УДК 539.3

В. П. Шевченко, С. В. Закора

ПРО ВЗАЄМОВПЛИВ БЛИЗЬКО РОЗМІЩЕНИХ КРУГОВИХ ОТВОРІВ ІЗ ЖОРСТКИМИ КОНТУРАМИ У СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

Розглянуто задачу про напружений стан пологої ізотропної сферичної оболонки з двома круговими отворами з жорсткими контурами, що не деформуються. Чисельно досліджено випадки досить близького розташування контурів як однакових, так і нерівних радіусів в оболонці під внутрішнім тиском. Виявлено значне збільшення напружень на перемичці між контурами при їх зближенні.

Чисельні результати для ізотропної пологої сферичної оболонки під дією внутрішнього тиску з двома однаковими круговими отворами, підкріпленими кільцями великої жорсткості, наведено в роботах [1, 2]. При цьому мінімальна ширина перемички складала 0.7 від радіуса отвору. У праці [3] для циліндричної оболонки було відмічено, що значне збільшення небезпечних напружень відбувається при близькому розташуванні абсолютно жорстких шайб. Тому в пропонованій роботі досліджуються випадки близького розташування двох кругових отворів (у тому числі й нерівних) з абсолютно жорсткими контурами в сферичній оболонці.

Постановка та розв'язування задачі. Розглянемо пологу ізотропну сферичну оболонку товщини h з двома нерівними круговими отворами з жорсткими контурами, що не деформуються (рис. 1). Припускаємо, що оболонка навантажена рівномірним внутрішнім тиском інтенсивності $p = \text{const}$. Основний напружений стан оболонки описується безмоментним розв'язком суцільної оболонки:

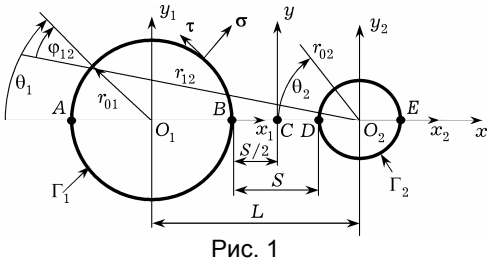

Рис. 1

$$T_r^0 = p_0 h, \qquad T_\theta^0 = p_0 h, \qquad S_{r\theta}^0 = 0, \tag{1}$$

де $p_0 h = \dfrac{pR}{2}$.

Збурений напружений стан, що вноситься отворами, визначатимемо виходячи з основного диференціального рівняння теорії пологої сферичної оболонки [1]:

$$\Delta\Delta\Phi - \frac{i}{cR}\Delta\Phi = 0. \tag{2}$$

Тут Δ – оператор Лапласа; Φ – комплексна функція; R – радіус серединної поверхні оболонки; $c = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$, де ν – коефіцієнт Пуассона.

Припускаємо, що контур Γ_q кожного отвору є абсолютно жорстким і таким, що не деформується. У роботі [2] застосовувалися граничні умови для підкріплюючого кільця. На відміну від [2], задаватимемо деформаційні граничні умови, що дозволяють точніше врахувати недеформованість абсолютно жорсткого контуру. Вони мають вигляд

$$\varepsilon_{\tau\tau}\big|_{\Gamma_q} = 0, \qquad \varkappa_{\tau\tau}\big|_{\Gamma_q} = 0, \qquad \varkappa_{\tau\nu}\big|_{\Gamma_q} = 0, \qquad \varkappa_{n\tau}\big|_{\Gamma_q} = 0. \tag{3}$$

Тут введено полярні координати $x_q + iy_q = r_q e^{i\theta_q}$, де q – номер контуру отвору, $q = 1, 2$, на якому задаються граничні умови. Вирази для деформаційних крайових величин, що увійшли у (3), є такими:

$$\varepsilon_{\tau\tau} = (T_\theta + T_\theta^0) - \nu(T_r + T_r^0), \qquad \text{æ}_{\tau\tau} = G_\theta - \nu G_r,$$

$$\text{æ}_{\tau\nu} = H_{r\theta}, \qquad \text{æ}_{n\tau} = \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{(1+\nu)}{r}\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta}. \tag{4}$$

У граничних умовах (3), (4) враховано жорсткий поворот краю отвору навколо нормалі до оболонки.

Розв'язок $\Phi = Ehc \cdot U$ рівняння (2) визначаємо як суму циліндричної і полігармонічної (степеневої) частин: $U = U_c + U_p$. Функції U_c і U_p задовольняють умови симетричного розміщення контурів щодо осі x, спадають за абсолютною величиною при $r \to \infty$ і мають вигляд

$$U_c(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} c_{qn} H_n^{(1)}(\sigma\rho_{qk})\cos n\theta_{qk}, \tag{5}$$

$$U_p(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} a_{qn}\frac{1}{\rho_{qk}^n}\cos n\theta_{qk}. \tag{6}$$

Тут c_{qn}, a_{qn} – комплексні невідомі сталі; $H_n^{(1)}(\sigma\rho_{qk})$ – функція Ганкеля, $\sigma = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$, i – уявна одиниця; $\rho_{qk} = \frac{r_{qk}}{\sqrt{cR}}$ – відносна безрозмірна величина, де r_{qk} – радіус-вектор із початком у центрі O_k контуру Γ_k і кінцем на контурі Γ_q (рис. 1); θ_{qk} – кут між віссю Ox і радіус-вектором r_{qk}, $k = 1, 2$; якщо $k = q$, то $\rho_{qk} = \rho_{0q}$, $\theta_{qk} = \theta_{0q}$.

Для відокремлення змінних у функціях U_c, U_p в q-й системі координат застосуємо методику, запропоновану в [2], яка базується на використанні теореми Графа для циліндричних функцій у (5) і розвинень у ряд Лорана кожного з членів степеневої частини розв'язку (6). В результаті отримаємо

$$U_c(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{J_n(\sigma\rho_{0q})e_n\sum_{p=0}^{\infty} e_{np}c_{3-qp}\left[H_{n-p}^{(1)}(\sigma\ell) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^n H_{n+p}^{(1)}(\sigma\ell)\right] + c_{qn}H_n^{(1)}(\sigma\rho_{0q})\right\}\cos n\theta_q, \tag{7}$$

$$U_p(\rho_q, \theta_q) =$$

$$= \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e_{np}(-1)^p(p+n-1)!\,\rho_{0q}^n}{(p-1)!\,n!\,\ell^{p+n}}a_{3-qp} + a_{qn}\frac{1}{\rho_{0q}^n}\right]\cos n\theta_q. \tag{8}$$

Тут $J_n(\sigma\rho_{0q})$ – функція Бесселя першого роду; $\ell = L/r_{01}$ – відносна безрозмірна величина відстані між центрами контурів,

$$e_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0, \end{cases} \qquad e_{np} = \begin{cases} 1, & q = 1, \\ (-1)^{n+p}, & q = 2. \end{cases}$$

Вирази для зусиль і моментів, що відповідають однорідним розв'язкам (5)–(8), згідно з [1, 2] мають вигляд

$$T_r = \frac{1}{\rho}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right), \quad T_\theta = \operatorname{Im}\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}, \quad S_{r\theta} = -\operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right),$$

$$G_r = -c\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\nu}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right), \qquad G_\theta = -(1+\nu)c\operatorname{Re}\nabla^2 U - G_r,$$

$$H_{r\theta} = -(1-\nu)c\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \qquad Q_r = -\sqrt{\frac{c}{R}}\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial\rho}\nabla^2 U,$$

$$Q_r^* = Q_r + \frac{dH_{r\theta}}{ds}, \qquad Q_\theta = -\sqrt{\frac{c}{R}}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 U\,, \tag{9}$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

Підставляючи зусилля і моменти із (9) з урахуванням (7), (8) у граничні умови (3), (4) і прирівнюючи члени при однакових гармоніках, отримуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь щодо дійсних і уявних частин невідомих a_{qn}, c_{qn}. До цієї системи згідно з [1] необхідно додати ще умови рівності нулю складових головного вектора і головного моменту зовнішніх сил, прикладених до контуру, тоді $a_{q0} = 0$, $a_{q1} = 0$. Отриману систему розв'язуємо методом редукції.

Визначені внаслідок розв'язання цієї системи значення a_{qn}, c_{qn} підставляємо у формули (5), (6) і знаходимо функції напружень U_p, U_c. Далі за формулами (9) знаходимо зусилля і моменти, які при переході до напрямів $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$ перетворюємо за відомими формулами [1] і які залежатимуть ще від кутів φ_q (див. рис. 1).

Чисельні дослідження проведено для оболонки з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$ під дією внутрішнього тиску з двома круговими отворами з контурами, що не деформуються, при різних значеннях радіусів контурів і ширини перемички між ними.

Обчислено коефіцієнти концентрації мембранних і згинальних, а за ними – і відносних еквівалентних напружень відповідно до енергетичної теорії міцності [1]:

$$k_\theta^{\mathrm{T}} = (T_\theta + T_\theta^0)\frac{1}{p_0 h}, \quad k_r^{\mathrm{T}} = (T_r + T_r^0)\frac{1}{p_0 h}, \quad k_\theta^{\mathrm{B}} = 6G_\theta\frac{1}{p_0 h^2},$$

$$k_r^{\mathrm{B}} = 6G_r\frac{1}{p_0 h^2}, \quad \tau_{r\theta}^{\mathrm{T}} = (S_{r\theta} + S_{r\theta}^0)\frac{1}{p_0 h}, \quad \tau_{r\theta}^{\mathrm{B}} = 6H_{r\theta}\frac{1}{p_0 h^2}, \tag{10}$$

$$k_\theta = k_\theta^{\mathrm{T}} \pm k_\theta^{\mathrm{B}}, \quad k_r = k_r^{\mathrm{T}} \pm k_r^{\mathrm{B}},$$

$$k_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{\mathrm{T}} \pm \tau_{r\theta}^{\mathrm{B}}, \quad k_{\mathrm{eq}} = \sqrt{k_r^2 + k_\theta^2 - k_r k_\theta + 3k_{r\theta}^2}\,. \tag{11}$$

Відносним еквівалентним напруженням $k_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{Ext}}$ на зовнішній поверхні оболонки у формулах (11) відповідає знак «плюс», а еквівалентним напруженням $k_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{Int}}$ на внутрішній поверхні – знак «мінус».

На рис. 2–5 і в табл. 1, 2 введено такі позначення відносних безрозмірних величин: $\rho_{0q} = \dfrac{r_{0q}}{\sqrt{cR}}$ – радіуси жорстких контурів, $s = \dfrac{S}{r_{01}}$ – ширина перемички між контурами. По вертикальній осі на рис. 2, 4 відкладали значення відносних еквівалентних напружень $k_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{Int}}$ як найбільших в оболонці. Біля кожної кривої вказано відповідне для неї значення величини відносної ширини перемички s. Параметр η, що відкладається по горизонтальній осі, приймає такі значення:

1) $\eta = 2(q-1) + \theta_q/\pi$ при $2(q-1) \le \eta \le 2q-1$. У розглянутому тут випадку симетрії щодо осі Ox параметр η описує половину контуру Γ_q і тому $0 \le \theta_q \le \pi$;

2) $\eta = 1 + (x_1 - r_{01})/S$ при $1 \le \eta \le 2$ – по перемичці S, тобто, коли $r_{01} \le x_1 \le r_{01} + S$.

У випадку двох однакових жорстких контурів та симетрії стосовно осей Ox і Oy епюри напружень наведено тільки на першому контурі Γ_1 і далі по перемичці до її середини, тобто для $1 \le \eta \le 1.5$.

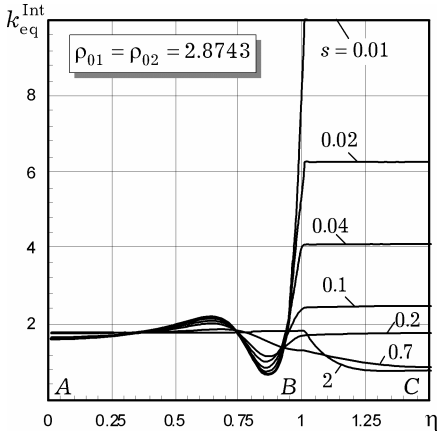

Рис. 2

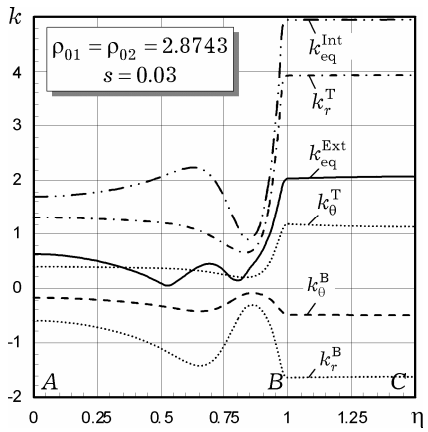

Рис. 3

Для порівняння з [2] для сферичної оболонки з двома однаковими круговими жорсткими контурами з радіусами $\rho_{01} = \rho_{02} = 2.8743$ виконано розрахунки, результати яких наведено на рис. 2, 3 і в табл. 1. У роботі [2] найменша ширина перемички, для якої були наведені результати, становила $s = 0.7$. На рис. 2 бачимо, що при такій ширині перемички найбільше напруження k_{eq}^{Int} залишається на жорсткому контурі отвору і трохи (на 2.6 %) більше, ніж при $s = 2$. Але, як видно на рис. 2, починаючи з $s = 0.1$ і при подальшому зменшенні перемички, максимальне напруження k_{eq}^{Int} зміщується на перемичку BC і значно зростає: при $s = 0.02$ напруження k_{eq}^{Int} у 3.3 рази, а при $s = 0.01$ – у 5.2 разів більше, ніж при $s = 0.7$. До цього ж випадку двох однакових жорстких контурів з радіусами $\rho_{01} = \rho_{02} = 2.8743$ відносяться рис. 3 для $s = 0.03$ і табл. 1 – для $s = 0.05$, де наведено значення напружень k_r^T, k_r^B, k_θ^T, k_θ^B, k_{eq}^{Ext}, k_{eq}^{Int}. З рис. 3 і табл. 1 бачимо, що найбільший внесок до зростання k_{eq}^{Int} вносить радіальне напруження k_r^T і у декілька разів менший – k_r^B.

Таблиця 1

k	$\rho_{01} = \rho_{02} = 2.8743$, $s = 0.05$				
	точка A, $\theta_1 = 0$, $\eta = 0$	$\theta_1 = \pi/2$, $\eta = 0.5$	$\theta_1 = 5\pi/8$, $\eta = 0.625$	точка B, $\theta_1 = \pi$, $\eta = 1$	точка C, $s/2$, $\eta = 1.5$
k_r^T	1.2953	1.2054	1.1079	3.1608	3.1735
k_θ^T	0.3886	0.3616	0.3324	0.9482	0.8832
k_r^B	-0.6093	-1.0880	-1.3690	-0.9453	-0.9356
k_θ^B	-0.1828	-0.3264	-0.4107	-0.2836	-0.2912
k_{eq}^{Ext}	0.6097	0.1043	0.2736	1.9691	2.0084
k_{eq}^{Int}	1.6928	2.0384	2.2063	3.6496	3.6658

На рис. 4, 5 і в табл. 2 наведено результати розрахунків для випадку двох нерівних кругових жорстких контурів з $\rho_{01} = 6$ і $\rho_{02} = 2$ при різних значеннях ширини перемички, віднесеної до радіуса більшого контуру. Зі зменшенням ширини перемички тут також, як і у випадку двох рівних контурів, спостерігається збільшення напружень на перемичці. При $s \le 0.05$ небезпечна, тобто найбільш напружена, зона знаходяться у точці D перетину меншого контуру з перемичкою.

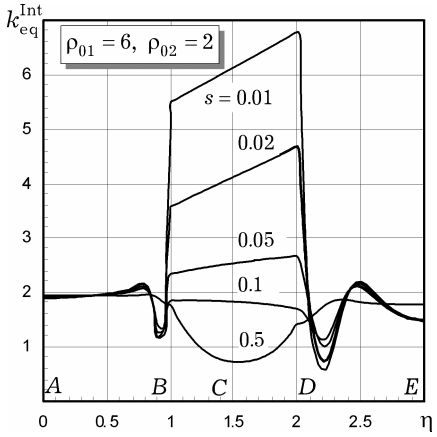

Рис. 4

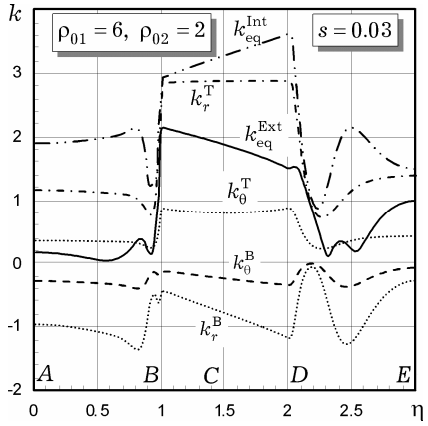

Рис. 5

Розрахунки для кривих на рис. 4, 5 виконано для випадку кругових отворів з $\rho_{01} \neq \rho_{02}$, тобто розміщених так, як показано на рис. 1. На рис. 4 бачимо, що при $s = 0.02$ напруження у точці D на 31% більші, ніж у точці B перетину більшого контуру Γ_1 з перемичкою і в 2.2 рази перевищують найбільші напруження k_{eq}^{Int} при $s = 0.1$. При $s = 0.01$ – відповідно на 26% і в 3.2 рази.

Таблиця 2

k	$\rho_{01}=6$, $s=0.04$, $\rho_{02}=2$				
	точка A, $\theta_1=0$	точка B, $\theta_1=\pi$	точка C, $s/2$	точка D, $\theta_2=0$	точка E, $\theta_2=\pi$
k_r^T	1.1570	2.5436	2.5785	2.5805	1.3939
k_θ^T	0.3471	0.7631	0.6831	0.7742	0.4182
k_r^B	-0.9847	-0.3521	-0.5992	-0.8605	-0.2903
k_θ^B	-0.2954	-0.1056	-0.1923	-0.2582	-0.0871
k_{eq}^{Ext}	0.1531	1.9478	1.7853	1.5288	0.9810
k_{eq}^{Int}	1.9036	2.5738	2.8429	3.0584	1.4969

Рис. 5 і табл. 2 (аналогічно, як рис. 3 і табл. 1) свідчать про те, що найбільший внесок в сумарні напруження k_{eq}^{Int} вносять радіальні напруження k_r^T і k_r^B.

Достовірність отриманих результатів.

– Перевіряли задоволення граничних умов шляхом безпосереднього обчислення заданих зусиль і моментів у точках контурів Γ_1 та Γ_2 з використанням рядів (5) і (6), тобто без застосування теореми Графа та ряду Лорана. Обчислення проводили на ПК у середовищі пакета Maple-10. Точність обчислень можна регулювати, задаючи значення системної змінної *Digits*, а також задаючи число гармонік n у розв'язках (5), (8). Так, для випадку двох однакових контурів (див. результати, наведені в табл. 1) при $n = 45$ і $Digits = 57$, похибка виконання граничних умов при чисельній реалізації не перевищувала 0.06 % від найбільших напружень в суцільній оболонці (тобто від 1). У випадку двох неоднакових контурів, результати обчислень яких наведено в табл. 2, похибка виконання граничних умов не перевищувала 0.12% при $n = 70$ і $Digits = 77$.

– Перевіряли виконання вихідного рівняння (2) функцією Ф з обчисленими в результаті розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь коефіцієнтами a_{qn}, c_{qn}. Абсолютна похибка не перевищувала 10^{-54} при $Digits = 57$.

– Для порівняння з результатами для сферичної оболонки з одним жорстким включенням [4] були проведені розрахунки при $s = 100$, тобто, коли взаємовплив жорстких контурів відсутній. Отримано повне співпадіння результатів з [4] для ізотропної оболонки при $\delta = 0$.

Висновки. Наведені в роботі чисельні дослідження для сферичної оболонки показали, що при зменшенні ширини перемички між жорсткими контурами, що не деформуються, напруження на ній зростають і можуть збільшитися у декілька разів (у розглянутих вище прикладах у 2–5 разів). Проведений таким чином аналіз чисельних результатів дозволяє визначити, в якому місці сферичної оболонки виникають небезпечні зони найбільшої концентрації напружень, оцінити їх величину, а також ефективність підкріплень кругових отворів. Отримані результати разом із розробленою в середовищі Maple-10 програмою розрахунку можуть бути використані в інженерній практиці.

У подальших дослідженнях перспективним є розв'язання аналогічних задач для багатозв'язної трансверсально-ізотропної сферичної оболонки з отворами та включеннями.

1. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К. И.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 1.)
2. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1970. – 324 с.
3. *Закора С. В.* Растяжение цилиндрической оболочки с конечным числом жестких включений // Теорет. и прикл. механика. – 1981. – № 12. – С. 71–77.
4. *Закора С. В., Чехов Вал. Н.* Напряженное состояние трансверсально-изотропной сферической оболочки с жестким круговым включением // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 12. – С. 67–73.

   Те саме: *Zakora S. V., Chekhov Val. N.* Stress state of a transversely isotropic spherical shell with a rigid circular inclusion // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 12. – P. 1384–1390.

О ВЗАИМОВЛИЯНИИ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ С ЖЁСТКИМИ КОНТУРАМИ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрена задача о напряжённом состоянии пологой изотропной сферической оболочки с двумя круговыми отверстиями с жёсткими недеформируемыми контурами. Численно исследованы случаи весьма близкого расположения контуров как одинаковых, так и неравных радиусов в оболочке под внутренним давлением. Обнаружено значительное увеличение напряжений на перемычке между контурами при их сближении.

ON INTERACTION OF CLOSE LOCATED CIRCULAR HOLES WITH RIGID CONTOURS IN A SPHERICAL SHELL

The problem on the stress state of a shallow isotropic spherical shell with two circular holes with rigid undeformable contours is considered. The cases of close enough location of contours of both identical and unequal radii in a shell at uniform pressure are numerically investigated. The considerable increase of stresses on a bridge between contours at their coming together is found.

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
06.03.09