

Т. М. Николишин, М. Й. Ростун

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН І ГРАНИЧНА РІВНОВАГА НЕОДНОРІДНОЇ ЗА ТОВЩИНОЮ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ДВОМА ПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ

Розглянуто неоднорідну за товщиною, зокрема виготовлену з функціонально градієнтного матеріалу, сферичну оболонку з двома поверхневими тріщинами. Запропоновано підхід зведення задачі про пружно-пластичний стан такої оболонки до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Запропоновано алгоритм чисельного розв'язування отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь сумісно з умовами пластичності, обмеженості зусиль і моментів та однозначності переміщень. Досліджено вплив навантаження, механічних і геометричних параметрів на розкриття фронту тріщин.

**Вступ.** У сучасній техніці елементи конструкцій, зокрема оболонкові, часто працюють у таких умовах, що одна їх поверхня знаходиться в агресивному середовищі з певними фізико-хімічними параметрами, а друга – в середовищі з іншими параметрами. У таких випадках доцільно використовувати шаруваті структури або функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), тобто композитні матеріали мікроскопічної неоднорідності, в яких механічні властивості змінюються неперервно по товщині оболонки. Найчастіше ці матеріали виготовляються з кераміки та металу. Почали розробляти ФГМ для космічних кораблів, як матеріали, що витримують надвисокі температури. На сьогодні такі матеріали набувають більш широкого застосування, що зумовлює необхідність проводити не лише аналіз розподілу температур, а й досліджувати їх напружено-деформований стан, міцність тощо. Результати досліджень розподілу напружень у циліндричній та сферичній оболонках, а також у порожнистому циліндрі з ФГМ, зумовлених температурою або силовим навантаженням, наведено в [7–10, 12]. Розподіл збурених напружень біля поверхневої тріщини в оболонках досліджено в [3, 4]. У запропонованій роботі дослідимо вплив неоднорідності за товщиною на взаємодію тріщин у пологій сферичній оболонці.

**Постановка задачі.** Розглянемо неоднорідну за товщиною безмежну пологу сферичну оболонку, серединна поверхня якої віднесена до декартової системи координат  $XOY$ . Оболонка ослаблена двома співвісними поверхневими тріщинами однакової довжини  $2\ell_0$  і глибини  $2d$ , віддаль між центрами яких  $2d_1$  (рис. 1). Тріщини розміщені вздовж координатної лінії  $Y = 0$ ; початок координат в центрі відрізка, що з'єднує вершини тріщин.

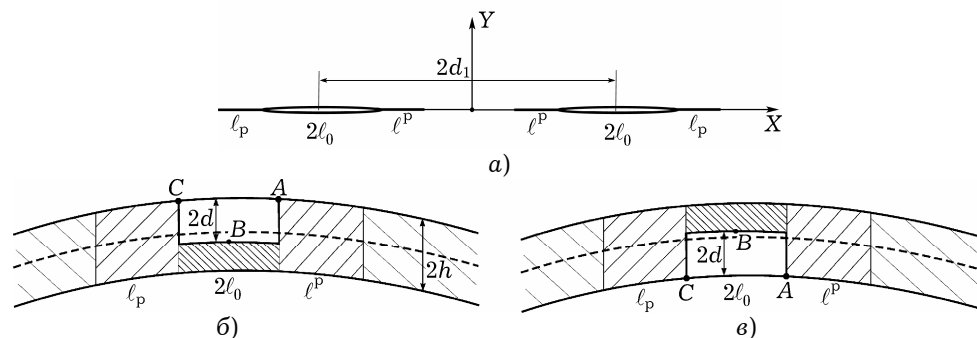


Рис. 1

Вважатимемо, що оболонка і береги тріщин завантажені лише симетричними відносно площин тріщин зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщин не контактують. Обмежимося розглядом досить глибоких тріщин ( $d \geq 0.4 \cdot h$ ,  $2h$  – товщина оболонки). Тріщини можуть виходити

ти як на зовнішню, так і на внутрішню поверхню оболонки. Розміри тріщин, рівень зовнішнього навантаження і властивості матеріалу приймаємо такими, що біля тріщин по всій товщині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Відповідно до аналога  $\delta_c$ -моделі [2] зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщин углибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхонь оболонки, тобто відповідно в області  $x \in ]-x_d - x_0, -x_d + x_0[ \cup ]x_d - x_0, x_d + x_0[$ ,  $\gamma \in [-h + 2d, h]$  для тріщин, що виходять на внутрішню поверхню оболонки, чи  $\gamma \in [-h, h - 2d]$  – для тріщин, що виходять на зовнішню поверхню оболонки ( $x_0 = \ell_0/\ell_1$ ;  $x_d = d_1/\ell_1$ ;  $x = X/\ell_1$ ;  $2\ell_1 = 2\ell_0 + \ell_p + \ell^p$ ;  $\gamma$  – нормальна до серединної поверхні координата), діють постійні напруження  $\sigma^0 = (\sigma_B^i + \sigma_T^i)/2$ ,  $i = 1, 2$ , де  $\sigma_B^1$  – границя міцності, а  $\sigma_T^1$  – поріг текучості матеріалу оболонки на проміжку  $\gamma \in [-h, h - 2d]$ , а  $\sigma_B^2, \sigma_T^2$  – ці ж величини на проміжку  $\gamma \in [-h + 2d, h]$ . У пластичних зонах на продовженні тріщин по довжині, тобто в областях  $\gamma \in [-h, h]$ ,  $x \in ]-x_d - x_0 - x_p, -x_d + x_0[ \cup ]x_d - x_0, x_d + x_0 + x_p[$ , діють невідомі нормальне зусилля  $N_p$  і згинний момент  $M_p$ , а в областях  $\gamma \in [-h, h]$ ,  $x \in ]-x_d - x_0, -x_d + x_0 + x^p[ \cup ]x_d - x_0 - x^p, x_d - x_0[$  – нормальне зусилля  $N^p$  і згинний момент  $M^p$ . Тут  $x_p$  – віднесена до  $\ell_1$  довжина пластичних зон біля дальніх (відносно початку координат) вершин тріщин:  $x_p = \ell_p/\ell_1$ ;  $x^p$  – ця ж величина біля ближніх вершин тріщин:  $x^p = \ell^p/\ell_1$ . Зусилля і моменти  $N_p, M_p$  і  $N^p, M^p$  протидіють розкриттю тріщини та задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок [6].

Таким чином, у рамках прийнятого аналога  $\delta_c$ -моделі пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу оболонки з поверхневими тріщинами заданої довжини  $2\ell_0$  зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивними наскрізними тріщинами невідомої довжини  $2\ell_1$ , на берегах якої виконуються такі умови:

$$f_1(x) = \begin{cases} N_2^{(1)} + N^\ell - N_2^0, & x_d - x_0 < x < x_d + x_0, \\ -N_2^0 + N^p, & x_d - x_0 - x^p < x < x_d - x_0, \\ -N_2^0 + N_p, & x_d - x_0 < x < x_d + x_0 + x_p, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} M_2^{(1)} + M^\ell - M_2^0, & x_d - x_0 < x < x_d + x_0, \\ -M_2^0 + M^p, & x_d - x_0 - x^p < x < x_d + x_0, \\ -M_2^0 + M_p, & x_d - x_0 < x < x_d + x_0 + x_p. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $N_2^{(1)}, M_2^{(1)}$  – зусилля і момент, прикладені до берегів реальних тріщин;  $N_2^0, M_2^0$  – ці ж параметри на лінії тріщин в суцільній оболонці, зумовлені зовнішнім навантаженням;  $N^\ell, M^\ell$  – нормальне зусилля і згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над чи під поверхневою тріщиною та які згідно з прийнятими припущеннями про напруження у цих зонах визначаються за формулами

$$N^\ell = 2(h + d)\sigma^0, \quad M^\ell = \pm 2d(h - d)\sigma^0, \quad (2)$$

знак «+» у формулі (2) відповідає ненаскрізній тріщині, що виходить на внутрішню поверхню оболонки, а знак «-» – на зовнішню.

Умови (1) записано для правої (відносно початку координат) тріщини. Аналогічні умови можна записати для лівої тріщини.

**Основні співвідношення неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з тріщинами.** Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона в неоднорідних за товщиною оболонках є функціями нормальної до серединної поверхні координати  $\gamma$  :

$$E = E(\gamma), \quad \nu = \nu(\gamma). \quad (3)$$

Залежності (3) такі, що характеристики матеріалу оболонки задовольняють узагальнений закон Гука і справджується гіпотеза недеформованих нормальних елементів [1].

Записавши для такої оболонки вирази питомої роботи деформацій і її диференціала з урахуванням наявності тріщини [2], легко отримати повну систему ключових рівнянь.

Так, для неоднорідної за товщиною сферичної оболонки, коли її напружено-деформований стан симетричний відносно лінії тріщин, система ключових рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{d_{22}}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 w &= -F_1^0(x, y), \\ \frac{A}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{d_{22}}{\ell_1^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{R} \nabla^2 \varphi &= -AF_2^0(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} F_1^0(x, y) &= \nabla^2(\varepsilon_{22}^0 + d_{11}x_{22}^0) + \nabla_2^2(\varepsilon_{22}^0 + d_{12}x_{22}^0), \\ F_2^0(x, y) &= \mu \nabla^2 x_{22}^0 - (1 - \mu) \nabla_2^2 x_{22}^0, \\ d_{11} &= \frac{C_{11}K_{11} - C_{12}K_{12}}{\Omega}, \quad d_{22} = \frac{C_{11}K_{12} - C_{12}K_{11}}{\Omega}, \quad d_{12} = \frac{K_{66}}{C_{66}}, \\ \Omega &= C_{11}^2 - C_{12}^2, \quad A = D_{11} - D_{11}^0, \quad B = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad \mu_1 = \frac{A_1}{A}, \quad A_1 = D_{12} - D_{12}^0, \\ D_{11}^0 &= K_{11}d_{11} + K_{12}d_{22}, \quad D_{12}^0 = K_{11}d_{22} + K_{12}d_{11}, \\ \nabla_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad x = \frac{X}{\ell_1}, \quad y = \frac{Y}{\ell_1}, \\ \varepsilon_{22}^0 &= \frac{1}{R} [u_2(\alpha)] \delta(\beta), \quad x_{22}^0 = -\frac{1}{R} [\theta_2(\alpha)] \delta(\beta), \\ C_{ij} &= \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) d\gamma, \quad K_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma, \quad D_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma, \\ B_{11}(\gamma) &= \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B_{12}(\gamma) = \nu B_{11}, \quad B_{66}(\gamma) = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

$[u_2(\alpha)]$ ,  $[\theta_2(\alpha)]$  – стрибки переміщень та кута повороту.

Зусилля та моменти через ключові функції  $\varphi$ ,  $w$  визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{\ell_1^2} \nabla_j \varphi, \quad i \neq j = 1, 2, \quad S = -\frac{1}{\ell_1^2} \nabla_1 \nabla_2 \varphi, \\ M_i &= -A \left( \frac{1}{\ell_1^2} \nabla_i^2 w + x_{ii}^0 \right) - A_1 \left( \frac{1}{\ell_1^2} \nabla_j^2 w + x_{jj}^0 \right) + \frac{d_{22}}{\ell_1^2} \nabla_i^2 \varphi + \frac{d_{11}}{\ell_1^2} \nabla_j^2 \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= -A_2 \left( \frac{1}{\ell_1^2} \nabla_1 \nabla_2 w + x_{12}^0 \right) - \frac{d_{22}}{\ell_1^2} \nabla_1 \nabla_2 \varphi, \\
Q_i &= -\frac{1}{\ell_1^3} \nabla_i \nabla^2 (Aw + d_{22}\varphi) - \frac{1}{\ell_1} \nabla_i (Ax_{ii}^0 + A_1 x_{jj}^0) - \frac{A_2}{\ell_1} \nabla_j x_{12}^0, \\
A_2 &= 2(D_{66} - K_{66} d_{12}).
\end{aligned} \tag{5}$$

Увівши комплексну функцію  $\Phi(x, y)$  у вигляді [5]

$$\Phi(x, y) = w(x, y) + i\sqrt{\frac{B}{A}} \varphi(x, y),$$

систему диференціальних рівнянь (4) зведемо до рівняння

$$\nabla^2 (\nabla^2 - \lambda_1^2 S^2) \Phi(x, y) = -R \lambda_1^2 S^2 [F_1^0(x, y) - i\sqrt{AB} F_2^0(x, y)], \tag{6}$$

$$\text{де } \lambda_1^2 = \frac{\sqrt{AB} \ell_1^2}{R(AB + C^2)}; S^2 = \frac{C}{\sqrt{AB}} + i; C = d_{22}; i = \sqrt{-1}.$$

За допомогою перетворення Фур'є фундаментальний розв'язок  $\Phi_0$  рівняння

$$\nabla^2 (\nabla^2 - \lambda_1^2 S^2) \Phi_0(x, y) = \lambda_1^2 S^2 \delta(x) \delta(y), \tag{7}$$

що відповідає неоднорідному рівнянню (6), отримуємо у вигляді

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2\pi} (K_0(\lambda, s, r) - \ln r), \tag{8}$$

де  $r^2 = x^2 + y^2$ ;  $K_0(z)$  – функція Макдональда.

**Інтегральні рівняння задачі.** За допомогою фундаментального розв'язку (8) та операції згортки побудовано інтегральні представлення ключових функцій  $\varphi, w$ , а на основі формул (5) – інтегральні подання зусиль і моментів для сферичної оболонки. Вимагаючи тепер, щоб на берегах обох фіктивних тріщин виконувались умови типу (1), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь. Для двох тріщин у сферичній оболонці у випадку симетричної задачі ця система має вигляд

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 F_j(\theta) \left[ \frac{a_{ij}}{\theta - x} + \tilde{K}_{ij}(\theta, x) \right] d\theta = b_i f_i(x), \tag{9}$$

$$\text{де } F_1 = \frac{d}{d\theta} [u_1(\theta)]; F_2 = \frac{d}{d\theta} [\theta_1(\theta)]; b_1 = \frac{8\pi}{E_1}; b_2 = \frac{8\pi}{E_1 R}; a_{11} = 1; a_{12} = a_{21} = \frac{E_2}{E_1};$$

$$a_{22} = \frac{E_5 + E_6}{E_1}; \tilde{K}_{ij}(\theta, x) = \frac{a_{ij}}{\theta + x + 2\beta_c} + K_{ij}(x - \theta) + K_{ij}(x + \theta + 2\beta_c); K_{ij}(z) -$$

ядра відповідної системи для оболонки з однією тріщиною;  $E_1, E_2, E_5, E_6$  наведено в [3].

Розв'язки системи сингулярних інтегральних рівнянь (9) повинні задовольняти умови

$$\int_{-a_1}^{a_1} F_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \tag{10}$$

які забезпечують неперервність переміщень  $u_2$  та кута повороту  $\theta_2$  у вершинах тріщини і впливають із співвідношень (4).

Відповідно до моделі в системі (9) невідомими є розміри зон пластичних деформацій  $\ell^P$  і  $\ell_p$ , а також зусилля  $N^P, N_p$  та моменти  $M^P, M_p$ , що відповідають реакції пластичних зон на пружний об'єм і задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок, наприклад, умову Треска у ви-

гляді пластичного поверхневого шару

$$\frac{N^i}{2h\sigma_T} + \frac{3|M_i|}{2h^2\sigma_T} = 1, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

або пластичного шарніру

$$\left(\frac{N^i}{2h\sigma_T}\right)^2 + \frac{|M_i|}{h^2\sigma_T} = 1, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

де  $N^1 = N^p$ ,  $N^2 = N_p$ ,  $M^1 = M^p$ ,  $M^2 = M_p$ .

Умови пластичності (11), (12) використовуємо для визначення довжин пластичних зон  $\ell^p$  та  $\ell_p$ . Для знаходження невідомих  $N^p$ ,  $N_p$  та  $M^p$ ,  $M_p$ , застосуємо умови скінченності напружень біля вершин фіктивних тріщин. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності нормальних зусиль і згинних моментів дорівнювали нулеві в обох вершинах тріщин:

$$K_N^{(1)} = K_N^{(2)} = K_M^{(1)} = K_M^{(2)} = 0. \quad (13)$$

Таким чином, задача про граничну рівновагу неоднорідної за товщиною пружно-пластичної сферичної оболонки з двома поверхневими тріщинами зведена до сумісного розв'язання системи інтегральних рівнянь (9), умов (10), умов пластичності (11) або (12) та умов обмеженості напружень (13).

Систему (9) можна розв'язати одним із прямих числових методів, наприклад, методом механічних квадратур [2]. Але функції  $f_i(\alpha)$ ,  $i = 1, 2$ , які знаходяться у правих частинах інтегральних рівнянь, мають розриви в точках  $|x| = d_1 - \ell_0$  та  $|x| = d_1 + \ell_0$ . Порівняння аналітичного розв'язку канонічних сингулярних інтегральних рівнянь (регулярна частина ядер рівна нулеві) з розривною правою частиною з відповідним розв'язком, отриманим за допомогою методу механічних квадратур, показало, що використання цього методу безпосередньо до системи типу (9) призводить до значних похибок у розв'язку в околі точок розриву, де поведінка розв'язку є найбільш цікавою. Алгоритм чисельного розв'язування системи типу (9) сумісно з умовами (11)–(13) наведено в [3].

Інтегруючи розв'язок системи (9), розкриття тріщини  $\delta(\alpha, \gamma)$  у довільній її точці визначаємо за формулою

$$\delta(\alpha, \gamma) = [u_2(\alpha)] + \gamma[\theta_2(\alpha)], \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad |\gamma| \leq h.$$

**Числові результати.** Як приклад розглянуто нескінченну сферичну оболонку з ФГМ, зовнішня поверхня якої виготовлена з алюмінію ( $E_{\text{ext}} = 70$  ГПа), а внутрішня – з германію ( $E_{\text{int}} = 151$  ГПа). За товщиною модуль пружності  $E(\gamma)$  змінюється згідно з законом [11]

$$E(\gamma) = (E_{\text{ext}} - E_{\text{int}})V + E_{\text{int}}, \quad V = \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^m, \quad \xi = \frac{\gamma}{2h}, \quad (14)$$

а коефіцієнт Пуассона  $\nu(\gamma) = \text{const}$ . Тоді

$$C_{11} = \frac{2h(E_{\text{ext}} + mE_{\text{int}})}{(1 - \nu^2)(m + 1)}, \quad C_{12} = \frac{2h\nu(E_{\text{ext}} + mE_{\text{int}})}{(1 - \nu^2)(m + 1)}, \quad C_{66} = \frac{h(E_{\text{ext}} + mE_{\text{int}})}{(1 + \nu)(m + 1)},$$

$$K_{11} = \frac{2mh^2(E_{\text{ext}} - E_{\text{int}})}{(1 - \nu^2)(2 + m)(1 + m)}, \quad K_{12} = \frac{2\nu mh^2(E_{\text{ext}} - E_{\text{int}})}{(1 - \nu^2)(2 + m)(1 + m)},$$

$$K_{66} = \frac{mh^2(E_{\text{ext}} - E_{\text{int}})}{(1 + \nu)(2 + m)(1 + m)},$$

$$D_{11} = \frac{2h^3[3E_{\text{ext}}(m^2 + m + 2) + mE_{\text{int}}(m^2 + 3m + 8)]}{3(1 - \nu^2)(3 + m)(2 + m)(m + 1)},$$

$$D_{12} = \frac{2\nu h^3 [3E_{\text{ext}}(m^2 + m + 2) + mE_{\text{int}}(m^2 + 3m + 8)]}{3(1 - \nu^2)(3 + m)(2 + m)(m + 1)},$$

$$D_{66} = \frac{h^3 [3E_{\text{ext}}(m^2 + m + 2) + mE_{\text{int}}(m^2 + 3m + 8)]}{3(1 + \nu)(3 + m)(2 + m)(m + 1)}.$$

Обчислення виконано для оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності  $p$  ( $N_2^0 = 2pR$ ,  $M_2^0 = 0$ ) для таких значень параметрів:  $\frac{h}{R} = 0.01$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\frac{\sigma_B}{\sigma_T} = 1.5$ ;  $\frac{d}{h} = 0.5$ ;  $\frac{\ell_0}{R} = 0.2$ ;  $\frac{\sigma_T^1}{\sigma_T} = 1.3$ ;  $\frac{\sigma_B^1}{\sigma_T} = 1.9$ ;  $\frac{\sigma_T^2}{\sigma_T} = 0.8$ ;  $\frac{\sigma_B^2}{\sigma_T} = 1.1$ . Розкриття обчислювали в точці  $B$  (див. рис. 1).

На рис. 2, 3 показано залежність відносного розкриття тріщини  $\delta^* = \frac{\delta E_{\text{int}}}{\ell_0 \sigma_T}$  і відносної довжини пластичних зон  $\eta_0 = \frac{\ell_0}{\ell_1}$  від відносного навантаження  $n^0 = \frac{Rp}{2h\sigma_T}$ . Суцільні лінії відповідають ненаскрізним тріщинам, що виходять на зовнішню поверхню ( $N_2^{(1)} = M_2^{(1)} = 0$  – береги реальної тріщини вільні від навантаження), а штрихові – тріщинам, що виходять на внутрішню поверхню ( $N_2^{(1)} = 2pd$ ,  $M_2^{(1)} = -2pd(h - d)$  – дія внутрішнього тиску на береги реальної тріщини). При цьому  $\frac{d_1}{\ell_0} = 3$ , тобто тріщини практично не взаємодіють.

На рис. 4 показано залежність  $\delta^*$  від віддалі між тріщинами, що виходять на зовнішню поверхню, для  $n_0 = 0.2, 0.4$ . Суцільні лінії відповідають точці  $A$ , а штрихові – точці  $C$  (див. рис. 1). Обчислювали також розкриття тріщин і в точці  $B$ . Залежність його від  $n_0$  та  $\ell_0/d_1$  має такий самий характер, але значення є більшими, ніж у точці  $C$ , на 20%.

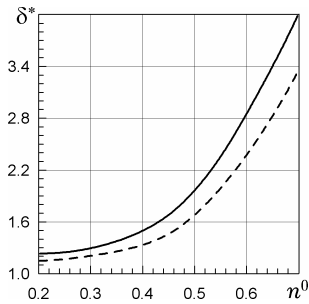


Рис. 2

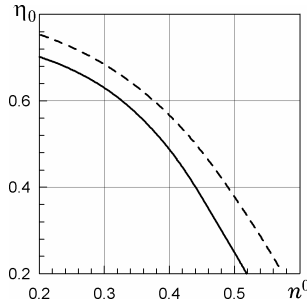


Рис. 3

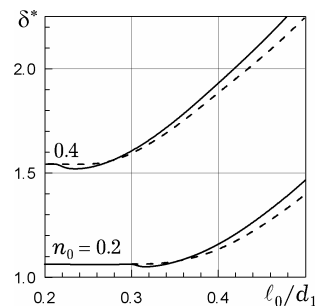


Рис. 4

**Висновки.** Аналіз результатів показує, що початок взаємодії тріщин залежить як від довжини тріщин чи віддалі між ними, так і від рівня внутрішнього тиску. На початку взаємодії, як і в однорідній оболонці з двома наскрізними тріщинами [2], розкриття ближніх вершин дещо зменшується, але ця різниця для неоднорідної оболонки з поверхневими тріщинами значно менша. Якщо за критерій руйнування взяти критерій критичного розкриття фронту тріщини, то руйнування сферичної оболонки, виготовленої з ФГМ з двома поверхневими тріщинами, для розглянутих геометричних і механічних параметрів і навантаження, розпочнеться у точці  $B$ . Чисельний аналіз показав, що значення « $m$ » в законі розподілу (14) для  $m > 3$  мало впливає на розкриття тріщин, на відміну від відношення  $E_{\text{ext}}/E_{\text{int}}$ .

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛЛОМ, 2003. – 320 с.
3. Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й. Гранична рівновага неоднорідної по товщині сферичної оболонки з поверхневою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 5–11.  
Те саме: Kushnir R. M., Nykolishyn T. M., Rostun M. Yo. Limiting equilibrium of a spherical shell nonuniform across the thickness and containing a surface crack // Mater. Sci. – 2007. – **43**, No. 3. – P. 291–299.
4. Кушнір Р., Николишин Т., Ростун М. Гранична рівновага виготовленої з функціонально градієнтного матеріалу циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною // Машинознавство. – 2006. – № 5. – С. 3–7.
5. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судромгиз, 1962. – 431 с.
6. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – Москва: Физматгиз, 1958. – 136 с.
7. Kim K. S., Noda N. Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material // Acta Mech. – 2002. – **156**. – P. 145–161.
8. Kim K. S., Noda N. A. Green's function approach to the deflection of a FGM plate under transient thermal loading // Arch. Appl. Mech. – 2002. – **72**. – P. 127–137.
9. Koizumi M. The concept of FGM // Ceramic Transact. Functionally Gradient Materials. – 1993. – **34**. – P. 3–10.
10. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471–487.
11. Ruhi M., Angoshtari A., Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials // J. Thermal Stresses. – 2005. – **28**. – P. 391–408.
12. Shao Z. S., Fan L. F., Wang T. J. Analytical solutions of stresses in functionally graded circular hollow cylinder with finite length // Key Eng Mater. – 2004. – P. 261–263; P. 651–656.

#### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Рассмотрена неоднородная по толщине, в частности изготовленная из функционально градиентного материала, сферическая оболочка с двумя поверхностными трещинами. Предложена методика сведения задачи об упруго-пластичном состоянии такой оболочки к системе сингулярных интегральных уравнений. Предложен алгоритм численного решения полученной системы сингулярных интегральных уравнений совместно с условиями пластичности, ограниченности усилий и моментов и однозначности перемещений. Исследовано влияние нагрузки, механических и геометрических параметров на раскрытие фронта трещин.

#### STRESS STATE AND LIMIT EQUILIBRIUM OF THICKNESS-INHOMOGENEOUS SPHERICAL SHELL WITH TWO SURFACE CRACKS

A thickness-inhomogeneous spherical shell, in particular made from functionally graded material weakened by two coaxial surface cracks is considered. The approach to reduction of the problem on elastoplastic state of such a shell to a system of singular integral equations is proposed. A numerical solution algorithm of the obtained system jointly with plasticity conditions, boundedness of stresses and moments and uniqueness of displacements is suggested. The influence of loading, mechanical and geometric parameters on the cracks opening displacement is studied.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
14.10.09