигляді $t = g(\theta)$, де $t = \xi + i\eta$. З використанням формули (3) маємо

$$A(x_v, y_v) = h \left[\sum_{n=1, n \neq v}^N s'_n \ln r_{vn} f_n + s'_v \ln \frac{|s'_v|}{N} - \frac{\delta}{N^2} \frac{d^2(s'(\theta)f(g(\theta)))}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_v} \right] + O(N^{-5})\sqrt{2}, \quad (5)$$

де $f_n = f(x_n, y_n)$, $x_n + iy_n = g(\theta_n)$, $r_{vn} = \sqrt{(x_v - x_n)^2 + (y_v - y_n)^2}$, $s'(\theta) = |g'(\theta)|$.

Використавши формулу чисельного диференціювання, запишемо

$$A(x_v, y_v) = h \sum_{n=1}^N s'_n \alpha_{vn} f_n + O(N^{-5}), \quad (6)$$

$$\text{де } \alpha_{vn} = \begin{cases} \ln r_{vn}, & n \neq v \pm 1, v, \\ \ln r_{vn} - \frac{\delta}{2\pi^2} + \ln(|s'_n|/N), & n = v, \\ \frac{\delta}{4\pi^2}, & n = v \pm 1. \end{cases}$$

3°. Розглянемо інтеграл

$$A_1(x, y) = \int_L f(t) r^2 \ln r \, ds. \quad (7)$$

Застосувавши формули (5), маємо

$$A(x_v, y_v) = h \left[\sum_{n=1, n \neq v}^N s'_n r_{vn}^2 \ln r_{vn} f_n - f_v \frac{2\delta}{N^2} (s'_v)^3 \right] + O(N^{-5})\infty. \quad (8)$$

4°. Розглянемо загальний інтеграл уздовж замкнутого контуру L

$$B(x, y) = \int_L f(t) Q(r) \, ds, \quad (9)$$

де $Q(r)$ – функція, яку можна подати у вигляді $Q(r) = U(r) + \ln r V(r)$, і $U(r)$, $V(r)$ – гладкі диференційовні функції на кривій інтегрування. Зазначимо, що в такому вигляді можна подати ряд спеціальних функцій: еліптичні інтеграли, функції Бесселя $Y_0(mr)$, $K_0(mr)$ та інші. Зокрема, для функції Макдональда маємо [7] $V(r) = -I_0(mr)$.

Після перетворень з використанням формул (6), (8) отримаємо квадратурну формулу вигляду

$$B(x_v, y_v) = h \sum_{n=1}^N s'_n b_{vn} f_n + O(N^{-5}), \quad (10)$$

$$\text{де } b_{vn} = \begin{cases} Q(r_{vn}), & n \neq v \pm 1, v, \\ Q(r_{vn}) + \delta \frac{V_0}{4\pi^2}, & n = \pm 1, \\ U_0 + V_0 \left[\frac{\delta}{2\pi^2} + \ln(|s'_n|/N) \right] - \frac{2\delta}{N^2} (s'_n)^2 V_2, & n = v. \end{cases}$$

Тут позначено $U_0 = U(0)$, а також прийнято, що розвинення у ряд Тейлора для функції V в околі точки $r = 0$ має вигляд $V(r) = V_0 + V_2 r^2 + \dots$

Зокрема, для випадку, коли $Q = K_0(mr)$, маємо $U_0 = -C - \ln(m/2)$, $V_0 = -1$, $V_2 = -0.25m^2$, де C – стала Ейлера.

Розглянемо тепер інтеграли, що містять похідні від логарифмічних функцій.

5°. Запишемо інтеграл, який розглядається в сенсі головного значення за Коші

$$C(x, y) = \int_L f(t) \frac{\partial \ln r}{\partial n_M} ds, \quad (11)$$

де n_M – зовнішня нормаль до контуру L в точці $M(x, y)$. На підставі [3] маємо квадратурну формулу

$$C(x_v, y_v) \approx h \sum_{n=1}^N s'_n c_{vn} f_n,$$

$$\text{де } c_{vn} = \left. \frac{\partial \ln r}{\partial n_M} \right|_{\substack{x=x_v, y=y_v \\ \xi=\xi_n, \eta=\eta_n}}, \quad v \neq n, \quad c_{nn} = \text{Im}(g''(\theta_n)/g'(\theta_n))/2.$$

Ця формула є формулою підвищеної точності (типу Гаусса).

6°. Розглянемо інтеграл

$$C_1(x, y) = \int_L f(t) \frac{\partial(r^2 \ln r)}{\partial n_M} ds. \quad (12)$$

Зобразимо його у вигляді

$$C_1(x, y) = \int_L f(t) \left(r^2 \frac{\partial \ln r}{\partial n_M} + \frac{\partial r^2}{\partial n_M} \ln r \right) ds.$$

Для визначення цього інтеграла використаємо формули (5) і (11). Тоді отримаємо

$$C_1(x_v, y_v) \approx h \sum_{n=1}^N s'_n \beta_{vn} f_n + O(N^{-5}), \quad (13)$$

$$\text{де } \beta_{vn} = \left. \frac{\partial(r^2 \ln r)}{\partial n_M} \right|_{\substack{x=x_v, y=y_v \\ \xi=x_n, \eta=y_n}}, \quad v \neq n, \quad \beta_{nn} = -\frac{2\delta}{N^2} s'_n (x'_n y''_n - y'_n x''_n).$$

Тут враховано, що

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left[s'(\theta) \frac{\partial(r^2)}{\partial n_M} f \right] = 2(s'_n)^2 (x'_n y''_n - y'_n x''_n) f_n, \quad \xi = x_n, \quad \eta = y_n, \quad \theta \rightarrow \theta_n.$$

7°. Розглянемо інтеграл

$$D(x, y) = \int_L f(t) \frac{\partial Q(r)}{\partial n_M} ds, \quad (14)$$

де $Q(r)$ – введена вище (див. 4°) функція. Використовуючи співвідношення (11), (13), отримуємо квадратурну формулу вигляду

$$D(x_v, y_v) = h \sum_{n=1}^N s'_n d_{vn} f_n + O(N^{-5}), \quad (15)$$

$$d_{vn} = Q'(r) \left. \frac{\partial r}{\partial n_M} \right|_{\substack{x=x_v, y=y_v \\ \xi=\xi_n, \eta=\eta_n}}, \quad v \neq n, \quad d_{nn} = V_0 c_{nn} + V_2 \beta_{nn}.$$

Значення сталої δ (див. 1°), яка входить у квадратурні формули, може бути знайдено на основі розвинення її у ряд за степенями $\frac{1}{N}$. Запишемо перші члени цього ряду

$$\delta = \zeta_3 + \frac{3\zeta_4}{N} + \frac{7\zeta_5}{N^2} + \frac{15\zeta_6}{N^3} + \frac{31\zeta_7}{N^4},$$

де $\zeta_j = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^j}$ – дзета-функція Рімана. Використовуючи значення цієї функції [7], маємо

$$\delta = 1.20206 + \frac{3.24697}{N} + \frac{7.25849}{N^2} + \frac{15.2601}{N^3} + \frac{31.2588}{N^4}. \quad (16)$$

Залежності сталої δ від N наведено в табл. 1.

Таблиця 1

| N | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 200 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| δ | 1.3847 | 1.2880 | 1.2583 | 1.2438 | 1.2353 | 1.2296 | 1.2256 | 1.2226 | 1.2185 |
| δ_3 | 1.3826 | 1.2878 | 1.2582 | 1.2438 | 1.2353 | 1.2296 | 1.2256 | 1.2226 | 1.2185 |

При всіх $N > 20$ значення сталої δ , обчислені за формулою (16), збігаються із даними, поданими у другому рядку. У табл. 1 наведено також наближені значення $\delta = \delta_3$, коли в ряді (16) утримували три перших члени. Із результатів обчислень, наведених у таблиці, бачимо, що, оскільки величина δ у квадратурних формулах ще ділиться на N^2 , то при розрахунках за формулою (16) достатньо утримувати 3 члени.

Для ілюстрації точності наведених квадратурних формул обчислимо інтеграл (9) при $Q = K_0(mr)$ для випадку, коли L – коло радіуса, що дорівнює одиниці, $f = \cos k\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Точне значення інтеграла в цьому випадку буде таким:

$$\int_0^{2\pi} K_0(mR) \cos k\varphi_0 d\varphi_0 = 2\pi K_n(mR) I_n(mR) \cos k\varphi, \quad k > 0.$$

У табл. 2 наведено відносну похибку формули (10) у % при $\varphi = 0$ для $k = 5$ і $k = 10$ при $N = 20$ або $N = 40$ вузлових точках.

Таблиця 2

| m | $N = 20$ | | $N = 40$ | |
|------|----------|----------|----------|----------|
| | $k = 5$ | $k = 5$ | $k = 5$ | $k = 10$ |
| 1.0 | 0.00337 | 0.00003 | 0.00057 | |
| 2.0 | 0.01201 | 0.00004 | 0.00225 | |
| 3.0 | 0.02228 | 0.00006 | 0.00492 | |
| 4.0 | 0.02867 | -0.00016 | 0.00836 | |
| 5.0 | 0.02521 | -0.00051 | 0.01231 | |
| 6.0 | 0.00502 | -0.00143 | 0.01646 | |
| 7.0 | -0.03816 | -0.00305 | 0.02044 | |
| 8.0 | -0.10997 | -0.00554 | 0.02384 | |
| 9.0 | -0.21527 | -0.00925 | 0.02630 | |
| 10.0 | -0.35772 | -0.01439 | 0.02736 | |

Дані, наведені у табл. 2, свідчать про високу точність квадратурних формул при вибраній незначній кількості вузлових точок, незважаючи на швидкозмінність підінтегральних функцій для великих значень параметра m .

Дослідження квазістатичних термопружних напружень біля криволінійних отворів у пластинках при нагріві потоком тепла. У літературі найбільш детально вивчалися температурні поля і зумовлені ними напруження у теплоізованих пластинках, що перебувають під дією теплового потоку на нескінченності [5]. Розглянемо аналогічну задачу про визначення температурних полів і напружень біля отвору в пластинці з тепловіддачею, яка нагрівається потоком тепла.

Для того щоб у граничному випадку отримати аналогічну стаціонарну задачу для нескінченної пластинки без тепловіддачі, розглянемо смугу $-H < y < H$, $-h < z < h$, $-\infty < x < \infty$, у якій розміщено отвір малих розмірів порівняно з розмірами смуги [5]. Смуга перебуває в умовах теплообміну із середовищами, що омивають границю отвору та прямолінійні границі, температура яких дорівнює $T_{1,2}$ при $y = \pm H$.

Температуру подамо у вигляді суми двох складових $T_c = T_n + T$, де T_n – температура в пластинці без отвору при заданих умовах нагріву, а друга складова – коригувальний розв'язок, який забезпечує виконання умови на границі отвору.

Температуру в суцільній пластинці визначаємо із задачі [4]

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} - m^2 T_n = 0, \quad -H < y < H,$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T_n}{\partial y} \pm \alpha_H T_n \right) \Big|_{y=\pm H} = \pm \alpha_H T_{1,2}, \quad (17)$$

де $m^2 = \frac{Bi}{h^2}$; $Bi = \frac{\alpha_h h}{\lambda}$ – критерій Біо; h – півтовщина пластинки; α_h – коефіцієнт тепловіддачі з лицевих площин $z = \pm h$; λ – коефіцієнт теплопровідності, α_H – коефіцієнт тепловіддачі з границь $y = \pm H$.

Звідси отримуємо

$$T_n = \beta_H \left[\frac{T_1 - T_2}{2\Delta_s} \text{sh}(\mu\eta) + \frac{T_1 + T_2}{2\Delta_c} \text{ch}(\mu\eta) \right], \quad (18)$$

де $\mu = mH$, $\Delta_s = \mu \text{ch} \mu + \beta_1 \text{sh} \mu$, $\Delta_c = \mu \text{sh} \mu + \beta_1 \text{ch} \mu$, $\eta = \frac{y}{H}$, $\beta_H = \alpha_H \frac{H}{\lambda}$.

Знайдемо напруження, які відповідають температурі T_n в суцільній пластинці. Будемо розглядати два варіанти.

а) Вважатимемо, що пластинка затиснута в напрямку осі Ox . Тоді напруження у відповідній смугі будуть [4]

$$\sigma_{nx} = -\alpha_t E T_n, \quad \sigma_{ny} = \tau_{ny} = 0. \quad (19)$$

б) Прийматимемо, що пластинка вільна від навантаження. У цьому випадку до напружень, що наведені вище, необхідно додати напруження від чистого згину і розтягу такі, щоб сумарний вектор і момент у довільному перерізі $x = \text{const}$ дорівнювали нулеві. Тоді напруження будуть

$$\sigma_{nx} = -\alpha_t E \beta_H \left\{ \frac{T_1 - T_2}{2\Delta_s} \left[\text{sh}(\mu\eta) - 3 \frac{\mu \text{ch} \mu - \mu}{\mu^2} \eta \right] + \frac{T_1 + T_2}{2\Delta_c} \left[\text{ch}(\mu\eta) - \frac{\text{sh} \mu}{\mu} \right] \right\}, \quad \sigma_{ny} = \tau_{ny} = 0. \quad (20)$$

У випадку, коли на границях $y = \pm H$ задано потік тепла $\mp q_0$, маємо

$$T_n = q \frac{\text{sh}(\mu\eta)}{\mu \text{ch} \mu}, \quad (21)$$

де $q = q_0 H / \lambda$. Якщо при цьому пластинка вільна від навантаження, то напруження набудуть вигляду

$$\sigma_{nx} = -\alpha_t E q \frac{1}{\mu \text{ch} \mu} \left[\text{sh}(\mu\eta) - 3 \frac{\mu \text{ch} \mu - \mu}{\mu^2} \eta \right]. \quad (22)$$

Знаходження коригувального розв'язку. Задача теплопровідності зводиться до розв'язування рівняння Гельмгольца вигляду [4]

$$\Delta T - m^2 T = 0. \quad (23)$$

Вважатимемо, що на криволінійній граничній поверхні L отвору відбувається теплообмін за законом Ньютона

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\beta_L}{h}(T - T_L) = 0, \quad (24)$$

де $\beta_L = h\alpha_L/\lambda$; α_L – коефіцієнт тепловіддачі; T_L – температура середовища, що омиває отвір у пластинці.

Для визначення функції T використаємо метод граничних інтегральних рівнянь і виберемо T у вигляді потенціалу [1, 2]

$$T(x, y) = \int_L f(x_0, y_0) K_0(mr) ds, \quad (25)$$

де f – невідома функція на граничному контурі L ; (x_0, y_0) – точка, що розміщена на контурі L , за якою проводиться інтегрування; s – дугова координата; $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; $K_0(mr)$ – функція Макдональда.

Підставивши вираз (25) у граничну умову (24), для знаходження функції f отримаємо інтегральне рівняння

$$\pi f(x, y) + \int_L f(x_0, y_0) Q(x, y, x_0, y_0) ds = F(x, y), \quad (26)$$

$$\text{де } Q = -mK_1(mr) \frac{\partial r}{\partial n_M} + \frac{\beta_L}{h} K_0(mr),$$

$$\frac{\partial r}{\partial n_M} = \frac{(x - x_0) \cos(\widehat{n, x}) + (y - y_0) \cos(\widehat{n, y})}{r},$$

n_M – зовнішня нормаль до контуру L в точці $M(x, y)$, $F = \beta_L T_L/h$. Тут використано відомі формули для знаходження граничного значення нормальної похідної від логарифмічних потенціалів простої сфери [1].

Знаходження загального розв'язку задачі термопружності. Знайдемо напруження у нескінченній суцільній пластинці, що відповідають температурі, яка визначається за формулою (25).

Будемо використовувати термопружний потенціал, який визначається із рівняння [4]

$$\Delta \Phi = \alpha_t (1 + \nu) T, \quad (27)$$

де α_t – коефіцієнт температурного розширення; ν – коефіцієнт Пуассона. Звідси маємо

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{m^2} \int_L f(x_0, y_0) [K_0(mr) + \ln r] ds.$$

Напруження, що відповідають цьому потенціалу, визначаються за формулами вигляду

$$\sigma_{tx} + \sigma_{ty} = -\alpha_t E T, \quad \sigma_{ty} - \sigma_{tx} + 2i\tau_{txy} = -4\alpha_t E Q_1, \quad (28)$$

де E – модуль Юнга,

$$Q_1 = \int_L f S(x, y, x_0, y_0) ds, \quad S = \frac{1}{2} \frac{\bar{z} - \bar{t}}{z - t} U(mr),$$

$$U(p) = \frac{1}{2} K_0(p) + \frac{pK_1(p) - 1}{p^2}, \quad z = x + iy, \quad t = x_0 + iy_0.$$

Запишемо напруження на кривій L , якій відповідає границя отвору. Вектор напружень на цій кривій визначаємо за формулою

$$X_t + iY_t = -\frac{i}{2} \left[(\sigma_{tx} + \sigma_{ty}) \frac{dz}{ds} + (\sigma_{ty} - \sigma_{tx} - 2i\tau_{txy}) \frac{d\bar{z}}{ds} \right],$$

де dz – диференціал змінної z уздовж площинки. Тоді на підставі співвідношень (28) маємо

$$X_t + iY_t = \frac{i}{2} \alpha_t E \left[T \frac{dz}{ds} + 4\bar{Q}_1 \frac{d\bar{z}}{ds} \right]. \quad (29)$$

Кільцеві напруження на кривій L знаходимо за формулами

$$\sigma_{t\theta} = -\alpha_t ET - \operatorname{Re} \left[(X_t + iY_t) i \frac{ds}{dz} \right].$$

Тобто напруження визначаються через температуру та функцію Q_1 , що містить під знаком інтеграла функцію U . Ця функція є неперервною скрізь, причому за малих значень аргументу має вигляд

$$U(p) \approx -0.25 + (0.05412 - 0.0625 \ln p)p^2 + O(p^4).$$

Наведені вище співвідношення дають можливість визначити частковий розв'язок для напружень у випадку, коли температура подана у вигляді (25).

Напруження у суцільній пластинці σ_{cx} , σ_{cy} , τ_{cxy} , що відповідають повній температурі T_c , набудуть вигляду $\sigma_{cx} = \sigma_{nx} + \sigma_{tx}$, $\sigma_{cy} = \sigma_{ty}$, $\tau_{cxy} = \tau_{txy}$.

Повний вектор напружень на контурі L буде таким:

$$X_c + iY_c = (X_t + X_n) + i(Y_t + Y_n), \quad (30)$$

$$\text{де } X_n + iY_n = -\frac{i}{2} \left[(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) \frac{dz}{ds} + (\sigma_{ny} - \sigma_{nx} - 2i\tau_{nxy}) \frac{d\bar{z}}{ds} \right].$$

Отриманий частковий розв'язок не задовольняє задані умови на криволінійній границі пластинки, оскільки відповідний вектор напружень на кривій L границі не дорівнює нулеві. Тому необхідно знайти ще коригувальний розв'язок. За такий розв'язок приймемо розв'язок ізотермічної теорії пружності для пластинки з отвором, до границі якої прикладено вектор напружень $P = -(X + iY)$, де вектор $X + iY$ визначається за формулою (30). Для розв'язування цієї задачі використаємо метод граничних інтегральних рівнянь.

Застосуємо для розв'язування інтегрального рівняння (26) метод механічних квадратур. Замінивши інтеграли в цьому рівнянні квадратурними формулами (15), (10), отримаємо систему рівнянь

$$h \sum_{n=1}^N s'_n (d_{vn} + \beta_L b_{vn}/h) f_n + \pi \delta_{vn} f_n = F_v, \quad (31)$$

де $F_v = F_v = F(x_v, y_v)$; δ_{vn} - символ Кронекера. Коефіцієнти d_{vn} визначаються за формулами (15) при $Q'(r) = -mK_1(mr)$ та $V_0 = -1$, $V_2 = -0.25m^2$. Коефіцієнти b_{vn} обчислюються за формулами (10) при $Q(r) = K_0(mr)$, $U_0 = -C - \ln(m/2)$.

Для визначення вектора напружень на границі (після розв'язання системи рівнянь (31)) необхідно знайти значення T_j і Q_{1j} у вузлових точках (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, N$. Значення функції T_j визначимо за формулою (10) при $Q = K_0(mr)$, а значення Q_{1j} знаходимо з використанням формули (10) при $Q = S$, $U_0 = -\overline{g'(\theta_v)}/(8g'(\theta_v))\sqrt{2}$, $V_0 = 0$, $V_2 = m^2 U_0/4$.

Проведено дослідження напружень у пластинках з отворами різної форми. При чисельному розв'язуванні інтегрального рівняння вибирали 20÷80 вузлових точок так, щоб забезпечити точність обчислень температури та напружень порядку 1%.

Розрахунки виконано при заданому на границях смуги потоці тепла. Покладали $H/d = 3$, $\chi = 10^{-6}, 10^{-2}, 10^{-1}$, $\alpha_L d/\lambda = 10^{-4}$, де $\chi = (md)^2$, d - характерний параметр отвору.

На рис. 1 зображено результати розрахунків відносної температури $t = T_c/(qR)$ (рис. 1б) і напружень $\sigma = \sigma_\theta/(\alpha_t ERq)$ (рис. 1в) на границі еліптичного отвору (рис. 1а) з півосями a , b , $R = (a + b)/2$. Границю описували функцією $z = w(\zeta)$, де $w(\zeta) = R(\zeta + c_1/\zeta)$, $c_1 = (a - b)/(a + b)$, $\zeta = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Криві 1–3 відповідають значенням коефіцієнта тепловіддачі $\chi = 10^{-6}$, 10^{-2} , 10^{-1} , причому приймали, що $d = R$.

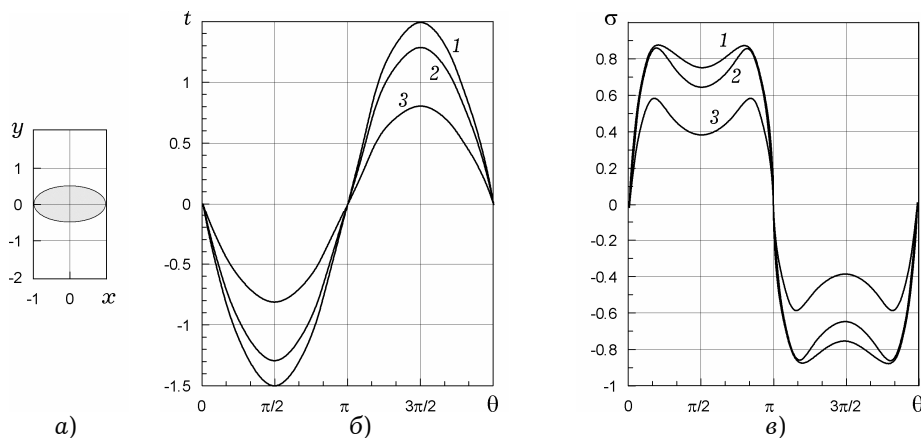


Рис. 1

Для оцінки точності розробленого алгоритму в табл. 3 наведено розраховані значення відносної температури і напружень $\tilde{\sigma}$ і \tilde{t} при практично нульовій тепловіддачі $\chi = 10^{-6}$ і $\alpha_L = 0$. Для порівняння у таблиці подано також точні значення цих же величин t і σ , розраховані на основі аналітичного розв'язку цієї задачі, отриманого в [5]. Бачимо, що обчислені за запропонованим числовим алгоритмом температура і напруження практично співпадають із точними даними.

Таблиця 3

| θ | $\tilde{\sigma}$ | σ | \tilde{t} | t |
|----------|------------------|----------|-------------|--------|
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 30 | 0.8541 | 0.8571 | -0.7488 | 0.7500 |
| 60 | 0.7984 | 0.7994 | -1.2970 | 1.2990 |
| 90 | 0.7488 | 0.7500 | -1.4976 | 1.5000 |

Аналогічні результати розрахунків для пластинки з отвором, форма якого є близькою до квадратного, наведено на рис. 2 і в табл. 4.

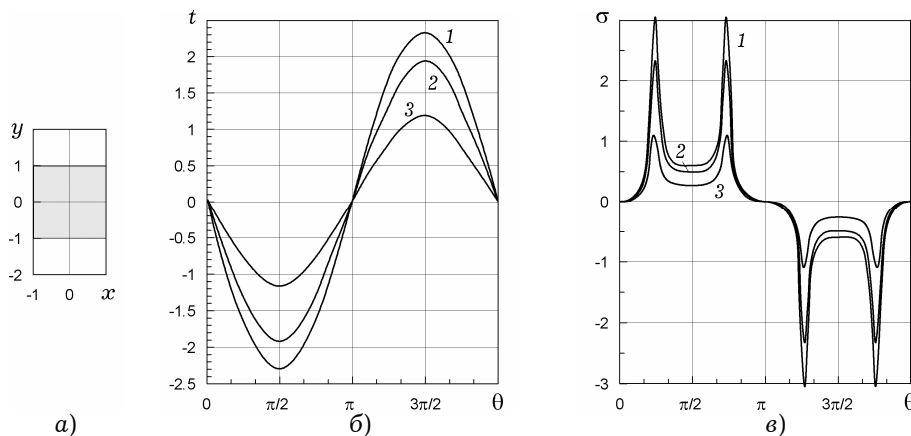


Рис. 2

Тут для опису границі використано функцію, яка конформно відображає площину з вирізаним кругом одиничного радіуса на область з квадратним отвором і має вигляд

$$w(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{c_3}{\zeta} + \frac{c_7}{\zeta^7} + \frac{c_{11}}{\zeta^{11}} \right). \quad (32)$$

У табл. 4 наведено дані, розраховані за запропонованим числовим алгоритмом і на підставі аналітичного розв'язку, який наведено в [5]. У функції відображення (32) утримували перші два члени.

Із результатів обчислень, наведених на рисунках і у таблицях, випливає, що розроблений алгоритм дозволяє проводити розрахунки температури і напружень з достатньо високою для практики точністю. Встановлено також, що тепловіддача з граничних площин у пластинці істотно впливає на температуру і напруження у пластинках з отворами різних форм.

Таблица 4

| θ | $\tilde{\sigma}$ | σ | \tilde{t} | t |
|----------|------------------|----------|-------------|--------|
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 18 | 0.0970 | 0.0944 | -0.7392 | 0.7416 |
| 36 | 0.9252 | 0.9016 | -1.4066 | 1.4107 |
| 54 | 1.6837 | 1.6944 | -1.9370 | 1.9416 |
| 72 | 0.6885 | 0.6854 | -2.2778 | 2.2825 |
| 90 | 0.5345 | 0.5333 | -2.3953 | 2.4000 |

1. Кит Г. С., Побережний О. В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1992. – 216 с.
2. Кушнір Р. М., Соляр Т. Я. Квазистатичні температурні напруження у багатозв'язних пластинах під час їх нагріву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 27–33.
Te same: Kushnir R. M., Solyar T. Ya. Quasistationary temperature stresses in multiply connected plates in the process of heating // Mater. Sci. – 2006. – 42, No. 6. – P. 187–192.
3. Максимович В. Н. Квадратурные формулы для особых интегралов по замкнутому контуру // Укр. мат. журн. – 1982. – 34, № 1. – С. 110–116.
Te same: Maksimovich V. N. Quadrature formulas for special integrals on closed contours // Ukr. Math. J. – 1982. – 43, No. 1. – P. 187–192.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напружения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 324 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.

МЕТОД МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНОК С ТЕПЛОТДАЧЕЙ

Приведены квадратурные формулы для вычисления особых интегралов, содержащих функции Бесселя второго рода и производные от них. С использованием полученных формул и метода интегральных уравнений исследовано влияние теплоотдачи на температуру в пластинках при их нагреве потоками тепла.

METHOD OF MECHANICAL QUADRATURES FOR SOLVING THERMOELASTICITY INTEGRAL EQUATIONS FOR PLATES WITH HEAT EMISSION

The quadrature formulas for calculation of singular integrals containing Bessel functions of the second kind and their derivatives are established. Using formulas obtained and method of integral equations influence of heat emission on the temperature in the plates at their heating by heat flux is investigated.

¹ Луцьк. держ. техн. ун-т, Луцьк,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів