

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД НУЛЬОВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ SH-ХВИЛЬ ЧАСТКОВО ВІДШАРОВАНИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ З КУСКОВО-ГЛАДКИМ КОНТУРОМ

Для задач антиплоского зсуву запропоновано методика визначення спектральних характеристик SH-хвиль, розсіяних пружним включенням кусково-гладкої форми з тріщиною на межі розділу середовищ. Методика базується на використанні методу нульового поля

Взаємодія пружних хвиль з циліндричним включенням переважно розглядалась за умов ідеального контакту між включенням і зовнішнім середовищем (матрицею). Однак у багатьох практично важливих випадках має місце неідеальний контакт складових композиту і, як наслідок, – зміна його механічних властивостей. Виявлення таких недосконалостей є однією з найважливіших задач ультразвукового неруйнівного контролю. Розв'язанню її сприяють теоретичні дослідження поширення хвиль у тілах з тріщинами на межі розділу включення і матриці.

При виготовленні сучасних композитних матеріалів використовуються наповнювачі різних форм, в тому числі з кусково-гладкою границею [2, 8, 9]. Вплив відшарувань кругових волокон на характеристики розсіяного поля детально проаналізовано в роботах [12, 13]. У [5–7] розглянуто задачу розсіяння стаціонарної зсувної горизонтально поляризованої хвилі неоднорідностями квазіквадратної та квазітрикутної форм (квадрат і трикутник із заокругленими кутами) при наявності тріщини на поверхні розділу між включенням і матрицею. Розв'язок задачі знайдено за допомогою методу нульового поля. При цьому для невідомих зміщень і напружень на контурі неоднорідності використано подання у вигляді тригонометричних рядів Фур'є з ваговими множниками, що відображають сингулярний характер поведінки шуканих функцій в околі точок зміни граничних умов. У випадку включення кусково-гладкої форми, врахування асимптотичної поведінки зміщень і напружень в околі особливих точок контуру неоднорідності значно ускладнює алгоритм розв'язання задачі [3, 4, 10, 11]. Нижче для знаходження полів, розсіяних такими об'єктами, запропоновано спрощену схему методу нульового поля, що дозволяє оминати труднощі, пов'язані з сингулярним характером розв'язків у нерегулярних точках.

Нехай у безмежному пружному ізоотропному тілі з модулем зсуву μ_1 і густиною ρ_1 міститься чужорідне циліндричне включення з відповідними параметрами μ_2 , ρ_2 . Початок відліку O декартової системи координат x, y, z розташовано всередині циліндра, а вісь Oz напрямлена вздовж його осі. Контуром поперечного перетину включення є кусково-гладка крива S , на частині S_1 якої включення ідеально контактує з матрицею, а на $S_0 = S \setminus S_1$ міститься тріщина (рис. 1).

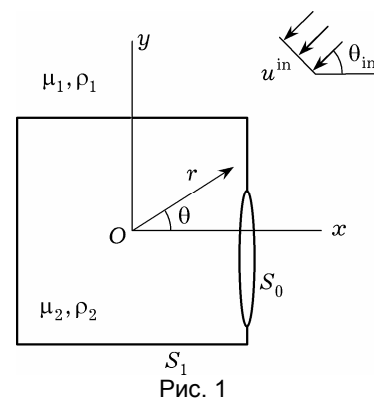


Рис. 1

На включення набігає плоска хвиля зсуву (SH-хвиля)

$$u^{\text{in}}(x, y) = u_0 \exp[-ik_1(x \cos \theta_{\text{in}} + y \sin \theta_{\text{in}})], \quad (1)$$

де u_0 , θ_{in} – амплітуда та кут падіння хвилі, $k_1 = \omega / c_1$ – хвильове число

поперечних хвиль у матриці (ω – кругова частота, c_1 – швидкість поперечних хвиль). За умов поздовжнього зсуву зміщення $u^1(x, y)$ та $u^2(x, y)$ у матриці та включенні задовольняють рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + k_j^2)u^j(x, y) = 0, \quad (x, y) \in W_j, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

та граничні умови

$$u^1(x, y) = u^2(x, y), \quad \gamma \frac{\partial u^1(x, y)}{\partial n} = \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial n}, \quad \gamma = \mu_1/\mu_2, \quad (x, y) \in S_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^j(x, y)}{\partial n} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (x, y) \in S_0, \quad (4)$$

де \mathbf{n} – зовнішня нормаль до S ; k_2 – хвильове число поперечних хвиль у включенні.

На безмежності виконується умова випромінювання Зомерфельда

$$u^s(x, y) = \frac{e^{ik_1 r + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_1 r}} f(\omega, \theta), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$u^s(x, y) = u^1(x, y) - u^{\text{in}}(x, y), \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Тут $u^s(x, y)$ – зміщення у розсіяному включенням полі, $f(\omega, \theta)$ – комплексна амплітуда розсіяння.

Для розв'язання задачі (1)–(5) нижче запропоновано методу, яка базується на загальних ідеях методу нульового поля. З інтегральних зображень переміщень у матриці та включенні отримуємо рівняння моментів [5]:

$$\int_S \left[u^1 \frac{\partial}{\partial n} \Psi_{\sigma m}^1 - \Psi_{\sigma m}^1 \frac{\partial}{\partial n} u^1 \right] dS = 4iu_0 b_{\sigma m}^{\text{in}},$$

$$\int_S \left[u^2 \frac{\partial}{\partial n} \text{Re} \Psi_{\sigma m}^2 - (\text{Re} \Psi_{\sigma m}^2) \frac{\partial}{\partial n} u^2 \right] dS = 0, \quad (6)$$

$$\Psi_{\sigma m}^j(\mathbf{x}) = H_m^{(1)}(k_j r) C_{\sigma m}(\theta), \quad j = 1, 2,$$

$$C_{\sigma m}(\theta) = \begin{cases} \cos m\theta, & \sigma = 1, m = 0, 1, \dots, \\ \sin m\theta, & \sigma = 2, m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad b_{\sigma m}^{\text{in}} = (-i)^m C_{\sigma m}(\theta_{\text{in}}),$$

де $H_m^{(1)}(x)$ – функція Ганкеля першого роду порядку m . Невідомі зміщення u^1, u^2 та їхні нормальні похідні на контурі включення шукають у вигляді рядів за деякою повною системою функцій. При цьому, як правило, беруть до уваги характер поведінки шуканих полів в околі нерегулярних точок, і система функцій вибирається з урахуванням цього характеру [5, 10, 11]. Однак при визначенні розсіяних неоднорідностями полів у дальній хвильовій зоні у багатьох випадках не обов'язково явно враховувати локальний характер поведінки розв'язків поблизу нерегулярних точок [1]. Тому шукані величини на границі розділу матеріалів доцільно подати у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty} [x_{11m} \cos(m\theta) + x_{12m} \sin(m\theta)] = \begin{cases} a \frac{\partial u^1(\theta)}{\partial n}, & (r, \theta) \in S_1, \\ u^1(\theta), & (r, \theta) \in S_0, \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [x_{21m} \cos(m\theta) + x_{22m} \sin(m\theta)] = u^2(\theta), \quad (r, \theta) \in S, \quad (7)$$

де a – характерний розмір включення. З урахуванням цих розвинень і граничних умов (3), (4) з рівнянь моментів (6) отримуємо систему лінійних

алгебраїчних рівнянь безмежного порядку відносно невідомих коефіцієнтів x_{ijm} , $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma', m'} (a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) &= 4iu_0 b_{\sigma m}^{\text{in}}, \\ \sum_{\sigma', m'} (a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) &= 0, \\ a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} &= \int_{S_0} C_{\sigma' m'}(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \psi_{\sigma m}^1 dS - a^{-1} \int_{S_1} C_{\sigma' m'}(\theta) \psi_{\sigma m}^1 dS, \\ a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} &= \int_{S_1} C_{\sigma' m'}(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \psi_{\sigma m}^1 dS, \\ a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} &= -\gamma a^{-1} \int_{S_1} C_{\sigma' m'}(\theta) \text{Re} \psi_{\sigma m}^2 dS, \\ a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} &= \int_S C_{\sigma' m'}(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \text{Re} \psi_{\sigma m}^2 dS. \end{aligned} \quad (8)$$

Систему рівнянь (8) розв'язуємо методом редукції. Виходячи з формули Гельгольмца, для амплітуди розсіяння $f(\omega, \theta)$ та повного перерізу розсіяння маємо

$$\begin{aligned} f(\omega, \theta) &= \sum_{\sigma, m} \sum_{\tau, \sigma', m'} \varepsilon_m i^{-m} C_{\sigma m}(\theta) x_{\tau \sigma' m'} \text{Re} a_{1\sigma m, \tau \sigma' m'}, \\ \sigma^{\text{sc}} &= \frac{1}{k_1 u_0} \text{Im} f(\omega, \pi + \theta_{\text{in}}). \end{aligned} \quad (9)$$

Надалі числові розрахунки виконано для випадку скляного включення ($\mu_2 = 29.9$ ГПа, $\rho_2 = 2550$ кг/м³) і матриці з епоксидної смоли ($\mu_1 = 1.28$ ГПа, $\rho_1 = 1250$ кг/м³). Встановлено, що для розглянутих розсіювачів порядок редукції M системи рівнянь (8) можна вибрати таким чином: $M = 6 + m_d$ при $k_1 a \leq 3$, $M = E(2ka) + m_d$ при $3 < k_1 a \leq 5$ ($E(x)$ – ціла частина x). Параметр m_d визначаємо шляхом числового експерименту. Для ілюстрації збіжності запропонованого методу на рис. 2 наведено спектральні залежності безрозмірних амплітуд розсіяння $f_0 = u_0^{-1} |f(\omega, \theta_{\text{sc}})|$ (θ_{sc} – кут спостереження) при різних значеннях параметра редукції M . Обчислення виконано для неоднорідності квадратної форми з тріщиною на одній із сторін квадрата при кутах падіння і спостереження $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{sc}} = 45^\circ$. Видно, що зі зростанням хвильового розміру $k_1 a$ порядок редукції системи рівнянь (8) зростає.

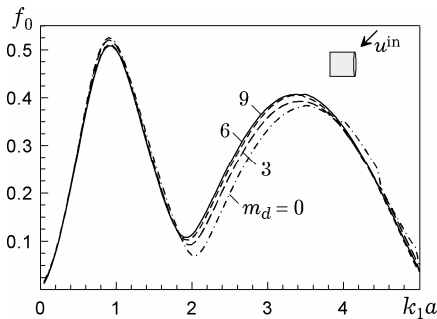


Рис. 2

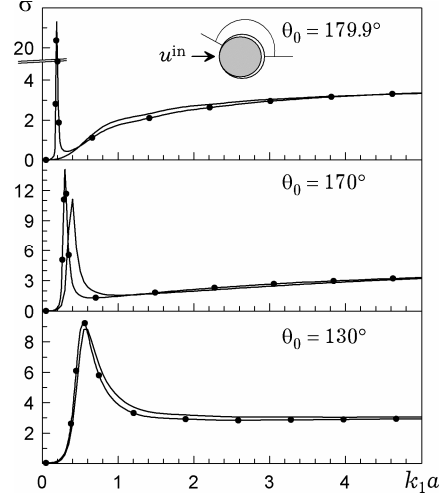


Рис. 3

З метою перевірки достовірності та коректності числових результатів, отриманих запропонованим методом, розглянуто задачу розсіяння SH-хвилі частково відшарованим круговим включенням. На рис. 3 наведено нормований переріз розсіяння $\sigma = \sigma^{sc} / a$ в залежності від хвильового розміру $k_1 a$ при різних кутах розхилу $2\theta_0$ інтерфейсної тріщини. Суцільні криві отримано за допомогою викладеного вище підходу. Марковані криві розраховано методом нульового поля з урахуванням локальних особливостей розв'язків в околі вершин тріщини [3]. Вони співпадають з відповідними кривими, отриманими в [9] іншим методом. Видно, що похибка запропонованого підходу є суттєвою тільки у випадку дуже великих розхилів тріщин у вузькому діапазоні резонансних частот. Для тріщини з розхилом 260° максимальна похибка не перевищує 10%. Додаткові дослідження показали, що зі зменшенням розміру тріщини різниця між результатами, отриманими різними методами, нівелюється.

Запропонований вище алгоритм розв'язання задачі (1)–(5) має значні переваги тоді, коли дослідження особливостей розв'язків в околі нерегулярних точок границі розділу складових пружної системи пов'язане зі значними математичними труднощами. У цьому випадку розроблений підхід дозволяє оминати ці труднощі і суттєво спростити розрахунок важливих хвильових характеристик. Для прикладу проаналізуємо вплив форми частково відшарованого циліндричного пружного включення на спектр безрозмірної амплітуди розсіяння f_0 (рис. 4). Поперечним перерізом циліндра є правильний багатокутник, вписаний в коло радіуса a . Рис. 4а відповідає квадратному перерізу, а рис. 4б – трикутному. Тріщина повністю займає одну із сторін включення. Падаюча хвиля поширюється в напрямку, перпендикулярному до цієї сторони. Аналіз наведених результатів засвідчує, що для включення трикутної форми в діапазоні $0 < k_1 a \leq 5$ амплітуда розсіяння «назад» більша від амплітуди розсіяння «вперед». Для квадратного включення така закономірність має місце у частотному інтервалі $0 < k_1 a < 2.5$. Для обох форм включення найменший рівень розсіяних полів спостерігається в напрямках, перпендикулярних до напрямку падіння хвилі. Виявлені закономірності поведінки розсіяного поля можуть бути використані при розробці методів неруйнівного контролю композитних матеріалів.

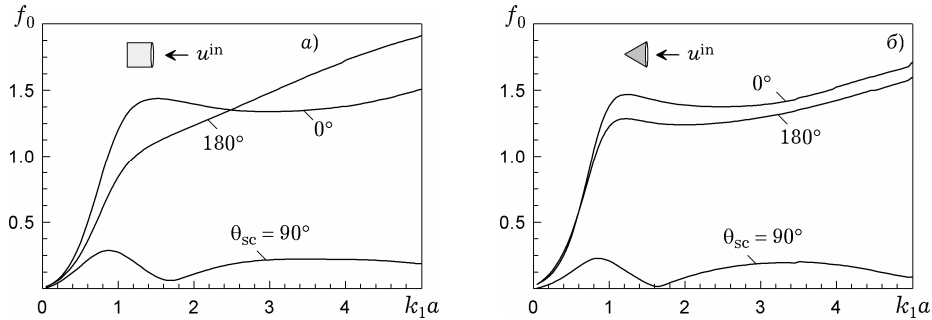


Рис. 4

Проведені дослідження демонструють доцільність використання запропонованого модифікованого методу нульового поля при розв'язанні задач розсіяння пружних хвиль включеннями з кусково-гладкою границею при наявності міжфазних тріщин. Ефективність такого підходу обумовлена значним спрощенням математичних викладок і суттєвим зменшенням часу, необхідного для реалізації конкретних числових розрахунків. Некоректні результати мають місце в окремих випадках, наприклад, для майже повністю відшарованих включень, коли зона ідеального механічного контакту між складовими композиту мала.

1. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – Киев: Наук. думка, 1986. – 240 с.
2. Bond I., Hucker M., Weaver P., Haq S. Mechanical behaviour of circular and triangular glass fibers and their composites // Compos. Sci. Technol. – 2002. – **62**. – P. 1051–1061.
3. Emets V. F., Kit H. S., Kunets Ya. I. Interaction of time-harmonic SH waves with a crack-like inclusion: Edge region analysis // Int. J. Fracture. – 1998. – **94**. – P. 51–62.
4. Kit H. S., Emets' V. F., Kunets' Ya. I. A model of the elastodynamic interaction of a thin-walled inclusion with a matrix under antiplanar shear // J. Math. Sci. – 1999. – **97**. – P. 3810–3816.
Те саме: Kim Г. С., Ємець В. Ф., Кунець Я. І. Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 54–61.
5. Kunets Y. I., Matus V. V., Mykhas'kiv V. V., Boström A., Zhang Ch. Scattering of a SH-wave by an elastic fiber of nonclassical cross section with an interface crack // Mech. Composite Materials. – 2008. – **44**. – P. 165–172.
6. Matus V. V., Kunets Ya. I. Null field method of SH-wave scattering by partially debonded elastic inclusion // DIPED–2008: Proc. 13th Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. – Lviv – Tbilisi, 2008. – P. 176–178.
7. Matus V. V., Kunets Ya. I., Porochovs'kyj V. V., Mishchenko V. O. Scattering of longitudinal wave by partially debonded elastic fiber // DIPED–2009: Proceedings–2009 Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. – Lviv, 2009. – P. 276–278.
8. Shindo Y., Nakamura T., Narita F. The application of the boundary element method to the problem of wave diffraction from a diamond shaped inclusion // Open Mech. J. – 2008. – **2**. – P. 62–66.
9. Shindo Y., Narita F., Nakamura T. Scattering of elastic waves by a star shaped inclusion // Z. Angew. Math. Mech. – 2008. – **88**, No. 3. – P. 62–66.
10. Varadan V. K., Varadan V. V., Tsao S. J. Scattering of acoustic waves by rigid cylindrical objects with sharp corners // J. Acoust. Soc. Am. – 1982. – **72**, No. 6. – P. 1957–1964.
11. Wall D. J. N., Varadan V. V., Varadan V. K. Dynamic stress concentrations of cylindrical cavities with sharp and smooth boundaries: I. SH waves // Wave Motion. – 1981. – **3**. – P. 203–213.
12. Wang Y.-H., Wang D. Scattering of elastic waves by a rigid cylindrical inclusion partially debonded from its surrounding matrix. I. SH case // Int. J. Solids Struct. – 1996. – **33**. – P. 2789–2815.
13. Yang Y., Norris A. N. Shear wave scattering from a debonded fiber // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – **39**. – P. 273–274.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД НУЛЕВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ SH-ВОЛН ЧАСТИЧНО ОТСЛОЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМ КОНТУРОМ

Для задач антиплоского сдвига предложена методика определения спектральных характеристик SH-волн рассеянных упругим включением кусочно-гладкой формы с трещиной на границе раздела. Методика базируется на использовании метода нулевого поля.

MODIFIED NULL FIELD METHOD IN PROBLEM ON SCATTERING SH-WAVES BY PARTIALLY DEBONDED ELASTIC INCLUSION WITH PIECEWISE SMOOTH COUNTER

For the problems of anti-plane strain a procedure is proposed to define the spectral characteristics of SH-waves, scattered by elastic inclusion of piecewise smooth shape with a crack on the interface. The procedure is based on utilization of the null-field method.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
24.09.09