

НЕОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПРИПОВЕРХНЕВОЮ КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ ДІЇ СПРЯМОВАНИХ УЗДОВЖ НЕЇ ЗУСИЛЬ

У рамках лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла розглянуто неосесиметричну задачу про вплив вільної поверхні пружного напівобмеженого тіла на розподіл напружень в околі приповерхневої дископодібної тріщини. Проведено об'єднаний аналіз двох неklasичних механізмів руйнування – руйнування матеріалу з початковими напруженнями, що діють паралельно до площини розташування тріщини, і руйнування тіла при стиску вздовж тріщини. З використанням подань загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції та апарату інтегральних перетворень Фур'є – Ганкеля задачу зведено окремо для кожної гармоніки за кутовою координатою до розв'язувальних систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі контуру тріщини та проаналізовано їх залежність від початкових напружень і геометричних параметрів задачі. Для окремих високоеластичних матеріалів визначено критичні параметри стиску, що відповідають неосесиметричним формам локальної втрати стійкості матеріалу при стиску вздовж приповерхневої тріщини.

1. Вступ. Незважаючи на активний розвиток механіки руйнування, ряд проблем цієї галузі залишаються дослідженими недостатньо. До таких проблем, які потребують подальшого вивчення, належать, зокрема, питання дослідження впливу на напружено-деформований стан тіл із тріщинами початкових (або залишкових) напружень, що виникають на практиці як наслідок неоднорідності лінійних чи об'ємних деформацій у суміжних областях матеріалу, а також дослідження руйнування тіл при стиску вздовж тріщин.

Особливий інтерес при цьому становлять задачі, в яких початкові напруження (або стискувальні зусилля) діють уздовж поверхонь тріщин, що містяться в тілі. Такі групи задач за термінологією [12, 13, 20] відносяться до неklasичних проблем механіки руйнування, оскільки в рамках класичної механіки крихкого руйнування неможливо врахувати вплив складових зусиль, що діють уздовж тріщин, на параметри руйнування, зокрема, на коефіцієнти інтенсивності напружень і величини розкриття тріщин.

Для дослідження закономірностей впливу на напружено-деформований стан матеріалів із тріщинами початкових (або залишкових) напружень, які діють уздовж тріщин, у роботах [9, 10] було запропоновано підхід в рамках лінеаризованої теорії пружності. Із використанням зазначеного підходу отримано розв'язки окремих класів статичних і динамічних задач, переважно для ізольованих тріщин в нескінченних тілах з початковими напруженнями (стислий огляд зазначених робіт наведено в [12, 19, 22]). У працях [3, 5, 6, 14, 17] досліджено осесиметричні задачі про приповерхневі кругові тріщини нормального відриву, радіального зсуву та кручення в попередньо напружених ізотропних матеріалах і композитах.

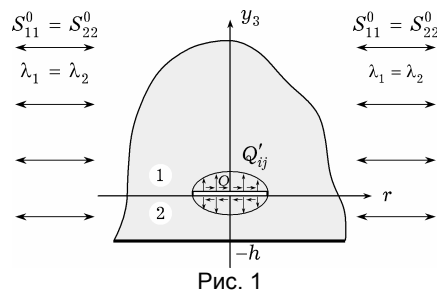
В [11, 13] при вивченні проблем руйнування тіл в умовах їх стискання уздовж площин розташування тріщин за механізм початку руйнування розглядалась локальна втрата стійкості матеріалу в околі тріщин, а критичні параметри стиску визначались з розв'язку відповідних задач на власні значення в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл. Огляд робіт, виконаних з використанням цього підходу, наведено в [13, 21].

Слід зазначити, що спільним моментом при дослідженні двох зазначених неklasичних проблем механіки руйнування є використання споріднених математичних апаратів в рамках лінеаризованої теорії. Крім того, як було показано в [10, 12], при розв'язанні задач про руйнування тіл з початковими напруженнями спостерігається різка «резонансоподібна» зміна величин напружень і переміщень у матеріалі при досягненні початковими напруженнями стиску значень, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу у відповідних задачах про стискання тіл уздовж тріщин. Враховуючи вказане, в [4, 7, 8] було

запропоновано об'єднаний підхід до дослідження задач механіки руйнування матеріалів із початковими напруженнями та руйнування тіл при стиску уздовж тріщин в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності. При такому підході розроблено ефективний метод визначення критичних параметрів стиску, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщин, відповідно до якого ці параметри обчислюються при розв'язуванні відповідних неоднорідних задач механіки руйнування матеріалів з початковими напруженнями як значення початкових стискувальних напружень, при досягненні яких відбувається різка «резонансоподібна» зміна основних величин напружено-деформованого стану, зокрема, коефіцієнтів інтенсивності напружень.

У пропонованій роботі з використанням вищевказаного підходу розглянуто дві групи просторових неосесиметричних задач для напівобмеженого тіла, що містить кругову в плані тріщину, паралельну вільній поверхні тіла: **а)** про руйнування матеріалу з початковими напруженнями, спрямованими уздовж площини розташування тріщини; **б)** про стиск тіла зусиллями, спрямованими паралельно до тріщини. Задачі розв'язано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих пружних тіл шляхом їх зведення з використанням інтегральних розвинень Фур'є – Ганкеля окремо для кожної гармоніки за кутовою координатою спочатку до парних інтегральних рівнянь, а потім до систем неоднорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі контуру тріщини, проаналізовано їх залежність від початкових напружень і виявлено пов'язані з цим нові механічні ефекти. На основі аналізу «резонансоподібної» поведінки коефіцієнтів інтенсивності напружень при наблизенні значень початкових стискувальних напружень до значень, при яких відбувається локальна втрата стійкості матеріалу, для окремих матеріалів визначено критичні параметри стиску, що відповідають неосесиметричним формам локальної втрати стійкості матеріалу при стисканні уздовж приповерхневої дископодібної тріщини. Виявлено загальні закономірності впливу геометричних параметрів задачі (розмірів тріщини та відстані від неї до вільної поверхні матеріалу) та фізико-механічних характеристик середовища на параметри руйнування.

2. Постановка задачі. Розглядається напівобмежене пружне тіло, що займає півпростір $y_3 \geq -h$, з початковими напруженнями $S_{11}^0 = S_{22}^0$, які діють уздовж кругової приповерхневої тріщини радіуса a , розташованої в площині $y_3 = 0$ з центром на осі Oy_3 : $\{0 \leq r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, y_3 = 0\}$ (рис. 1).



У цьому випадку в матеріалі виникає однорідний початковий напружено-деформований стан

$$S_{33}^0 = 0, \quad S_{11}^0 = \text{const} \neq 0, \quad S_{22}^0 = \text{const} \neq 0, \quad (1)$$

при якому переміщення визначаються зі співвідношень

$$u_j^0 = \lambda_j^{-1}(\lambda_j - 1)y_j, \quad \lambda_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

У рівностях (1), (2) і в подальшому вживаємо такі позначення: y_j – лагранжеві координати, які в початковому (зумовленому початковими напруженнями) стані збігаються з декартовими; S_{ij}^0 – компоненти симетричного тензора напружень, віднесені до одиниці площі тіла в недеформованому стані; λ_j – зумовлені початковими напруженнями S_{ij}^0 коефіцієнти подовження (або скорочення) уздовж координатних осей; Q'_{ij} – компоненти несиметричного тензора напружень, віднесені до одиниці площі тіла в початковому стані; u_j – компоненти відповідного їм вектора переміщень.

На берегах тріщини задано додаткові (стосовно до початкових напружень) поля нормальних розтягувальних і зсувних зусиль, а границя півпростору вільна від напружень:

$$\begin{aligned} Q'_{33} &= -\sigma(r, \theta), & Q'_{3r} &= -\tau_r(r, \theta), & Q'_{3\theta} &= -\tau_\theta(r, \theta), & 0 \leq r < a, & y_3 = \pm 0, \\ Q'_{33} &= 0, & Q'_{3r} &= 0, & Q'_{3\theta} &= 0, & 0 \leq r < \infty, & y_3 = -h, \end{aligned} \quad (3)$$

(тут і в подальшому $0 \leq \theta < 2\pi$).

При прикладенні до тіла додаткових (стосовно до початкового напружено-деформованого стану) зусиль збурення напружено-деформованого стану, викликані їх дією, вважаються значно меншими, ніж відповідні величини початкового напружено-деформованого стану, що дозволяє застосовувати для розв'язання поставлених задач співвідношення лінеаризованої теорії пружності [9, 19].

Зазначимо, що у випадку задачі про стиск напівобмеженого тіла уздовж приповерхневої кругової тріщини (рис. 2) граничні умови на берегах тріщини (перший рядок в (3)) мають вигляд

$$Q'_{33} = 0, \quad Q'_{3r} = 0, \quad Q'_{3\theta} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad y_3 = \pm 0. \quad (4)$$

Півпростір $y_3 \geq -h$ умовно розіб'ємо на дві підобласті: «1» – півпростір $y_3 \geq 0$ та «2» – шар $-h \leq y_3 \leq 0$ та будемо позначати в подальшому величини, що відносяться до відповідних областей, верхніми індексами в дужках. На границі цих підобластей поза тріщиною виконуються умови неперервності компонентів тензора напружень і вектора переміщень:

$$\begin{aligned} u_3^{(1)} &= u_3^{(2)}, & u_r^{(1)} &= u_r^{(2)}, & u_\theta^{(1)} &= u_\theta^{(2)}, & a < r < \infty, & y_3 = 0, \\ Q'_{33}^{(1)} &= Q'_{33}^{(2)}, & Q'_{3r}^{(1)} &= Q'_{3r}^{(2)}, & Q'_{3\theta}^{(1)} &= Q'_{3\theta}^{(2)}, & a < r < \infty, & y_3 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Враховуючи, що умови (3) записано для обох берегів тріщини, які належать до різних підобластей, задачу можна переформулювати в еквівалентній формі:

$$Q'_{33}^{(2)} = -\sigma(r, \theta), \quad Q'_{3r}^{(2)} = -\tau_r(r, \theta), \quad Q'_{3\theta}^{(2)} = -\tau_\theta(r, \theta), \quad 0 < r < a, \quad y_3 = 0, \quad (6)$$

$$Q'_{33}^{(2)} = 0, \quad Q'_{3r}^{(2)} = 0, \quad Q'_{3\theta}^{(2)} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad y_3 = -h, \quad (7)$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}, \quad a < r < \infty, \quad y_3 = 0, \quad (8)$$

$$Q'_{33}^{(1)} = Q'_{33}^{(2)}, \quad Q'_{3r}^{(1)} = Q'_{3r}^{(2)}, \quad Q'_{3\theta}^{(1)} = Q'_{3\theta}^{(2)}, \quad 0 < r < \infty, \quad y_3 = 0. \quad (9)$$

Далі будемо використовувати подання загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції, які у випадку однакових коренів характеристичного рівняння мають вигляд [10, 12]

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{m_1 - m_2 + 1}{\sqrt{n_1}} F - \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \Phi - \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}, \\ u_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - z_1 \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta}, & u_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - z_1 \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}, \\ Q'_{33} &= C_{44} \left[(d_1 \ell_1 - d_2 \ell_2) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1 \ell_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - d_1 \ell_1 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right], \\ Q'_{3r} &= C_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial}{\partial r} [(d_1 - d_2)F - d_1 \Phi] - \frac{d_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z_1} - \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \theta \partial z_3} \right\}, \\ Q'_{3\theta} &= C_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(d_1 - d_2)F - d_1 \Phi] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_1}{\sqrt{n_1}} \frac{1}{r} z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial z_1} + \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial z_3} \right\}, \quad \Phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\varphi, F, \Phi, \varphi_3$ – гармонічні функції, а параметри d_i, ℓ_i, m_i, n_i залежать від механічних характеристик матеріалу та від початкових напружень. У випадку неоднакових коренів характеристичного рівняння ($n_1 \neq n_2$) загальні розв'язки мають аналогічний характер [10, 12].

З використанням цих подань формулюємо задачу в термінах потенціальних функцій $\varphi^{(i)}, F^{(i)}, \Phi^{(i)}, \varphi_3^{(i)}$, $i = 1, 2$ (верхні індекси відповідають підобласті, яка розглядається). Надалі детальні викладки будемо наводити для випадку однакових коренів характеристичного рівняння, викладки для випадку неоднакових коренів здійснюються аналогічно.

3. Зведення задачі до систем парних інтегральних рівнянь. Подамо інтенсивності зовнішніх навантажень на берегах тріщини (праві частини в першій з умов (3)) у вигляді рядів Фур'є за кутовою координатою θ , припускаючи, що $\sigma(r, \theta)$ та $\tau_r(r, \theta)$ є парними функціями, а $\tau_\theta(r, \theta)$ – непарна функція за θ :

$$\begin{aligned} \sigma(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}(r) \cos n\theta, & \tau_r(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tau_r^{(n)}(r) \cos n\theta, \\ \tau_\theta(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_\theta^{(n)}(r) \sin n\theta, \end{aligned} \quad (11)$$

де коефіцієнти $\sigma^{(n)}(r)$, $\tau_r^{(n)}(r)$, $\tau_\theta^{(n)}(r)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \theta) d\theta, & \tau_r^{(0)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau_r(r, \theta) d\theta, \\ \sigma^{(n)}(r) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \theta) \cos n\theta d\theta, & \tau_r^{(n)}(r) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tau_r(r, \theta) \cos n\theta d\theta, \\ \tau_\theta^{(n)}(r) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tau_\theta(r, \theta) \sin n\theta d\theta, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Зазначимо при цьому, що якщо, навпаки, інтенсивності навантажень $\sigma(r, \theta)$ і $\tau_r(r, \theta)$ є непарними функціями за θ , а $\tau_\theta(r, \theta)$ – парна функція за θ , то їхніх поданнях у вигляді рядів Фур'є у формулах (11) косинуси слід замінити на синуси і, навпаки. Всі подальші викладки у цьому випадку будуть повністю аналогічними і розв'язки справедливими при заміні в усіх поданнях потенціальних гармонічних функцій косинусів синусами і, навпаки. У загальному випадку слід застосовувати суперпозицію цих розв'язків.

Гармонічні потенціальні функції $\varphi, F, \Phi, \varphi_3$ у кожній з підобластей «1» і «2» також подамо у вигляді рядів Фур'є за кутовою координатою θ з коефіцієнтами у вигляді інтегральних розвинень Ганкеля за радіальною координатою r порядку, що відповідає порядку гармоніки за координатою θ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(r, \theta, z_1) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^\infty B_n(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ F^{(1)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^\infty A_n(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_n(\lambda r) d\lambda, \\ \Phi^{(1)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^\infty B_n(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_n(\lambda r) d\lambda, \\ \varphi_3^{(1)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_0^\infty C_n(\lambda) e^{-\lambda z_3} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \varphi^{(2)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^\infty [B_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (h_1 + z_1) + \\ &\quad + B_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (h_1 + z_1)] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{(2)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} [A_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 + z_1) + \\
&\quad + A_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 + z_1)] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1}, \\
\Phi^{(2)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} [B_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 + z_1) + \\
&\quad + B_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 + z_1)] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1}, \\
\varphi_3^{(2)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_0^{\infty} [C_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_3 + z_3) + \\
&\quad + C_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_3 + z_3)] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_3}, \tag{13}
\end{aligned}$$

де $h_j = n_j^{-1/2} h$, $j = 1, 2, 3$, а $A_n, B_n, C_n, A_n^{(i)}, B_n^{(i)}, C_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, – нові довільні невідомі функції. Зазначимо, що подання потенціальних функцій у вигляді (13) забезпечує затухання напружень і переміщень при віддаленні тріщини від границі півпростору.

Далі підставимо подання гармонічних потенціальних функцій (13) і зовнішніх навантажень на берегах тріщини (11) у граничні умови (6)–(9). При цьому з умов (7) і (9), які задані на всій площині $y_3 = \operatorname{const}$, отримуємо шість співвідношень, які пов'язують дев'ять невідомих функцій:

$$\begin{aligned}
B_n^{(1)}(\lambda) &= \mu_1 A_n^{(2)}(\lambda) + \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) A_n^{(1)}(\lambda), \\
B_n^{(2)}(\lambda) &= \mu_1 A_n^{(1)}(\lambda) + \left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1}\right) A_n^{(2)}(\lambda), \\
C_n^{(2)}(\lambda) &= 0, \quad C_n(\lambda) = -C_n^{(1)}(\lambda), \\
A_n(\lambda) &= \left[\frac{\mu_1}{k} (1 + \operatorname{cth} \mu_1) - 1\right] A_n^{(1)}(\lambda) + \left[\frac{\mu_1}{k} (1 + \operatorname{cth} \mu_1) + 1\right] A_n^{(2)}(\lambda), \\
B_n(\lambda) &= \left[\left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1}\right) \frac{\mu_1}{k} (1 + \operatorname{cth} \mu_1) - \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) - \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1\right] A_n^{(1)}(\lambda) + \\
&\quad + \left[\left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1}\right) \frac{\mu_1}{k} (1 + \operatorname{cth} \mu_1) + \left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1}\right) - \mu_1\right] A_n^{(2)}(\lambda), \tag{14}
\end{aligned}$$

де $\mu_1 = \lambda h_1$; $k = \frac{(\ell_1 - \ell_2) d_2}{d_1 \ell_1}$.

Використавши співвідношення

$$\frac{2n}{\lambda r} J_n(\lambda r) = J_{n-1}(\lambda r) + J_{n+1}(\lambda r), \quad 2 \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial(\lambda r)} = J_{n-1}(\lambda r) - J_{n+1}(\lambda r), \tag{15}$$

з (6) і (8) отримуємо окремо для кожної n -ї гармоніки за кутовою координатою θ систему з шести парних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \{n_1^{-1/2} d_1 [\mu_1 A_n^{(1)} + (k + \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1) A_n^{(2)}] - n_3^{-1/2} C_n^{(1)}\} J_{n+1}(\lambda r) \lambda d\lambda = \\
&\quad = -[\tau_r^{(n)}(r) + \tau_\theta^{(n)}(r)] / C_{44}, \quad r < a, \\
&\int_0^{\infty} \{n_1^{-1/2} d_1 [\mu_1 A_n^{(1)} + (k + \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1) A_n^{(2)}] + n_3^{-1/2} C_n^{(1)}\} J_{n-1}(\lambda r) \lambda d\lambda = \\
&\quad = [\tau_r^{(n)}(r) - \tau_\theta^{(n)}(r)] / C_{44}, \quad r < a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} [(k - \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1) A_n^{(1)} - \mu_1 A_n^{(2)}] J_n(\lambda r) \lambda d\lambda = -\frac{\sigma^{(n)}(r)}{C_{44} d_1 \ell_1}, \quad r < a, \\
& \int_0^{\infty} X_1 J_{n+1}(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \quad \int_0^{\infty} X_2 J_{n-1}(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \\
& \int_0^{\infty} X_3 J_n(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a,
\end{aligned} \tag{16}$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1}\right) (1 + \operatorname{cth} \mu_1) \left[\frac{\mu_1}{k} A_n^{(1)} + \left(1 + \frac{\mu_1}{k}\right) A_n^{(2)} \right] - C_n^{(1)} (1 + \operatorname{cth} \mu_3), \\
X_2 &= \left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1}\right) (1 + \operatorname{cth} \mu_1) \left[\frac{\mu_1}{k} A_n^{(1)} + \left(1 + \frac{\mu_1}{k}\right) A_n^{(2)} \right] + C_n^{(1)} (1 + \operatorname{cth} \mu_3), \\
X_3 &= 2 \left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1}\right) \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{k}\right) A_n^{(1)} - \frac{\mu_1}{k} A_n^{(2)} \right] (1 + \operatorname{cth} \mu_1).
\end{aligned} \tag{17}$$

Надалі будемо вважати, що $n \geq 1$ в (11) і (13). (Осесиметричний випадок $n = 0$ є особливим, оскільки для нього кількість рівнянь і невідомих функцій скорочується; він детально розглядався раніше в [3, 5, 6].)

4. Отримання розв'язувальної системи інтегральних рівнянь Фредгольма. Систему парних інтегральних рівнянь (16) будемо розв'язувати методом підстановки [16], модифікованим на випадок, коли парні інтегральні рівняння містять функції Бесселя різного порядку. Відповідно до цього виберемо розв'язок системи парних інтегральних рівнянь (16) у вигляді

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{3/2} \int_0^a t^{1/2} \varphi(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt \equiv \\
&\equiv -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \int_0^a \tilde{\varphi}(t) \left[a^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda a) - t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t) \right] dt, \\
X_2 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \int_0^a t^{1/2} \psi(t) J_{n-1/2}(\lambda t) dt, \\
X_3 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \int_0^a t^{1/2} \omega(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt \equiv \\
&\equiv -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{-1/2} \int_0^a \tilde{\omega}(t) \left[a^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda a) - t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t) \right] dt, \tag{18}
\end{aligned}$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ – невідомі функції, неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[0, a]$, а також введено позначення

$$\tilde{\varphi}(t) \equiv \frac{d}{dt} [t^n \varphi(t)], \quad \tilde{\omega}(t) \equiv \frac{d}{dt} [t^n \omega(t)]. \tag{19}$$

Якщо взяти до уваги частковий випадок розривного інтеграла Вебера – Шафхейтліна [16]

$$\int_0^{\infty} \lambda^{1/2} J_{\nu+1/2}(\lambda \alpha) J(\lambda \beta) d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 \leq \alpha < \beta, \\ \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{\pi} \alpha^{\nu+1/2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, & 0 < \beta < \alpha, \end{cases} \tag{20}$$

та формули диференціювання функцій Бесселя

$$t^{-\nu} \frac{d}{dt} [t^{\nu} J_{\nu}[\xi t]] = \xi J_{\nu-1}(\xi t), \quad t^{\nu} \frac{d}{dt} [t^{-\nu} J_{\nu}[\xi t]] = -\xi J_{\nu+1}(\xi t), \tag{21}$$

можна показати, що три останні рівняння в (16) задовольняються тотожно.

Далі перетворимо перші три інтегральні рівняння в (16) спочатку до інтегральних рівнянь Шльомільха, з розв'язків яких отримаємо інтегральні рівняння Фредгольма другого роду. Зазначену процедуру більш детально продемонстру-

емо на прикладі першого з рівнянь (16), яке з урахуванням (18) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(sk + q)r^n \frac{d}{dr} r^{-2n} \int_0^r \tilde{\varphi}(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \\
& + \frac{1}{2}(sk - q)r^n \frac{d}{dr} r^{-2n} \int_0^r t^n \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\
& = - \int_0^\infty L(\lambda) X_1 J_{n+1}(\lambda r) d\lambda - \int_0^\infty M(\lambda) X_2 J_{n+1}(\lambda r) d\lambda - \\
& - \frac{s}{k} \int_0^\infty \mu_1^2 e^{-2\mu_1} X_3 J_{n+1}(\lambda r) \lambda d\lambda + \frac{2}{C_{44}} [\tau_r^{(n)}(r) + \tau_\theta^{(n)}(r)], \quad (22)
\end{aligned}$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= se^{-2\mu_1} \left(\frac{k}{2} + \frac{\mu_1^2}{k} - \mu_1 \right) + \frac{q}{2} e^{-2\mu_3}, \\
M(\lambda) &= se^{-2\mu_1} \left(\frac{k}{2} + \frac{\mu_1^2}{k} - \mu_1 \right) - \frac{q}{2} e^{-2\mu_3}, \\
s &\equiv n_1^{-1/2} d_1 \left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1} \right)^{-1}, \quad q \equiv n_3^{-1/2}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Помноживши обидві частини рівняння (22) на r^{-n} , проінтегрувавши їх за r з границями інтегрування від 0 до r , а потім знову помноживши на r^n , отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(sk + q)r^{-n} \int_0^r \tilde{\varphi}(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{1}{2}(sk - q)r^{-n} \int_0^r t^n \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\
& = -r^n \int_0^r \rho^{-n} \left[\int_0^\infty L(\lambda) X_1 J_{n+1}(\lambda \rho) \lambda d\lambda \right] d\rho - \\
& - r^n \int_0^r \rho^{-n} \left[\int_0^\infty M(\lambda) X_2 J_{n+1}(\lambda \rho) \lambda d\lambda \right] d\rho - \\
& - r^n \int_0^r \rho^{-n} \frac{s}{k} \left[\int_0^\infty \mu_1^2 e^{-2\mu_1} X_3 J_{n+1}(\lambda \rho) d\lambda \right] d\rho + \\
& + \frac{2}{C_{44}} r^n \int_0^r \rho^{-n} [\tau_r^{(n)}(\rho) + \tau_\theta^{(n)}(\rho)] d\rho. \quad (24)
\end{aligned}$$

Далі, зробивши в останньому рівнянні заміну змінних $t = r \sin \theta$, використавши співвідношення (21) і формулу

$$\int_0^r \frac{d}{d\rho} [\rho^{-n} J_n(\lambda \rho)] d\rho = r^{-n} \lambda J_n(\lambda r) - \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^n, \quad (25)$$

після домноження обох його частин на r^n отримаємо рівняння Шльомільха

$$\frac{1}{2}(sk + q) \int_0^{\pi/2} \tilde{\varphi}(r \sin \theta) d\theta + \frac{1}{2}(sk - q) \int_0^{\pi/2} (r \sin \theta)^n \psi(r \sin \theta) d\theta = N(r), \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned}
N(r) &\equiv r^n \int_0^\infty L(\lambda) X_1 \left[J_n(\lambda r) - \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda r}{2} \right)^n \right] d\lambda + \\
& + r^n \int_0^\infty M(\lambda) X_2 \left[J_n(\lambda r) - \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda r}{2} \right)^n \right] d\lambda +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r^n \frac{s}{k} \int_0^\infty \mu_1^2 e^{-2\mu_1} X_3 \left[J_n(\lambda r) - \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda r}{2} \right)^n \right] d\lambda + \\
& + \frac{2}{C_{44}} r^{2n} \int_0^r \rho^{-n} [\tau_r^{(n)}(\rho) + \tau_\theta^{(n)}(\rho)] d\rho.
\end{aligned}$$

Відомо [16], що рівняння Шльоміляха

$$\int_0^{\pi/2} f(r \sin \theta) d\theta = N(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (27)$$

має розв'язок

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left[N(0) + x \int_0^{\pi/2} N'(x \sin \theta) d\theta \right], \quad 0 \leq x \leq a. \quad (28)$$

У розглядуваному випадку маємо

$$f(x) = \frac{1}{2} (sk + q) \tilde{\varphi}(x) + \frac{1}{2} (sk - q) x^n \psi(x), \quad N(0) = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
N'(r) = & \int_0^\infty L(\lambda) X_1 \left[r^n \lambda J_{n-1}(\lambda r) - \frac{2n}{n!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n r^{2n-1} \right] d\lambda + \\
& + \int_0^\infty M(\lambda) X_2 \left[r^n \lambda J_{n-1}(\lambda r) - \frac{2n}{n!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n r^{2n-1} \right] d\lambda + \\
& + \frac{s}{k} \int_0^\infty \mu_1^2 e^{-2\mu_1} X_3 \left[r^n \lambda J_{n-1}(\lambda r) - \frac{2n}{n!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n r^{2n-1} \right] d\lambda + \\
& + \frac{2}{C_{44}} \frac{d}{dr} \left\{ r^{2n} \int_0^r \rho^{-n} [\tau_r^{(n)}(\rho) + \tau_\theta^{(n)}(\rho)] d\rho \right\}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Далі, використавши інтеграл Соніна [2]

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta J_{n-1}(\lambda x \sin \theta) d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} J_{n-1/2}(\lambda x) \quad (31)$$

та співвідношення [15]

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(n-1)!}{\Gamma(n+1/2)}, \quad (32)$$

із (26), (28) отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (sk + q) \tilde{f}_1(x) + \frac{1}{2} (sk - q) \tilde{f}_2(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_1(t) \tilde{\mathcal{K}}_{11}(x, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_2(t) \tilde{\mathcal{K}}_{12}(x, t) dt + \\
+ \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_3(t) \tilde{\mathcal{K}}_{13}(x, t) dt = \frac{4x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tilde{v}_1'(x \sin \theta) d\theta, \quad (33)
\end{aligned}$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1(r) = \frac{1}{C_{44}} r^{2n} \int_0^r \rho^{-n} [\tau_r^{(n)}(\rho) + \tau_\theta^{(n)}(\rho)] d\rho, \\
\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{f}_1(x), \quad x^n \psi(x) \equiv \tilde{f}_2(x), \quad \tilde{\omega}(x) \equiv \tilde{f}_3(x). \quad (34)
\end{aligned}$$

Аналогічно з другого і третього рівнянь в (16) отримаємо ще два інтегральні рівняння Фредгольма другого роду.

Проведемо обезрозмірювання отриманої вище розв'язувальної системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та ядер, вводячи нові безрозмірні змінні $\xi = a^{-1}x$, $\eta = a^{-1}t$, $\beta = a^{-1}h$ та функції

$$\begin{aligned}
f_1(\xi) \equiv a^{-2} \tilde{f}_1(a\xi) = a^{-n-1} \frac{d}{dx} [x^n \varphi(x)], \quad f_2(\xi) \equiv a^{-1} \tilde{f}_2(a\xi) = a^{-n-1} x^n \psi(x), \\
f_3(\xi) \equiv a^{-1} \tilde{f}_3(a\xi) = a^{-n} \frac{d}{dx} [x^n \omega(x)]. \quad (35)
\end{aligned}$$

Тоді для випадку однакових коренів характеристичного рівняння отримуємо таку розв'язувальну систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду в безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(sk + q)f_1(\xi) + \frac{1}{2}(sk - q)f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) \mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) d\eta + \\
& \quad + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) \mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) \mathcal{K}_{13}(\xi, \eta) d\eta = \\
& \quad = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} v'_1(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \\
& \frac{1}{2}(sk - q)f_1(\xi) + \frac{1}{2}(sk + q)f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) \mathcal{K}_{21}(\xi, \eta) d\eta + \\
& \quad + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) \mathcal{K}_{22}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) \mathcal{K}_{23}(\xi, \eta) d\eta = \\
& \quad = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} v'_2(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \\
& \frac{s}{2} k f_3(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) \mathcal{K}_{31}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) \mathcal{K}_{32}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) \mathcal{K}_{33}(\xi, \eta) d\eta = \\
& \quad = -\frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \quad (36)
\end{aligned}$$

де функції, похідні від яких містяться у правих частинах вищенаведених рівнянь, мають вигляд

$$\begin{aligned}
v_1(\xi) &= \frac{1}{C_{44}} \xi^{2n} \int_0^{\xi} \rho^{-n} [\tau_r^{(n)}(a\rho) + \tau_\theta^{(n)}(a\rho)] d\rho, \\
v_2(\xi) &\equiv \frac{1}{C_{44}} \int_0^{\xi} \rho^n [\tau_r^{(n)}(a\rho) - \tau_\theta^{(n)}(a\rho)] d\rho, \quad u(\xi) \equiv \frac{n_1^{-1/2}}{C_{44} \ell_1} \xi^n \sigma^{(n)}(a\xi). \quad (37)
\end{aligned}$$

Ядра інтегральних рівнянь (36) мають вигляд

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) &= sknb_{n1} \xi^{n-1} \eta^{-n-1} S_n(z_{11}) + \\
& \quad + \frac{s}{2k} n b_{n1}^3 \xi^{n-2} \frac{\eta^{-n-2}}{z_{11}^2 - 1} \left\{ \left[\left(\frac{8}{z_{11}^2 - 1} + n(n-1) + 6 \right) \frac{b_{n1}^2}{\xi \eta} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 6z_{11} \right] S_n(z_{11}) + (n-1) \left[3(z_{11}^2 - 1) - \frac{4b_{n1}^2 z_{11}}{\xi \eta} \right] P_n(z_{11}) \right\} - \\
& \quad - snb_{n1} \xi^{n-2} \eta^{-n-2} \left[\left(\eta \xi - \frac{2b_{n1}^2 z_{11}}{z_{11}^2 - 1} \right) S_n(z_{11}) + b_{n1}^2 (n-1) P_n(z_{11}) \right] - \\
& \quad - qnb_{n3} \xi^{n-1} \eta^{-n-1} S_n(z_{13}) + \sqrt{\pi} \xi^{2n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left\{ skR_n(b_{n1}, \eta) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{s}{k} B_n(b_{n1}, \eta) (n+1) [2(n+2)B_n(b_{n1}, \eta) - 3] R_n(b_{n1}, \eta) + \right. \\
& \quad \left. + s[(1 - 2(n+1)B_n(b_{n1}, \eta))R_n(b_{n1}, \eta) - qR_n(b_{n3}, \eta)] \right\} \text{ і т. д.},
\end{aligned}$$

де

$$b_{ni} = 2h_i a^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad z_{11} = (b_{n1}^2 + \eta^2 + \xi^2)/2\xi\eta, \quad z_{21} = (b_{n1}^2 + 1 + \xi^2)/2\xi,$$

$$R_n(b, t) = \frac{1}{2} \frac{b}{(b^2 + t^2)^{n+1}},$$

$$S_n = (z^2 - 1)^{-1} [Q_n(z) - zQ_{n-1}(z)]/4, \quad P_n(z) = (z^2 - 1)^{-1} Q_{n-1}(z)/4. \quad (38)$$

Тут $Q_n(z)$ – функції Лежандра другого роду [15].

Провівши аналогічні викладки для випадку неоднакових коренів характеристичного рівняння, отримуємо таку розв'язувальну систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду у безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} - q \right) f_1(\xi) + \frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} + q \right) f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) \mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) d\eta + \\ & \quad + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) \mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) \mathcal{K}_{13}(\xi, \eta) d\eta = \\ & \quad = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} v'_1(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \\ & \frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} + q \right) f_1(\xi) + \frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} - q \right) f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) \mathcal{K}_{21}(\xi, \eta) d\eta + \\ & \quad + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) \mathcal{K}_{22}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) \mathcal{K}_{23}(\xi, \eta) d\eta = \\ & \quad = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} v'_2(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \\ & \frac{s}{2} \frac{k}{k_2} f_3(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) \mathcal{K}_{31}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) \mathcal{K}_{32}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) \mathcal{K}_{33}(\xi, \eta) d\eta = \\ & \quad = -\frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \end{aligned} \quad (39)$$

де

$$\begin{aligned} s &= n_2^{-1/2} d_2 \left(1 - \frac{d_2 \ell_2}{d_1 \ell_1} \right)^{-1}, \quad q = n_3^{-1/2}, \\ k_1 &= \ell_1 n_2^{-1/2}, \quad k_2 = \ell_2 n_1^{-1/2}, \quad k = k_1 - k_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Функції, похідні від яких містяться у правих частинах вищенаведених рівнянь, мають вигляд

$$\begin{aligned} v_1(\xi) &= \frac{1}{C_{44}} \xi^{2n} \int_0^\xi \rho^{-n} [\tau_r^{(n)}(a\rho) - \tau_\theta^{(n)}(a\rho)] d\rho, \\ v_2(\xi) &= \frac{1}{C_{44}} \int_0^\xi \rho^n [\tau_r^{(n)}(a\rho) - \tau_\theta^{(n)}(a\rho)] d\rho, \quad u(\xi) = \frac{n_2^{-1/2}}{C_{44} \ell_2} \xi^n \sigma^{(n)}(a\xi). \end{aligned} \quad (41)$$

Ядра, що входять в систему інтегральних рівнянь (39), мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) &= \xi^{n-1} n \left\{ \frac{s}{k} \left[\frac{k_2}{k_1} (k_1 + k_2) b_{n1} (\eta^{-n-1} S_n(z_{11}) - S_n(z_{21})) + \right. \right. \\ & \quad + (k_1 + k_2) b_{n2} (\eta^{-n-1} S_n(z_{12}) - S_n(z_{22})) - 2k_2 (b_{n1} + b_{n2}) \times \\ & \quad \left. \left. \times (\eta^{-n-1} S_n(z_1) - S_n(z_2)) \right] - q b_{n3} (\eta^{-n-1} S_n(z_{13}) - S_n(z_{23})) \right\} + \\ & \quad + \xi^{2n} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{s}{k} \left[\frac{k_2}{k_1} (k_1 + k_2) (R_n(b_{n2}, \eta) - R_n(b_{n2}, 1)) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-4k_2[R_n((b_{n1} + b_{n2})/2, \eta) - R_n((b_{n1} + b_{n2})/2, 1)] - \\ - q(R_n(b_{n3}, \eta) - R_n(b_{n3}, 1)) \Big\} \text{ і т. д.,}$$

де $S_n(z)$, $R_n(x, y)$, b_{ni} , z_{ij} , z_i визначаються з (38).

5. Асимптотичний розподіл напружень в околі контуру тріщини та вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень. З розв'язку систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (36), (39) з урахуванням виразів (35), (19), (18), (17), (14), (13) і подань розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні функції (10) можна отримати розподіл напружень і переміщень у матеріалі. Розглянемо значення компонент тензора напружень Q'_{33} , Q'_{3r} , $Q'_{3\theta}$ в області $y_3 = 0$, $r > a$ (тобто в площині розташування тріщини, в області «2»). Для випадку однакових коренів характеристичного рівняння з (10) маємо

$$Q'_{33}{}^{(2)}(r, \theta, 0) = C_{44} \left[(d_1 \ell_1 - d_2 \ell_2) \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} - d_1 \ell_1 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - d_1 \ell_1 z_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_1^2} \right]_{z_1=0} = \\ = C_{44} \frac{\ell_1}{n_1^{-1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \left\{ \frac{1}{4} s k I - \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{s}{2k} \mu_1^2 e^{-2\mu_1} X_1 + \frac{s}{2k} \mu_1^2 e^{-2\mu_1} X_2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} s e^{-2\mu_1} \left(\frac{k}{2} + \frac{\mu_1}{k} + \mu_1 \right) X_3 \right) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda \right] \right\}, \quad (42)$$

$$\text{де } I = \int_0^{\infty} X_3 \lambda J_n(\lambda r) d\lambda.$$

Як і в класичній механіці руйнування матеріалів без початкових напружень [24], коефіцієнти інтенсивності напружень в околі контуру тріщини визначаємо як коефіцієнти при сингулярностях у розподілі відповідних компонентів тензора напружень при наближенні до контуру тріщини, тобто

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{33}(r, 0), \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{3r}(r, 0), \\ K_{III} = \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{3\theta}(r, 0). \quad (43)$$

З аналізу виразу (42) для компоненти тензора напружень Q'_{33} випливає, що сингулярність при $r \rightarrow a$ містить лише перший доданок в фігурних дужках в (42), оскільки у виразах, що містяться у квадратних дужках, як випливає з відповідних формул для інтегралів від функцій Бесселя [2], зазначені сингулярності відсутні. Проаналізуємо більш детально вираз для інтеграла I . З урахуванням формул (18), (19), застосовуючи інтегрування частинами та беручи до уваги значення розривного інтеграла (20), можна показати, що

$$I = \int_0^{\infty} X_3 \lambda J_n(\lambda r) d\lambda = \int_0^{\infty} \left(\frac{\pi \lambda}{2} \right)^{1/2} \left[\int_0^a t^{1/2} \omega(t) \lambda J_{n+1/2}(\lambda t) dt \right] J_n(\lambda r) d\lambda = \\ = - \frac{a^n \omega(a)}{r^n \sqrt{r^2 - a^2}} + \int_0^a \frac{\tilde{\omega}(t) dt}{r^n \sqrt{r^2 - t^2}}. \quad (44)$$

При цьому вираз $\int_0^a \frac{\tilde{\omega}(t) dt}{r^n \sqrt{r^2 - t^2}}$, як випливає з формули (11) з довідника [15, с. 297], не має особливостей при $r \rightarrow a$. Тоді з (42), (43) і з урахуванням співвідношення $\omega(t) = t^{-n} \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt$ знаходимо, що

$$Q_{33}^{(2)}(r, \theta, 0) = -\frac{1}{4} C_{44} \ell_1 \sqrt{n_1} s k \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \frac{1}{r^n \sqrt{r^2 - a^2}} \int_0^a \tilde{\omega}(t) dt + O(1), \quad (45)$$

де символом $O(1)$ позначено регулярні складові, що не мають особливостей при $r \rightarrow a$.

Аналогічно для інших компонент тензора напружень у площині розташування тріщини маємо такі вирази:

$$Q_{3r}^{(2)}(r, \theta, 0) = \frac{1}{4} C_{44} s k \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \frac{1}{r^{n-1} \sqrt{r^2 - a^2}} \left[\frac{\tilde{\varphi}(a)}{a} + a^{n-1} \psi(a) \right],$$

$$Q_{3\theta}^{(r)}(r, \theta, 0) = \frac{1}{2} C_{44} q \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \frac{1}{r^{n-1} \sqrt{r^2 - a^2}} \left[\frac{\tilde{\varphi}(a)}{a} - a^{n-1} \psi(a) \right]. \quad (46)$$

Підставляючи (45) і (46) у вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень (43) та враховуючи (35), знаходимо

$$K_I = -\frac{1}{4} C_{44} \ell_1 \sqrt{n_1} s k \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^1 f_3(\eta) d\eta,$$

$$K_{II} = \frac{1}{4} C_{44} s k \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta [f_1(1) + f_2(1)],$$

$$K_{III} = \frac{1}{4} C_{44} q \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta [f_1(1) - f_2(1)], \quad (47)$$

де функції $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$ визначаються з розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (36).

Аналогічно для випадку неоднакових коренів характеристичного рівняння отримуємо такі вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень:

$$K_I = -\frac{1}{4} C_{44} \ell_1 \sqrt{n_1} \sqrt{n_2} s k \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^1 f_3(\eta) d\eta,$$

$$K_{II} = \frac{1}{4} C_{44} s \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta [f_1(1) + f_2(1)],$$

$$K_{III} = \frac{1}{4} C_{44} q \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta [f_1(1) - f_2(1)], \quad (48)$$

де функції $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$ визначаються з розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (39).

Як видно з виразів (47) і (48), взаємний вплив приповерхневої тріщини та вільної поверхні матеріалу призводить до якісних змін у асимптотичному розподілі напружень біля контуру тріщини, а саме – до ненульових значень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} та K_{III} у випадку завантаження берегів тріщини лише нормальними зусиллями (коли $\sigma(r, \theta) \neq 0$, $\tau_r(r, \theta) = 0$, $\tau_\theta(r, \theta) = 0$) (для ізольованої тріщини нормального відриву в необмеженому тілі мали [24] $K_I \neq 0$, $K_{II} = 0$, $K_{III} = 0$) і ненульових значень коефіцієнта інтенсивності напружень K_I , коли на берегах тріщини діють лише дотичні зсувні зусилля ($\sigma(r, \theta) = 0$, $\tau_r(r, \theta) \neq 0$, $\tau_\theta(r, \theta) \neq 0$) (для такої силової схеми для випадку ізольованої тріщини в необмеженому тілі мали [24] $K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$, $K_{III} \neq 0$).

Крім того, з виразів (47) і (48) бачимо, що всі три коефіцієнти інтенсивності напружень залежать від початкових напружень, оскільки параметри C_{44} , s , q , k , k_i , ℓ_i , n_i , $i = 1, 2$, а також функції f_1 , f_2 , f_3 залежать від параметра початкового подовження (або скорочення) λ_1 , зумовленого дією початкових напружень $S_{11}^0 = S_{22}^0$.

Розглянемо граничний випадок розташування тріщини, коли відстань h між нею та вільною поверхнею півпростору прямує до нескінченності ($\beta \rightarrow \infty$). З аналізу виразів для ядер інтегральних рівнянь (36), (39) випливає, що

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{K}_{ij}(\xi, \eta) = 0. \quad (49)$$

Обмежимося випадком, коли тріщина завантажена симетрично відносно площини її розташування нормальними зусиллями інтенсивності $\sigma(r, \theta)$ ($\tau_r(r, \theta) = 0, \tau_\theta(r, \theta) = 0$). Тоді з інтегральних рівнянь Фредгольма (36) отримуємо

$$f_1^\infty(\xi) = f_2^\infty(\xi) = 0, \quad \frac{1}{2} sk f_3^\infty(\xi) = -\frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad (50)$$

де $f_j^\infty(\xi) \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} f_j(\xi)$. З (50), враховуючи (37) і здійснюючи заміну змінних $\eta = \xi \sin \theta$, для випадку однакових коренів отримуємо

$$\begin{aligned} f_3^\infty(\xi) &= -\frac{8}{\pi} \frac{1}{sk} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta = -\frac{8}{\pi} \frac{n_1^{-1/2}}{C_{44} \ell_1} \xi \int_0^\xi \frac{d}{d\eta} [\eta^n a_n(a\eta)] \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} = \\ &= -\frac{8}{\pi} \frac{1}{sk} \frac{n_1^{-1/2}}{C_{44} \ell_1} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta^{n+1} a_n(a\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta. \end{aligned} \quad (51)$$

Тоді з (47) маємо такі вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень:

$$\begin{aligned} K_I^\infty &\equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} K_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^1 \frac{\eta^{n+1} \sigma(a\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{a^n} \int_0^a \frac{t^{n+1} \sigma(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt, \\ K_{II}^\infty &= 0, \quad K_{III}^\infty = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Як бачимо, у цьому випадку коефіцієнти інтенсивності напружень не залежать від початкових напружень. Зокрема, коли на берегах тріщини діє нормальне неосесиметричне навантаження

$$\sigma(r, \theta) = \sigma_1 \cos \theta, \quad (53)$$

отримуємо такі значення коефіцієнтів інтенсивності напружень:

$$K_I^\infty = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a} \sigma_1 \cos \theta, \quad K_{II}^\infty = 0, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (54)$$

У випадку, коли на берегах тріщини діє нормальне навантаження

$$\sigma(r, \theta) = \sigma_1 \frac{r}{a} \cos \theta, \quad (55)$$

коефіцієнти інтенсивності напружень набувають вигляду

$$K_I^\infty = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sigma_1 \cos \theta, \quad K_{II}^\infty = 0, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (56)$$

У випадку неоднакових коренів характеристичного рівняння значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у зазначеному вище граничному випадку розташування тріщини збігаються з (52).

Слід зазначити, що отримані з розв'язку задачі про попередньо напружений півпростір з приповерхневою тріщиною значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у граничному випадку розташування тріщини, коли відстань між нею і вільною поверхнею півпростору прямує до нескінченності, які подані формулами (52), (54) і (56), повністю збігаються (з урахуванням позначень) із значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень, які були отримані в неосесиметричній задачі про необмежене тіло без початкових напружень, ослаблене ізольованою дископодібною тріщиною [24].

6. Закономірності впливу початкових напружень на коефіцієнти інтенсивності напружень. Чисельне дослідження неосесиметричної задачі про тріщину нормального відриву проведено для випадку нормального навантаження на берегах тріщини вигляду (53). Чисельне дослідження систем неоднорідних рівнянь Фредгольма другого роду (36) і (39) здійснювали методом Бубнова – Гальоркіна, чисельне інтегрування проводили за квадратурними формулами Гаусса. За систему координатних функцій вибирали систему степеневих функцій.

Як приклад наведено результати чисельного дослідження для випадку пружних високоеластичних матеріалів, які описуються пружними потенціалами гармонічного типу та Бартенева – Хазановича. Значення параметрів, що входять до розв'язувальних систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та виразів для коефіцієнтів інтенсивності напружень, для цих матеріалів наведено в [8, 12].

Потенціал гармонічного типу [23] (стисливий матеріал, однакові корені). На рис. 3, 4 і 5 наведено залежності відношень коефіцієнтів інтенсивності напружень відповідно K_I/K_I^∞ , K_{II}/K_I^∞ та K_{III}/K_I^∞ (де K_I^∞ – коефіцієнт інтенсивності напружень, який отримуємо в задачі про тріщину нормального відриву в нескінченному тілі і визначаємо з (54)) від параметра початкового розтягу (або стиску) λ_1 , зумовленого дією початкових напружень, для значень відносної відстані між тріщиною і границею півпростору $\beta = h/a = 0.6, 0.75, 1.0$ при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$. При цьому значення $\lambda_1 > 1$ відповідають початковим розтягувальним напруженням, значення $\lambda_1 < 1$ – початковим стискувальним напруженням; при $\lambda_1 = 1$ – початкові напруження відсутні.

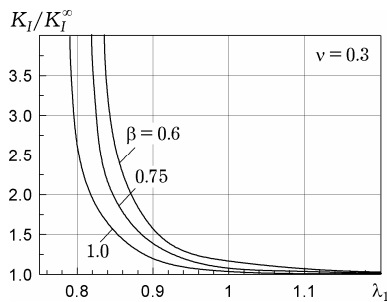


Рис. 3

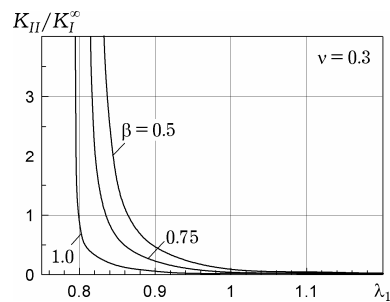


Рис. 4

З рисунків видно, що коефіцієнти інтенсивності напружень суттєво залежать від початкових напружень, причому вплив стискувальних початкових напружень вищий, ніж розтягувальних. При зростанні значень розтягувальних початкових напружень значення КІН прямують до значень, що відповідають тріщині нормального відриву в нескінченному тілі з початковими напруженнями. Наведені залежності мають вертикальні асимптоти, які відповідають «резонансоподібному» ефекту, що має місце при досягненні початковими стискувальними напруженнями значень, при яких відбувається локальна втрата стійкості матеріалу в околі приповерхневої тріщини.

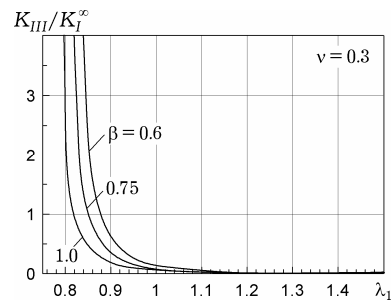


Рис. 5

На рис. 6 для цього ж матеріалу (стисливого) наведено залежність співвідношення КІН K_I/K_I^∞ від безрозмірної відстані між тріщиною і границею півпростору $\beta = h/a$ для $\nu = 0.3$. Залежності розраховано для значень $\lambda_1 = 0.9$ (початковий стиск), $\lambda_1 = 1.2$ (початковий розтяг) і $\lambda_1 = 1.0$ (початкові напруження відсутні). Бачимо, що взаємодія тріщини та вільної поверхні матеріалу призводить до зростання значень коефіцієнтів інтенсивності напружень порівняно з випадком тріщини в нескінченному тілі. Так, наприклад, для $\lambda_1 = 0.9$ (початковий стиск) значення K_I/K_I^∞ для $\beta = 0.5$ перевищує відповідне значення K_I/K_I^∞ для $\beta = 2.0$ в 1.7 рази. З іншого боку, при зростанні відстані між тріщиною і границею півпростору взаємний вплив тріщини і вільної поверхні швидко послаблюється, а відповідні значення КІН прямують до значень, які отриму-

ються для ізольованої тріщини в нескінченному тілі. З точністю, придатною для практичних застосувань, зазначеним взаємовпливом у випадку неосесиметричної задачі можна нехтувати при відстані між тріщиною і границею півпростору, що становить 2 і більше радіусів тріщини ($\beta = h/a \geq 2$).

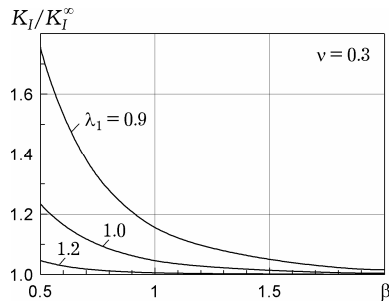


Рис. 6

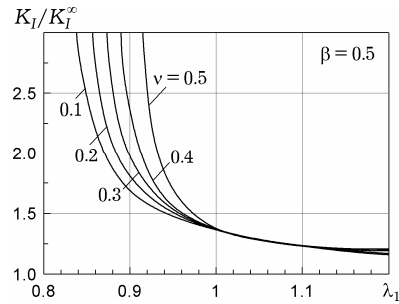


Рис. 7

Рис. 7 ілюструє залежність співвідношення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I/K_I^∞ від параметра початкових напружень λ_1 для значень коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ при $\beta = 0.5$. Як бачимо на цьому рисунку, стисливість матеріалу з потенціалом гармонічного типу, яка характеризується коефіцієнтом Пуассона, помітно впливає на значення КІН. Наприклад, при $\lambda_1 = 0.95$, $\beta = 0.5$ значення відношення K_I/K_I^∞ для $\nu = 0.5$ перевищує значення K_I/K_I^∞ для $\nu = 0.1$ на 12%, а при $\lambda_1 = 0.9$, $\beta = 0.5$ зазначені величини відрізняються в 2.2 рази.

Потенціал Бартенева – Хазановича [1] (нестисливий матеріал, однакові корені). На рис. 8 для цього потенціалу наведено залежність відношення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I/K_I^0 (де K_I^0 – коефіцієнт інтенсивності напружень нормального відриву у випадку відсутності початкових напружень), а на рис. 9 і 10 – відповідно залежності відношень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I/K_I^∞ та K_{III}/K_I^∞ від параметра початкового розтягу (або стиску) λ_1 , зумовленого дією початкових напружень, для значень відносної відстані між тріщиною і границею півпростору $\beta = h/a = 0.5, 1.0, 2.0$ на рис. 8 і значень $\beta = 0.125, 0.5, 1.0, 2.0$ – на рис. 9 і 10.

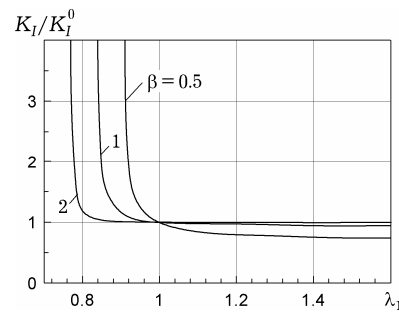


Рис. 8

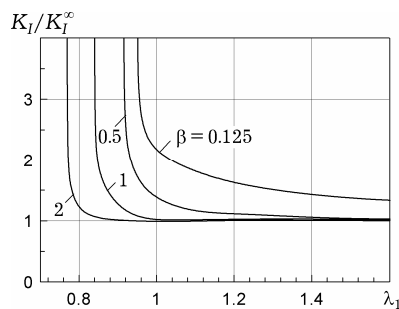


Рис. 9

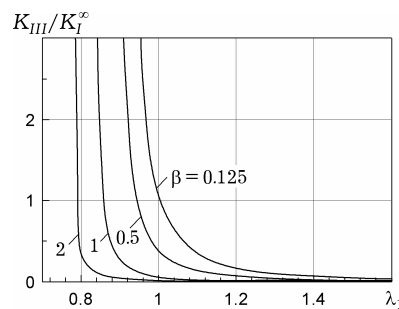


Рис. 10

Як бачимо на рисунках, для цього потенціалу коефіцієнти інтенсивності напружень також суттєво залежать від початкових напружень і від геометричних параметрів задачі (безрозмірної відстані між тріщиною і границею півпростору, віднесеної до радіуса тріщини). Наведені на рис. 8–10 залежності мають

вертикальні асимптоти, які відповідають різкому зростанню значень коефіцієнтів інтенсивності напружень при досягненні початковими напруженнями стиску значень, які відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщини.

7. Критичні параметри навантаження при стиску пружного тіла зусиллями, направленими вздовж приповерхневої тріщини. Відповідно до викладеної в [4, 8] методики критичні параметри стиску, що відповідають неосесиметричним формам локальної втрати стійкості матеріалу при стиску уздовж приповерхневої дископодібної тріщини (рис. 2), визначаються із розв'язку розглянутої вище неоднорідної неосесиметричної задачі про напружено-деформований стан півпростору з початковими напруженнями, ослабленого приповерхневою тріщиною, як значення початкових стискувальних напружень, при досягненні яких відбувається різка «резонансоподібна» зміна основних параметрів напружено-деформованого стану, зокрема, коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Так, для пружного матеріалу, що моделюється потенціалом Бартенсва – Хазановича, «резонансоподібний» характер зазначеного явища ілюструють дані про значення КІН нормального відриву K_I , нормованого на значення КІН для випадку ізольованої тріщини в нескінченному тілі, у випадку нормального навантаження на берегах тріщини вигляду (53), наведені у табл. 1. Як бачимо з цієї таблиці, для відстані між тріщиною і границею тіла, що складає половину радіуса тріщини, значення критичного параметра стиску, що відповідає неосесиметричній формі (перша гармоніка за координатою θ) локальної втрати стійкості в околі тріщини, становить $\lambda_1^* = 0.89554$. Слід зазначити, що це значення критичного параметра стиску повністю співпадає із значенням, яке було отримано раніше шляхом прямого розв'язку відповідної однорідної задачі в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл [18] (з урахуванням перерахунку в координати недеформованого стану, в яких проводились розрахунки в [18]).

Таблиця 1

λ_1^*	0.89554	0.9	0.95	1	1.5	2	10
K_I/K_I^∞	31171.5	9.249	1.735	1.381	1.030	1.006	1.000
K_{II}/K_I^∞	10545.6	3.107	0.420	0.220	0.004	0.000	0.000
K_{III}/K_I^∞	43343.1	11.337	0.859	0.374	0.009	0.001	0.000

На рис. 11 і 12 відповідно для матеріалів з пружними потенціалами Бартенсва – Хазановича та гармонічного типу наведено залежності значень відносного критичного скорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1^*$, які відповідають локальній втраті стійкості матеріалу по неосесиметричній формі (перша гармоніка за кутовою координатою) від відносної відстані між тріщиною і границею півпростору β . Бачимо, що взаємний вплив тріщини та границі півпростору призводить до суттєвого зменшення значень критичних параметрів скорочення і відповідно – критичних напружень стиску порівняно з випадком однієї ізольованої тріщини в нескінченному матеріалі [13] (для цього випадку для потенціалу Бартенсва – Хазановича критичні параметри стиску становлять $\varepsilon_1 = 0.307$, а для потенціалу гармонічного типу обчислюються за формулою $\varepsilon_1 = (1 - \nu)/2$).

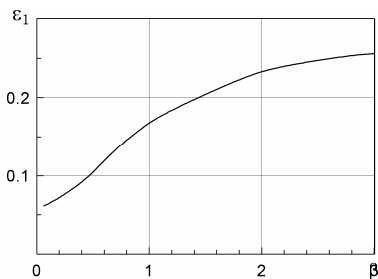


Рис. 11

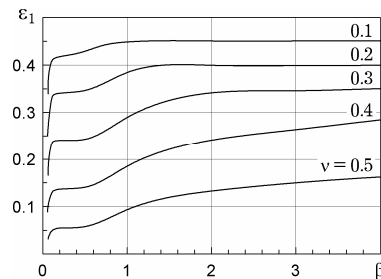


Рис. 12

У той же час при зростанні відстані між тріщиною і границею півпростору цей вплив послаблюється, а відповідні критичні параметри прямують до значень, отриманих для випадку однієї тріщини в просторі. Також бачимо, що для пружного матеріалу з потенціалом гармонічного типу стисливість матеріалу (коефіцієнта Пуассона) суттєво впливає на значення критичних параметрів скорочення.

1. *Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н.* О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – **2**, № 1. – С. 21–28.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.
3. *Богданов В. Л.* Лінеаризована задача про руйнування напівскінченного пружного матеріалу з потенціалом гармонічного типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 1. – С. 117–125.
4. *Богданов В. Л.* Об'єднаний аналіз задач механіки руйнування матеріалів з початковими напруженнями та руйнування тіл при стисканні вздовж тріщин: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2008. – 38 с.
5. *Богданов В. Л.* Осесиметрична задача про приповерхневу тріщину нормального відриву в композитному матеріалі з залишковими напруженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 45–54.
6. *Богданов В. Л.* Про кругову тріщину зсуву в напівнескінченному композиті з початковими напруженнями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 27–34.
То саме: *Bogdanov V. L.* On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // Mater. Sci. – 2007. – **43**, No. 3. – P. 321–330.
7. *Богданов В. Л.* Про тривимірні задачі лінеаризованої механіки руйнування // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. М. Карпенка НАН України, 2004. – С. 193–200.
8. *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Осесиметричная задача о разрушении тела с периодической системой соосных трещин под действием направленных вдоль них усилий // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 3–18.
То же: *Bogdanov V. L., Guz' A. N., Nazarenko V. M.* Fracture of a body with a periodic set of coaxial cracks under forces directed along them: an axisymmetric problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 2. – P. 305–308.
9. *Гузь А. Н.* К лінеаризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
10. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
11. *Гузь А. Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **261**, № 1. – С. 42–45.
12. *Гузь А. Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5-ти кн. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 2.)
13. *Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М.* Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 4; Кн. 1.)
14. *Гузь А. Н., Назаренко В. М., Никонов В. А.* Кручение полупространства с начальными напряжениями, содержащего приповерхностную дискообразную трещину // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 10. – С. 24–30.
То же: *Guz' A. N., Nazarenko V. M., Nikonov V. A.* Torsion of a pre-stressed half-space with a disk-shaped crack at the surface // Int. Appl. Mech. – 1991. – **27**, No. 10. – P. 948–954.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 800 с.
16. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
17. *Bogdanov V. L.* Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composites with cracks // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2008. – **15**, No. 6. – P. 453–460.
18. *Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of half-space // Theor. Appl. Fract. Mech. – 1995. – **22**. – P. 239–247.
19. *Guz A. N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
20. *Guz A. N.* On some non-classical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 8. – P. 937–941.

- То же: Гузь А. Н. О некоторых неклассических задачах механики разрушения, учитывающих напряжения вдоль трещин // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 8. – С. 138–144.
21. Guz A. N., Dysheľ M. Sh., Nazarenko V. M. Fracture and stability of materials and structural members with cracks: Approaches and results // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, No. 12. – P. 1323–1359.
То же: Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов и элементов конструкций с трещинами: подходы и результаты // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 12. – С. 18–64.
22. Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L. Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2007. – 48. – P. 285–303.
23. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Appl. Math. – 1960. – 13, No. 2. – P. 239–296.
24. Kassir M. K., Sih G. C. Mechanics of fracture. Three dimensional crack problems. – Leyden: Netherlands Noordhoff Int. Publ., 1975. – Vol. 2. – 452 p.

НЕОСЕССИМЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАПРАВЛЕННЫХ ВДОЛЬ НЕЕ УСИЛИЙ

В рамках линеаризованной механики деформируемого твердого тела рассмотрена неосесимметричная задача о влиянии свободной поверхности упругого полуграниченного тела на распределение напряжений в окрестности приповерхностной дискообразной трещины. Проведен объединенный анализ двух неклассических механизмов разрушения – разрушения материала с начальными напряжениями, действующими параллельно плоскости расположения трещины, и разрушения тела при сжатии вдоль трещины. С использованием представлений общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции и аппарата интегральных преобразований Фурье – Ханкеля задача сведена отдельно для каждой гармоники по угловой координате к разрешающим системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений окрестности контура трещины и проанализирована их зависимость от начальных напряжений и геометрических параметров задачи. Для отдельных высокоэластических материалов определены критические параметры сжатия, соответствующие неосесимметричным формам локальной потери устойчивости материала при сжатии вдоль приповерхностной трещины.

NON-AXISYMMETRIC PROBLEM ON STRESS-STRAIN STATE OF ELASTIC HALF-SPACE CONTAINING NEAR-SURFACE CIRCULAR CRACK UNDER LOAD DIRECTED ALONG THE CRACK

A non-axisymmetric problem on the effect of a free surface of elastic semi-infinite solid on the stress distribution in the vicinity of a near-surface disk-shaped crack is considered within the framework of the linearized mechanics of deformable solid. Two non-classical mechanisms of fracture are considered, namely, fracture of material with initial stresses acting parallel to the crack plane and fracture of solid under compression along the crack. By use of representations of general solutions of linearized equilibrium equations in the form of harmonic potential functions and Fourier – Hankel integral transformations the problem is reduced to resolving system of Fredholm second kind integral equations in angular coordinate for every harmonic separately. Representations for stress intensity factors near the crack contours are obtained and the dependences of these factors on the initial stresses and geometrical parameters are analyzed. The critical parameters of compression are calculated for some types of highly-elastic materials. These parameters correspond to non-axisymmetric forms of local stability loss under compression along a near-surface crack.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
01.07.09