

## ТЕРМІЧНИЙ ПРОГИН СМУГИ І ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ ІЗ ЗАЛЕЖНИМИ ВІД КООРДИНАТИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Досліджено термічний прогин вільно опертих смуги і прямокутної пластинки, спричинений різницею температур зовнішнього середовища на лицевих поверхнях і залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі на них. Запропоновано спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для цих тіл до взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Побудовано числову схему розв'язування інтегральних рівнянь з використанням методу квадратурних формул. Наведено результати числового аналізу розподілу температурного моменту та зумовленого ним прогину для прямокутної пластинки.

**Вступ.** Локальному двосторонньому нагріву в областях різної розмірності піддаються тонкостінні елементи конструкцій багатьох приладів в електронній і приладобудівній промисловості. Коефіцієнти тепловіддачі на обох лицевих поверхнях у цьому випадку можна апроксимувати кусково-сталіми функціями координат. Плосконапружений стан тонких пластин із локально змінними коефіцієнтами тепловіддачі досліджували у роботах [5, 10]. Температурні поля і напруження в пластинках при локальному нагріві джерелами тепла та зовнішнім середовищем розглянуто у [14, 16]. У роботі [13] вивчався термопружний стан прямокутної пластинки, яка нагрівається джерелами тепла, розподіленими вздовж кривої. Термонапружений стан прямокутної пластинки, що нагрівається зовнішнім середовищем із коефіцієнтами тепловіддачі на лицевих поверхнях, які змінюються за квадратичним законом, досліджено в [15]. Вплив різних значень коефіцієнта теплообміну в області нагріву і поза нею на прогин тонкостінних елементів наведено в працях [9, 11]. Розв'язкам звичайних лінійних диференціальних рівнянь із кусково-сталіми коефіцієнтами присвячені роботи [2, 3, 6–8, 12].

На основі використання функції Гевісайда та інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду дослідимо температурне поле і термопружний прогин смуги-пластинки і прямокутної пластинки з кусково-сталіми коефіцієнтами тепловіддачі з лицевих поверхонь, які перебувають під дією температури зовнішнього середовища.

**Постановка задачі для смуги-пластинки.** Розглянемо задачу про визначення прогину в тонкій смугі-пластинці  $-\infty < x_1 < \infty$ ,  $0 \leq y_1 \leq c$ ,  $-h \leq z \leq h$ , з лицевих поверхонь  $z = \pm h$  якої відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем різної температури  $t^+$ ,  $t^-$ . Бокові поверхні  $y_1 = 0$ ,  $y_1 = c_1$  пластини теплоізовані, а при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  температура задана (рис. 1). Коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь смуги-пластинки на трьох її частинах  $x_1 < a_1$ ,  $a_1 \leq x_1 < b_1$ ,  $x_1 \geq b_1$  є різними, причому відрізняються також і їх значення з верхньої і з нижньої поверхонь  $z = \pm h$ . Смуга-пластинка ненавантажена і вільно оперта.

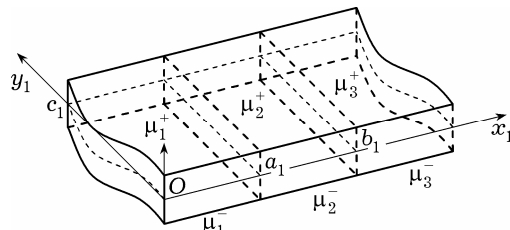


Рис. 1

**Визначення температурного поля.** Внаслідок теплоізоляції бокових поверхонь  $y_1 = 0$ ,  $y_1 = c_1$  стаціонарне температурне поле в тонкій смугі-пластинці буде одновимірним і описуватимемо його взаємозв'язаною систе-

мою рівнянь для визначення інтегральних температурних характеристик  $T_1, T_2$  [9, 11]:

$$\begin{aligned} h^2 \Delta T_1(x_1) - \mu_1(x_1)(T_1(x_1) - t_1) - \mu_2(x_1)(T_2(x_1) - t_2) &= 0, \\ h^2 \Delta T_2(x_1) - 3(1 + \mu_1(x_1))(T_2(x_1) - t_2) - 3\mu_2(x_1)(T_1(x_1) - t_1) &= 3t_2 \end{aligned} \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} T_1 &= t_1 + b_1 t_2, & T_2 &= t_2 - b_2 t_2, & x_1 &\rightarrow -\infty, \\ T_1 &= t_1 + b_3 t_2, & T_2 &= t_2 - b_4 t_2, & x_1 &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $t_{1,2} = \frac{t^+ \pm t^-}{2}, \quad \mu_{1,2}(x_1) = \frac{h(\mu^+(x_1) \pm \mu^-(x_1))}{2},$

$$b_{1,2} = \frac{\mu_1^+ \mp \mu_1^-}{\mu_1^+ + \mu_1^- + 2\mu_1^+ \mu_1^-}, \quad b_{3,4} = \frac{\mu_3^+ \mp \mu_3^-}{\mu_3^+ + \mu_3^- + 2\mu_3^+ \mu_3^-}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

$\mu^+(x_1), \mu^-(x_1)$  – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь пластинки  $z = \pm h$  відповідно;  $\mu_i^\pm, i = 1, 2, 3,$  – відносні коефіцієнти тепловіддачі на ділянках  $(-\infty, a^1), [a^1, b^1), [b^1, \infty)$ .

Для опису кусково-змінних коефіцієнтів тепловіддачі використаємо функцію  $H(a^1, b^1; x_1)$ , яку означимо через асиметричні функції Гевісайда  $S_-(x_1 - a^1)$  і  $S_+(x_1 - b^1)$  [10]:

$$H(a^1, b^1; x_1) = S_-(x_1 - a^1) - S_+(x_1 - b^1).$$

Тоді

$$h\mu^\pm(x_1) = \mu_1^\pm + (\mu_2^\pm - \mu_1^\pm)H(a^1, b^1; x_1) + (\mu_3^\pm - \mu_1^\pm)S_+(x_1 - b^1). \quad (3)$$

Слід відмітити, що при  $\mu_i^+ = \mu_i^-$  рівняння системи (1) стають незв'язаними і перше з її рівнянь співпадає з рівнянням, розглянутим у [5, 10, 14], і в роботах [2, 3, 6–8, 12] наведено способи його розв'язування.

Уведемо безрозмірну координату  $x = \frac{x_1}{h}$ . Підставляючи співвідношення (3) у вирази для  $\mu_1(x)$  та  $\mu_2(x)$ , одержимо

$$\mu_{1,2}(x) = \eta_1^\pm + (\eta_2^\pm - \eta_1^\pm)H(a, b; x) + (\eta_3^\pm - \eta_1^\pm)S_+(x - b), \quad (4)$$

де  $2\eta_1^\pm = (\mu_1^+ \pm \mu_1^-), 2\eta_2^\pm = (\mu_2^+ \pm \mu_2^-), 2\eta_3^\pm = (\mu_3^+ \pm \mu_3^-), ah = a_1^1, bh = b_1^1$ .

Вводячи нові змінні  $\theta_1 = T_1 - t_1 - b_1 t_2, \theta_2 = T_2 - t_2 + b_2 t_2$  і підставляючи їх у систему рівнянь (1) з урахуванням (4), після перетворень отримаємо систему

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1 - \eta_1^+ \theta_1 - \eta_1^- \theta_2 &= \\ &= (\theta_1 + b_1 t_2)[(\eta_2^+ - \eta_1^+)H(a, b; x) + (\eta_3^+ - \eta_1^+)S_+(x - b)] + \\ &+ (\theta_2 - b_2 t_2)[(\eta_2^- - \eta_1^-)H(a, b; x) + (\eta_3^- - \eta_1^-)S_+(x - b)], \\ \Delta\theta_2 - 3(1 + \eta_1^+) \theta_2 - 3\eta_1^- \theta_1 &= \\ &= 3(\theta_2 - b_2 t_2)[(\eta_2^+ - \eta_1^+)H(a, b; x) + (\eta_3^+ - \eta_1^+)S_+(x - b)] + \\ &+ 3(\theta_1 + b_1 t_2)[(\eta_2^- - \eta_1^-)H(a, b; x) + (\eta_3^- - \eta_1^-)S_+(x - b)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Відповідно крайові умови (2) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, & \theta_2 &= 0, & x &\rightarrow -\infty, \\ \theta_1 &= (b_3 - b_1)t_2, & \theta_2 &= (b_2 - b_4)t_2, & x &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Систему диференціальних рівнянь (5) разом з граничними умовами (6) введенням заміни  $F_1 = \theta_1 + \lambda_1 \theta_2$ ,  $\lambda_2 F_2 = \theta_1 + \lambda_2 \theta_2$  зведемо до такої задачі:

$$\begin{aligned} \Delta F_1(x) - \alpha_1 F_1(x) &= Q_1(x)H(a, b; x) + Q_2(x)S_+(x - b), \\ \Delta F_1(x) - \alpha_2 F_2(x) &= Q_3(x)H(a, b; x) + Q_4(x)S_+(x - b), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F_1(x)|_{x \rightarrow -\infty} &= F_2(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0, \\ F_1(x)|_{x \rightarrow \infty} &= m_1, \quad F_2(x)|_{x \rightarrow \infty} = m_2, \end{aligned} \quad (8)$$

де позначено

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \eta_1^+ + 3\lambda_1 \eta_1^-, \quad [(b_3 - b_1) - \lambda_1(b_4 - b_2)]t_2 = m_1, \\ [(b_3 - b_1) - \lambda_2(b_4 - b_2)]t_2 &= m_2 \lambda_2, \quad \alpha_2 = \eta_1^+ + 3\lambda_2 \eta_1^-, \\ Q_1(x) &= d_1 F_1(x) + d_2 F_2(x) + c_1 t_2, \quad Q_2(x) = \delta_1 F_1(x) + \delta_2 F_2(x) + r_1 t_2, \\ Q_3(x) &= d_3 F_1(x) + d_4 F_2(x) + c_2 t_2, \quad Q_4(x) = \delta_3 F_1(x) + \delta_4 F_2(x) + r_2 t_2, \\ \{d_1, \delta_1\} &= \frac{(\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_1^+)(\lambda_2 - 3\lambda_1) + (\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_1^-)(3\lambda_1 \lambda_2 - 1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ \{d_2, \delta_2\} &= \frac{(\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_1^+)2\lambda_1 \lambda_2 + (\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_1^-)(\lambda_2 - 3\lambda_1^2 \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ \{d_3, \delta_3\} &= \frac{(\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_1^+)(-2\lambda_2) + (\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_1^-)(3\lambda_2^2 - 1)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ \{c_1, r_1\} &= (\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_1^+)(b_1 - 3\lambda_1 b_2) - (\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_1^-)(b_2 - 3\lambda_1 b_1), \\ \{d_4, \delta_4\} &= \frac{(\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_1^+)(-\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_2^2) + (\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_1^-)(\lambda_2 - 3\lambda_1 \lambda_2^2)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ \{c_2, r_2\} &= \frac{(\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_1^+)(b_1 - 3\lambda_2 b_2) - (\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_1^-)(b_2 - 3\lambda_2 b_1)}{\lambda_2}, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{3 + 2\eta_1^+ \pm \sqrt{(3 + 2\eta_1^+)^2 + 12(\eta_1^-)^2}}{6\eta_1^-}. \end{aligned}$$

Рівняння (7) розв'язуємо методом варіації сталої. Після врахування граничних умов (8) і проведення громіздких перетворень задачу зводимо до розв'язання взаємозв'язаної системи лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду:

$$\begin{aligned} F_1(x) &+ \int_a^b (F_1 K^{11}(x, s) + F_2 K^{12}(x, s)) ds + \\ &+ \int_b^\infty (F_1 P^{11}(x, s) + F_2 P^{12}(x, s)) ds = f_1(x), \\ F_2(x) &+ \int_a^b (F_1 K^{21}(x, s) + F_2 K^{22}(x, s)) ds + \\ &+ \int_b^\infty (F_1 P^{21}(x, s) + F_2 P^{22}(x, s)) ds = f_2(x), \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}
K^{\{11,12\}}(x,s) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}} d_{\{1,2\}} e^{-\sqrt{\alpha_1}|x-s|}, \\
K^{\{21,22\}}(x,s) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} d_{\{3,4\}} e^{-\sqrt{\alpha_2}|x-s|}, \\
P^{\{11,12\}}(x,s) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}} \delta_{\{1,2\}} e^{-\sqrt{\alpha_1}|x-s|}, \\
P^{\{21,22\}}(x,s) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \delta_{\{3,4\}} e^{-\sqrt{\alpha_2}|x-s|}, \\
f_i(x) &= g_i(x) + v_i(x) + \varphi_i(x), \\
g_i &= \frac{c_i t_2}{2\alpha_i} (e^{-\sqrt{\alpha_i}(b-x)} - e^{-\sqrt{\alpha_i}(a-x)}) - \\
&\quad - \frac{r_i t_2}{\alpha_i} \left( \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\alpha_i}(b-x)} - \frac{e^{\sqrt{\alpha_i}x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\alpha_i}x}} \right) e^{-\sqrt{\alpha_i}b} + \frac{m_i e^{\sqrt{\alpha_i}x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\alpha_i}x}}, \\
v_i(x) &= \begin{cases} 0, & x < a, \\ v_{ai}(x), & x \in [a, b), \\ v_{bi}(x), & x \geq b, \end{cases} \\
\varphi_i(x) &= \begin{cases} 0, & x < b, \\ -\frac{r_i t_2}{\alpha_i} [1 - \operatorname{ch} \sqrt{\alpha_i}(x-b)], & x \geq b, \end{cases} \\
v_{ai}(x) &= -\frac{c_i t_2}{\alpha_i} [1 - \operatorname{ch} \sqrt{\alpha_i}(x-a)], \\
v_{bi} &= -\frac{c_i t_2}{\alpha_i} [\operatorname{ch} \sqrt{\alpha_i}(x-b) - \operatorname{ch} \sqrt{\alpha_i}(x-a)], \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Систему інтегральних рівнянь (9) розв'язуємо чисельно. Для обчислення інтегралів із цієї системи використовуємо квадратурну формулу Сімпсона [1]

$$\int_a^b f(s)K(x,s)ds = \sum_{k=1}^n A_k f(s_k)K(x,s_k),$$

де  $A_1 = A_n = \xi/3$ ,  $A_{2k} = 4\xi/3$ ,  $A_{2k-1} = 2\xi/3$ . У випадку, коли верхня межа інтегрування прямує до нескінченності, замість нескінченності вибираємо достатньо велике число  $N$ . Кожен з інтервалів інтегрування в інтегралах системи (9) поділимо на  $n-1$  рівних частин точками розбиття  $s_k$ . Отже, для інтервалів інтегрування  $[a, b]$  і  $[b, N]$  разом отримаємо  $2n-1$  точок  $s_1, \dots, s_{2n-1}$ . Якщо в системі рівнянь (9) замість  $x$  підставити точки розбиття  $x_j = s_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n-1$ , то отримаємо систему  $4n-2$  лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення  $2n-1$  значень функції  $F_1(x_j)$  та  $2n-1$  значень функції  $F_2(x_j)$  у точках розбиття відрізків  $[a, b]$  та  $[b, N]$ :

$$\begin{aligned}
F_1(x_j) &= f_1(x_j) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_1(s_k) K^{11}(x_j, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_2(s_k) K^{12}(x_j, s_k) - \\
&\quad - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_1(s_{k+n-1}) P^{11}(x_j, s_{k+n-1}) - \\
&\quad - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_2(s_{k+n-1}) P^{12}(x_j, s_{k+n-1}), \quad j = 1, \dots, 2n-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x_j) = & f_2(x_j) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_1(s_k) K^{21}(x_j, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_2(s_k) K^{22}(x_j, s_k) - \\
& - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_1(s_{k+n-1}) P^{21}(x_j, s_{k+n-1}) - \\
& - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_2(s_{k+n-1}) P^{22}(x_j, s_{k+n-1}), \quad j = 1, \dots, 2n-1.
\end{aligned}$$

Тоді для знаходження розв'язку задачі (7), (8) у будь-якій точці смуги на основі рівнянь (9) маємо систему

$$\begin{aligned}
F_1(x) = & f_1(x) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_1(s_k) K^{11}(x, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_2(s_k) K^{12}(x, s_k) - \\
& - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_1(s_{k+n-1}) P^{11}(x, s_{k+n-1}) - \\
& - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_2(s_{k+n-1}) P^{12}(x, s_{k+n-1}), \\
F_2(x) = & f_2(x) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_1(s_k) K^{21}(x, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_2(s_k) K^{22}(x, s_k) - \\
& - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_1(s_{k+n-1}) P^{21}(x, s_{k+n-1}) - \\
& - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_2(s_{k+n-1}) P^{22}(x, s_{k+n-1}).
\end{aligned}$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) знаходимо з урахуванням введених замінін за формулами

$$T_1 = \frac{\lambda_2(F_1 - \lambda_1 F_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} + t_1 + b_1 t_2, \quad T_2 = \frac{\lambda_2 F_2 - F_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + t_2 - b_2 t_2. \quad (10)$$

Якщо коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь в смугі-пластинці є різними тільки на чотирьох ділянках ( $\mu_2^+ = \mu_3^+$ ,  $\mu_2^- = \mu_3^-$ ), то в системі інтегральних рівнянь (9) для визначення  $F_1$  і  $F_2$  залишаються лише інтеграли від  $b$  до  $\infty$ .

**Визначення прогину.** Термопружний прогин вільно опертої пластини описуємо рівнянням

$$\Delta_1 \Delta_1 w + A \Delta_1 T_2 = 0, \quad (11)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}
w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + A T_2(x) = 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow \infty, \\
w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + A T_2(x) = 0, \quad y = 0, \quad y = c, \quad (12)
\end{aligned}$$

де  $A = (1 + \nu) \alpha_t h$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення;  $y = \frac{y_1}{h}$ ;  $c = \frac{c_1}{h}$ ,  $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Інтегруючи рівняння (11), отримаємо

$$\Delta_1 w + A T_2 = q(x, y),$$

де  $q(x, y)$  – гармонічна функція [4].

Із граничних умов (12) і рівняння (11) випливає, що функція  $q = 0$  на контурі пластини і задовольняє рівняння  $\Delta_1 q = 0$ , тому  $q \equiv 0$  у всій області  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq c$  [4], і задача зводиться до розв'язання рівняння

$$\Delta_1 w + AT_2 = 0 \quad (13)$$

за умови, що на контурі пластини  $w = 0$ .

Розкладемо вираз  $AT_2$  з рівняння (13) у ряд Фур'є на проміжку  $0 \leq y \leq c$ :  $AT_2 = \frac{4AT_2}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{\pi m y}{c}$ . Тоді прогин смуги будемо шукати у вигляді  $w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} X_m(x) \frac{1}{m} \sin \frac{\pi m y}{c}$ . Підставляючи його в рівняння (13), для визначення функцій  $X_m(x)$  отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} - \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2 X_m = -\frac{4AT_2}{\pi m} \quad (14)$$

з граничними умовами

$$X_m = 0, \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (15)$$

Розв'язавши задачу (14), (15) методом Лагранжа, матимемо

$$X_m = \frac{2A}{\pi m \alpha_m} \int_{-\infty}^{\infty} T_2(s) e^{-\alpha_m |x-s|} ds, \quad \text{де } \alpha_m = \frac{\pi m}{c}.$$

Прогин визначаємо за формулою

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2A}{\pi m \alpha_m} \int_{-\infty}^{\infty} T_2(s) e^{-\alpha_m |x-s|} ds \sin \frac{\pi m y}{c}. \quad (16)$$

За відомим прогином (16) моменти визначаємо згідно з формулами з [11].

**Формулювання та розв'язок задачі для прямокутної пластинки.** Розглянемо задачу про визначення прогину в тонкій вільно опертій прямокутній пластинці  $0 \leq x \leq \ell$ ,  $0 \leq y \leq c$ ,  $-h \leq z \leq h$ , на лицевих поверхнях  $z = \pm h$  якої відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем різної температури  $t^+$ ,  $t^-$  за законом Ньютона. Бокові поверхні пластини  $y = 0$ ,  $y = c$  теплоізовані, а на поверхнях  $x = 0$  та  $x = \ell$  температура задана. Коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь пластинки на трьох її частинах  $x < a$ ,  $a \leq x < b$ ,  $b \leq x \leq \ell$  є різними, причому відрізняються також і їх значення з верхньої і з нижньої поверхонь  $z = \pm h$ .

Температурне поле в такій пластинці описується взаємозв'язаною системою рівнянь (1), а крайові умови мають вигляд

$$T_1 = T_c, \quad T_2 = T_c^*, \quad x = 0, \quad x = \ell.$$

Кусково-змінні коефіцієнти тепловіддачі запишемо подібно, як для смуги:

$$h\mu_i^\pm(x) = \mu_1^\pm + (\mu_2^\pm - \mu_1^\pm)H(a, b; x) + (\mu_3^\pm - \mu_1^\pm)H(b, \ell; x), \quad (17)$$

де  $\mu_i^\pm$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – відносні коефіцієнти тепловіддачі відповідно на ділянках  $(0, a)$ ,  $[a, b)$ ,  $[b, \ell)$ . Підставивши рівності (17) у систему рівнянь (1), після заміни  $\theta_1 = T_1 - t_1$ ,  $\theta_2 = T_2 - t_2$  отримаємо задачу

$$\Delta \theta_1 - \eta_1^+ \theta_1 - \eta_1^- \theta_2 = \theta_1 [(\eta_2^+ - \eta_1^+)H(a, b; x) + (\eta_3^+ - \eta_1^+)H(b, \ell; x)] + \\ + \theta_2 [(\eta_2^- - \eta_1^-)H(a, b; x) + (\eta_3^- - \eta_1^-)H(b, \ell; x)],$$

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_2 - 3(1 + \eta_1^+)\theta_2 - 3\eta_1^-\theta_1 &= \\
&= 3t_2 + 3\theta_2[(\eta_2^+ - \eta_1^+)H(a, b; x) + (\eta_3^+ - \eta_1^+)H(b, \ell; x)] + \\
&+ 3\theta_1[(\eta_2^- - \eta_1^-)H(a, b; x) + (\eta_3^- - \eta_1^-)H(b, \ell; x)], \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\theta_1(0) = \theta_1(\ell) = T_c - t_1, \quad \theta_2(0) = \theta_2(\ell) = T_c^* - t_2. \quad (19)$$

Розв'язуємо взаємозв'язану систему рівнянь (18) для пластинки аналогічно, як для смуги, перейшовши до функцій  $F_1$  і  $F_2$ . Граничні умови з урахуванням (19) будуть такими:

$$F_1(0) = F_1(\ell) = T_c - t_1 + \lambda_1(T_c^* - t_2) = m_1,$$

$$\lambda_2 F_2(0) = \lambda_2 F_2(\ell) = T_c - t_1 + \lambda_2(T_c^* - t_2) = \lambda_2 m_2.$$

У результаті отримаємо взаємозв'язану систему інтегральних рівнянь вигляду (9), в яких інтегрування в інтервалі  $[b, \infty]$  слід замінити інтегруванням в інтервалі  $[b, \ell]$ . Ядра потрібно замінити на такі:

$$\begin{aligned}
K^{11} &= d_1 K_1, & K^{12} &= d_2 K_1, & K^{21} &= d_3 K_2, & K^{22} &= d_4 K_2, \\
P^{11} &= \delta_1 K_1, & P^{12} &= \delta_2 K_1, & P^{21} &= \delta_3 K_2, & P^{22} &= \delta_4 K_2,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
K_1(x, s) &= -2\varphi_1 \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_1} x \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_1} (\ell - s) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}} (e^{\sqrt{\alpha_1}(x-s)} - e^{-\sqrt{\alpha_1}|x-s|}), \\
K_2(x, s) &= -2\varphi_2 \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_2} x \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_2} (\ell - s) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} (e^{\sqrt{\alpha_2}(x-s)} - e^{-\sqrt{\alpha_2}|x-s|}), \\
\varphi_i &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_i} 2 \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_i} \ell}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Праві частини рівнянь (9) матимуть вигляд  $f_i(x) = p_i(x) + \gamma_i(x)$ , де

$$p_i = q_{1i} e^{\sqrt{\alpha_i} x} + q_{2i} e^{-\sqrt{\alpha_i} x}, \quad q_{j1} = \frac{m_j - m_j e^{-\sqrt{\alpha_j} \ell} - \gamma_j(\ell)}{2 \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_j} \ell},$$

$$q_{j2} = m_j - q_{j1}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\gamma_1(x) = \frac{3\lambda_1 t_2 (\operatorname{ch} \sqrt{\alpha_1} - 1)}{\alpha_1}, \quad \gamma_2(x) = \frac{3t_2 (\operatorname{ch} \sqrt{\alpha_2} - 1)}{\alpha_2}.$$

Прогин описується рівнянням (11) з умовами

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \alpha_t (1 + \nu) h T_2(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = \ell, \\
w(x, y) &= 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \alpha_t (1 + \nu) h T_2(x) = 0, \quad y = 0, \quad y = c. \quad (20)
\end{aligned}$$

За наведеною вище схемою отримаємо розв'язок задачі (11), (20) у вигляді

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2A}{\pi m \alpha_m} \int_0^{\ell} T_2(s) \left( \frac{\operatorname{sh} \alpha_m x \operatorname{sh} \alpha_m (\ell - s)}{\operatorname{sh} \alpha_m \ell} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-\alpha_m |x-s|} - e^{\alpha_m (x-s)}}{2} \right) ds \sin \frac{\pi m y}{c},
\end{aligned}$$

де  $\alpha_m = \frac{\pi m}{c}$ .

**Аналіз результатів розрахунків.** Обчислення виконували для прямокутної пластинки при таких значеннях параметрів:  $a = 2$ ;  $b = 4$ ;  $\ell = 6$ ;  $c = 2$ ;  $t_c^+ = 25^\circ \text{C}$ ,  $t_c^- = 15^\circ \text{C}$ ,  $T_c = 30^\circ \text{C}$ ,  $T_c^* = 0^\circ \text{C}$ ,  $\mu_1^- = 10$ ;  $\mu_2^- = 10$ ;  $\mu_3^- = 10$ .

На рис. 2 наведено розподіл температурних моментів  $T_2$  для різних значень коефіцієнтів тепловіддачі з верхньої лицевої поверхні  $z = h$ . Крива 1 відповідає  $\mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_3^+ = 10$ ; крива 2 -  $\mu_1^+ = 30$ ,  $\mu_2^+ = \mu_3^+ = 10$ ; крива 3 -  $\mu_1^+ = \mu_3^+ = 10$ ,  $\mu_2^+ = 50$ ; крива 4 -  $\mu_1^+ = \mu_2^+ = 10$ ,  $\mu_3^+ = 80$ . Величина температурного моменту  $T_2$  зменшується відповідно на смугах  $0 < x < a$ ,  $a \leq x < b$ ,  $b \leq x < \ell$  та набуває від'ємних значень на двох останніх. Це пояснюється збільшенням на них коефіцієнтів тепловіддачі, а, значить, більшою температурою на нижній лицевій поверхні пластинки, ніж на верхній.

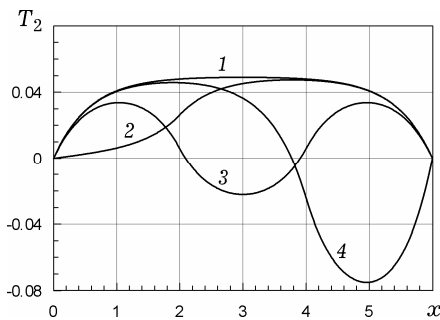


Рис. 2

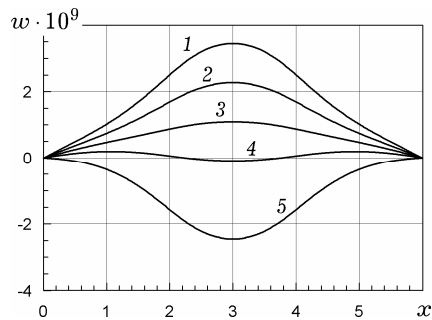


Рис. 3

На рис. 3 показано розподіл прогинів  $w$  прямокутної пластинки, коли коефіцієнти тепловіддачі з верхньої лицевої поверхні набувають значень  $\mu_1^+ = \mu_3^+ = 10$ ,  $\mu_2^+ = 50$ , для значень температури на боковій поверхні  $T_c = 0, 10, 20, 30, 50^\circ \text{C}$  (відповідно криві 1-5). При збільшенні температури на боковій поверхні прогин пластинки спочатку зменшується, а потім зростає у протилежний бік, що пояснюється збільшенням температури на нижній лицевій поверхні прямокутної пластинки.

**Висновки.** Визначення температурного поля у смузі та прямокутній пластинці з різними на кожному із розглядуваних відрізків лицевих поверхонь коефіцієнтами тепловіддачі зведено до системи взаємозв'язаних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Розроблено аналітично-чисельну схему розв'язування системи цих інтегральних рівнянь.

З наведених графіків випливає, що нерівномірність тепловіддачі з лицевих поверхонь тонких пластинок значно впливає на розподіл у них температурних моментів і прогинів.

Зміна температури зовнішнього середовища на боковій поверхні пластинки при кусково-сталих коефіцієнтах тепловіддачі з лицевих поверхонь істотно впливає на її прогин. У цьому випадку прогин пластинки виникає і тоді, коли значення температур зовнішнього середовища на лицевих поверхнях є однаковими.

1. Верлянь А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. - Киев: Наук. думка, 1978. - 292 с.
2. Вигак В. М. О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно-однородного тела // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1980. - № 1. - С. 30-32.
3. Зорий Л. М. К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1978. - № 11. - С. 991-994.
4. Коваленко А. Д. Термоупругость. - Киев: Вища шк., 1975. - 216 с.
5. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. Температурные напряжения от объемных источников. - Киев: Наук. думка, 1983. - 288 с.



6. Коляно Ю. М., Попович В. С. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой // Физ.-хим. механика материалов. – 1976. – 12, № 2. – С. 108–112.  
Te same: *Kolyano Yu. M., Popovich V. S.* Efficient method of solving thermo-elasticity problems for piecewise-uniform solids heated by an external medium // *Materials Sci.* – 1977. – 12, No. 2. – P. 204–208.
7. Кушнір Р. М. Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 54–57.
8. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – Москва: Машиностроение, 1973. – 659 с.
9. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Учет теплоотдачи при локальном нагреве тонкостенных элементов конструкций // Докл. АН СССР. – 1975. – 225, № 4. – С. 778–781.
10. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
11. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
12. Процюк Б. В. Побудова фундаментальної системи розв'язків звичайного лінійного диференціального рівняння з розривними і сингулярними коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 4. – С. 116–122.
13. Халко Б. С. Температурные напряжения в прямоугольной пластинке с распределенными по произвольной кривой источниками тепла // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 16. – С. 48–52.
14. Халко Б. С., Чиж А. І. Температурне поле та прогин півбезмежної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 133–144.
15. Sugano Y. Transient thermal stresses in a rectangular plate due to variation of heat-transfer coefficients on upper and lower surfaces // *Int. J. Eng. Sci.* – 1983. – 21, No. 10. – P. 1203–1214.
16. Sugano Y., Chiba R., Hirose K., Takahashi K. Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk // *JSME Int. J. Ser. A.* – 2004. – 47, No. 2. – P. 189–197.

#### ТЕРМИЧЕСКИЙ ПРОГИБ ПОЛОСЫ И ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ КООРДИНАТЫ КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕПЛОТДАЧИ

*Исследован термический прогиб свободно опертых полосы и прямоугольной пластинки, обусловленный разницей температур внешней среды на лицевых поверхностях и зависящими от координаты коэффициентами теплоотдачи на них. Предложен способ сведения краевой задачи теплопроводности для этих тел к взаимосвязанной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Построена численная схема решения интегральных уравнений с помощью метода квадратурных формул. Приведены результаты численного анализа распределения температурного момента и обусловленного им прогиба для прямоугольной пластинки.*

#### THERMAL BENDING OF A STRIP AND RECTANGULAR PLATE WITH HEAT EXCHANGE COEFFICIENTS DEPENDENT ON COORDINATE

*Thermal bending of a simply supported strip and rectangular plate caused by the temperatures difference of the surrounding on the faces and coordinate-dependent heat-exchange coefficients on them are studied. A method of reducing the heat conduction boundary-value problem for these bodies to a coupled system of Fredholm second kind integral equations is proposed. Numerical scheme for solving these integral equations using the quadrature formulas is constructed. The results of computational analysis of distribution of a thermal moment and bending due to it for a rectangular plate are presented.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
16.12.08