

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С РАДИАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

Рассматривается осесимметричная задача о свободных продольных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров для некоторых типов граничных условий на торцах. Пьезокерамический материал поляризован в радиальном направлении. Боковые поверхности цилиндра покрыты тонкими электродами, которые закорочены. Метод решения задачи основан на комбинации метода сплайн-коллокаций по продольной координате и метода пошагового поиска по радиальной координате. Приведены результаты численного анализа цилиндра из пьезокерамики PZT 4 в широком диапазоне изменения геометрических параметров цилиндра.

Решение динамических задач для толстостенных элементов как пространственных задач теории упругости связано со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных, а также необходимостью удовлетворять краевым условиям на ограничивающих тело поверхностях. Эти трудности существенно возрастают в условиях связанности полей и анизотропии пьезоэлектрических материалов [1, 2, 8, 9].

Следует отметить, что в литературе известны только отдельные работы, посвященные исследованию проблемы колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [10–12, 14, 15].

Метод решения, основанный на комбинации метода сплайн-коллокаций и метода пошагового поиска для исследования напряженно-деформированного состояния и анализа спектра собственных частот колебаний упругих тел, применялся в работах [3–5, 7]. Такой подход использовался в работе [6] для исследования свободных осесимметричных колебаний полых пьезокерамических цилиндров с поляризацией пьезокерамики в осевом направлении.

Целью настоящей работы является исследование собственных осесимметричных колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины из пьезокерамики, поляризованной в радиальном направлении. При этом боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими электродами, которые закорочены. На торцах цилиндра рассматривается жесткая заделка.

Сформулированная задача описывается взаимосвязанной системой уравнений, состоящей из:

– осесимметричных продольных уравнений движения, которые в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 \tilde{u}_r - 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 \tilde{u}_z = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнений электростатики

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (2)$$

– геометрических соотношений

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \tilde{u}_r, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала; ω – круговая частота; \tilde{u}_i – компоненты вектора перемещений ($u(r, \theta, z, t) = \tilde{u}(r, \theta, z)e^{i\omega t}$); D_i – компоненты вектора электрической индукции; E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля; φ – электростатический потенциал; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z, \\ \sigma_{rz} &= 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r, \\ D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{13}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z, \\ D_z &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_z.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь c_{ij} – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij} – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Граничные условия на поверхностях цилиндра задаем следующие:

- боковые поверхности $r = R_0 \pm h$ свободны от внешних усилий: $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$, и покрыты тонкими электродами, которые закорочены: $\varphi = 0$;
- торцы цилиндра $z = \pm L/2$ жестко заземлены: $\tilde{u}_r = 0$, $\tilde{u}_z = 0$, и свободны от электродов: $D_z = 0$.

Тут R_0 – радиус серединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра; L – длина цилиндра.

Подставив соотношения (3) и (4) в уравнения (1) и (2) и разрешив их относительно $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial r^2}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= -\frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left(\frac{\tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} u_r + \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial z^2} - \\ &\quad - \frac{\tilde{c}_{33}\tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial r \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} &= -\frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\tilde{e}_{15}\tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} \tilde{u}_r - \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial z^2} - \\ &\quad - \left(\frac{\tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}}{\Delta} + 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial r \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial r^2} &= -\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} - \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} - \\ &\quad - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r \partial z} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} \tilde{u}_z - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r}.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta &= e_{33}^2 + c_{33}\varepsilon_{33}, & \Delta_1 &= (c_{12} - c_{13})e_{33} + c_{33}e_{13}, \\ \Delta_2 &= c_{33}(e_{15} + e_{33}) - (c_{13} + c_{55})e_{33}, & \Delta_3 &= c_{33}\varepsilon_{11} + e_{15}e_{33},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_4 &= c_{33}e_{15} - c_{55}e_{33}, & \Delta_5 &= (c_{12} - c_{13})\varepsilon_{33} - e_{13}e_{33}, \\
\Delta_6 &= (c_{13} + c_{55})\varepsilon_{33} + (e_{15} + e_{33})e_{33}, & \Delta_7 &= e_{33}\varepsilon_{11} - e_{15}e_{33}, \\
\Delta_8 &= e_{15}e_{33} + c_{55}\varepsilon_{33},
\end{aligned} \tag{6}$$

а также безразмерные величины

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}. \tag{7}$$

Здесь ω – круговая частота; $\lambda = 10^{10}$ Па; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Функции $\varphi(r, z)$, $\tilde{u}_r(r, z)$, $\tilde{u}_z(r, z)$ ищем в виде

$$\begin{aligned}
\varphi(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_{2i}(z), & \tilde{u}_r(r, z) &= \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_{2i}(z), \\
\tilde{u}_z(r, z) &= \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_{1i}(z),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $x = \frac{r - R_0}{h}$; $u_i(x)$, $v_i(x)$, $w_i(x)$ – искомые функции по переменной x ; $\varphi_{ji}(z)$, $j = 1, 2$, $i = 0, 1, \dots, N$, – линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке $\Delta: -\frac{L}{2} = z_0 < z_1 < \dots < z_n = \frac{L}{2}$, учитывающие граничные условия на торцах цилиндра при $z = -\frac{L}{2}$ и $z = \frac{L}{2}$. Заметим, что в систему (5) входят производные от компонент вектора решения, не выше второго порядка, следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}
\Phi_j &= [\varphi_{ji}(\xi_k)], \quad k, i = 0, \dots, N, \quad j = 1, 2, \\
\bar{u} &= [u_0, u_1, \dots, u_N]^\top, \quad \bar{v} = [v_0, v_1, \dots, v_N]^\top, \quad \bar{w} = [w_0, w_1, \dots, w_N]^\top, \\
\bar{a}_{k\ell} &= [a_{k\ell}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{k\ell}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{k\ell}(x, \xi_N, \Omega^2)]^\top, \\
(k, \ell) &\in \{(k, \ell) \mid k, \ell = 1, \dots, 6\},
\end{aligned} \tag{9}$$

система (5) превратится в систему $6(N+1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций \bar{u} , \bar{u}' , \bar{v} , \bar{v}' , \bar{w} , \bar{w}' :

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}}{dx} &= \bar{u}', & \frac{d\bar{v}}{dx} &= \bar{v}', & \frac{d\bar{w}}{dx} &= \bar{w}', \\
\frac{d\bar{u}''}{dx} &= \Phi_2^{-1} \left[(\bar{a}_{11}\Phi_2 + \bar{a}_{12}\Phi_2'')\bar{u} + \bar{a}_{13}\Phi_2\bar{u}' + \right. \\
&\quad \left. + \bar{a}_{14}\Phi_1'\bar{v} + \bar{a}_{15}\Phi_1'\bar{v}' + \bar{a}_{16}\Phi_1'\bar{w} + \bar{a}_{17}\Phi_1'\bar{w}' \right], \\
\frac{d\bar{v}''}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\bar{a}_{21}\Phi_2'\bar{u} + \bar{a}_{22}\Phi_2'\bar{u}' + \bar{a}_{23}\Phi_1'\bar{v} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{a}_{24}\Phi_1'\bar{v}' + (\bar{a}_{25}\Phi_1 + \bar{a}_{26}\Phi_1'')\bar{w} + \bar{a}_{27}\Phi_1'\bar{w}' \right], \\
\frac{d\bar{w}''}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\bar{a}_{31}\Phi_2'\bar{u} + \bar{a}_{32}\Phi_2'\bar{u}' + \bar{a}_{33}\Phi_1'\bar{v} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{a}_{34}\Phi_1'\bar{v}' + (\bar{a}_{35}\Phi_1 + \bar{a}_{36}\Phi_1'')\bar{w} + \bar{a}_{37}\Phi_1'\bar{w}' \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= -\frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}}, & \bar{a}_{12} &= -\frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}}, & \bar{a}_{13} &= -\frac{1}{x}, & \bar{a}_{14} &= -\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}, \\
\bar{a}_{15} &= -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}, & \bar{a}_{16} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}, & \bar{a}_{17} &= -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}}, \\
\bar{a}_{21} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{x}, & \bar{a}_{22} &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, & \bar{a}_{23} &= -\frac{\Delta_3}{\Delta}, & \bar{a}_{24} &= \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{x}, \\
\bar{a}_{25} &= \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta}, & \bar{a}_{26} &= \frac{\Delta_4}{\Delta}, & \bar{a}_{27} &= \frac{\tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{x}, & \bar{a}_{31} &= \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{1}{x}, \\
\bar{a}_{32} &= -\frac{\Delta_6}{\Delta}, & \tilde{a}_{33} &= -\frac{\Delta_7}{\Delta}, & \bar{a}_{34} &= \frac{\tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x}, & \bar{a}_{35} &= \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta}, \\
\bar{a}_{36} &= -\frac{\Delta_8}{\Delta}, & \bar{a}_{37} &= -\left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} + 1 \right) \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Эту систему можно записать в матричном виде

$$\frac{d\bar{\mathcal{R}}}{dx} = A(x, \Omega)\bar{\mathcal{R}}. \quad (11)$$

Ненулевые элементы матрицы A такие:

$$\begin{aligned}
A_{12} &= 1, & A_{21} &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{11}\Phi_2 + \bar{a}_{12}\Phi_2''), & A_{22} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{13}\Phi_2, \\
A_{23} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{14}\Phi_2'', & A_{24} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{15}\Phi_1', & A_{25} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{16}\Phi_1', \\
A_{26} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{17}\Phi_1', & A_{34} &= 1, & A_{41} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{21}\Phi_2', \\
A_{42} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{22}\Phi_2', & A_{43} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{23}\Phi_1'', & A_{44} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{24}\Phi_1, \\
A_{45} &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{25}\Phi_1 + \bar{a}_{26}\Phi_1''), & A_{46} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{27}\Phi_1', & A_{56} &= 1, \\
A_{61} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{31}\Phi_2', & A_{62} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{32}\Phi_2', & A_{63} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{33}\Phi_1'', \\
A_{64} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{34}\Phi_1, & A_{65} &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{35}\Phi_1 + \bar{a}_{36}\Phi_1''), & A_{26} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{37}\Phi_1.
\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь вид

$$B_1\bar{\mathcal{R}}(-1) = 0, \quad B_2\bar{\mathcal{R}}(1) = 0.$$

Результаты численных исследований, полученных методом сплайн-аппроксимации при $N = 24$ и $N = 32$, сравнивались с результатами, полученными в работе [13]. В качестве материала цилиндра рассматривалась пьезокерамика PZT 4. На торцах рассматривались условия шарнирного опирания. Результаты сравнения представлены в табл. 1.

Таблица 1

Порядковый номер частоты	$N = 24$	$N = 32$	Значения собственных частот, полученные в работе [13]
1	0.7072	0.6738	0.6737
2	0.9264	0.8951	0.8970
3	1.0513	1.024	1.020
4	1.3522	1.350	1.354
5	1.8775	1.874	1.874
6	1.9135	1.941	1.938

Для случая, когда на торцах цилиндра задана жесткая заделка, сравнение собственных частот проводилось с результатами, полученными на основании аналогичной методики, разработанной для упругого цилиндра и описанной в работе [3]. В качестве материала цилиндра при этом рассматривалась пьезокерамика PZT 4 с пьезомодулями, равными нулю. Результаты сравнения представлены в табл. 2.

Таблица 2

Порядковый номер частоты	Собственные частоты упругого цилиндра $N = 20$	Собственные частоты пьезокерамического цилиндра $N = 24$
1	0.7787	0.7787
2	0.8061	0.8060
3	1.0321	1.0330
4	1.2421	1.2410
5	1.6565	1.6520
6	1.7410	1.7430

На рис. 1 представлена зависимость первых пяти частот (i – порядковый номер частоты) собственных колебаний от относительной длины цилиндра L/h (при $\varepsilon = h/R_0 = 0.25$). В качестве материала цилиндра рассматривалась пьезокерамика PZT 4. Сплошными линиями изображены значения собственных частот с учетом пьезоэффекта, пунктирными – без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Из приведенного рисунка видно, что влияние пьезоэффекта приводит к «ужесточению» материала, то есть повышению значения собственных частот. При этом при определении первой собственной частоты влиянием пьезоэффекта можно пренебречь вплоть до относительной длины $L/h = 5$. Для второй частоты заметное влияние пьезоэффекта наблюдается для достаточно длинных цилиндров ($L/h < 8$). Для более высоких частот это влияние заметно для более длинных цилиндров.

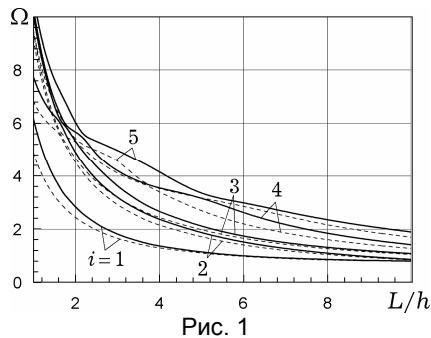


Рис. 1

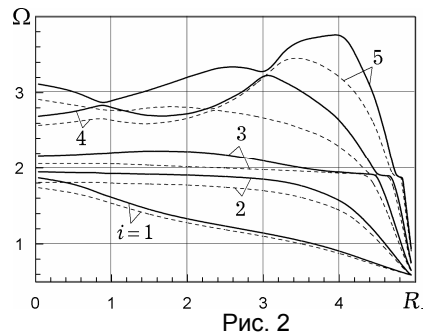


Рис. 2

На рис. 2 представлена зависимость первых пяти собственных частот от относительного внутреннего диаметра цилиндра R_- , при этом длина цилиндра $L/h = 5$ и внешний диаметр $R_+ = 5$ остаются фиксированными. Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне от 0.05 до 4.95 единиц, то есть от практически сплошного цилиндра до очень тонкой цилиндрической оболочки. Материалом цилиндра также выбрана пьезокерамика PZT 4. Из анализа приведенных кривых следует, что при увеличении толщины цилиндра происходит резкое увеличение собственных частот колебаний. Причем можно отметить, что только для первых трех частот при увеличении толщины цилиндра будет происходить возрастание собственной частоты колебаний. Для более высоких частот после резкого роста частоты с увеличением толщины затем происходит ее плавное снижение, чего не наблюдается при увеличении относительной длины цилиндра (рис. 1). С ростом относительной длины цилиндра собственная частота колебаний всегда возрастает. Влияние пьезоэффекта для собственных частот, начиная со второй и выше, проявляется даже для достаточно тонких цилиндров. Лишь при определении первой собственной частоты им можно пренебречь практически без потери точности в определении частоты на участке $R_- \geq 4$.

Анализируя приведенные рисунки можно отметить, что только первая и третья ветка на рис. 1 и первые две ветки на рис. 2 являются относительно простыми кривыми. Для зависимостей более высоких собственных частот структура спектра усложняется. Характерны участки с малым изменением частот от геометрических параметров (назовем их «плато») с дальнейшим сближением значений частот (назовем эти точки «точками притяжения»). Причем эти «плато» как на рис. 1, так и на рис. 2 расположены вдоль некоторых характерных линий. Так, на рис. 1 это участок $1 \leq \frac{L}{h} \leq 3$ для второй, третьей, четвертой и пятой частот, участок $4 \leq \frac{L}{h} \leq 6$ для четвертой и пятой частот, а также $\frac{L}{h} \approx 5$ для четвертой и пятой собственных частот. На рис. 2 это область $4 \leq R_- \leq 5$ для третьей, четвертой и пятой частот, а также $R_- \approx 3$ и $R_- \approx 1$ для четвертой и пятой частот. Можно предположить, что описанные «точки притяжения» собственных частот являются «неблагоприятными» для материала, поскольку малому изменению частоты соответствует существенная перестройка геометрии колебаний. Однако подобное утверждение требует дополнительных исследований.

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 75–84.
2. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Особливості числового розв'язування зв'язаних задач про визначення електромагнітних, теплових і механічних полів у деформованих термочутливих електропровідних тілах за квазіусталених електромагнітних навантажень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 166–177.
3. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – **46**, № 10. – С. 74–85.
То же: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Using spline-approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of thick-walled orthotropic cylinders // Int. Appl. Mech. – 2008. – **46**, No. 10. – P. 1137–1147.
4. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 91–102.
То же: Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P. Stress state of nonthin orthotropic shells with varying thickness and rectangular planform // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 8. – P. 905–915.
5. Григоренко А. Я., Яремченко С. Н. Анализ напряженного состояния ортотропных цилиндрических эллиптических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С. 53–62.
То же: Grigorenko A. Ya., Yaremchenko S. N. Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 9. – P. 998–1005.
6. Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоца І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.
То же: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Loza I. A. Solution of an axisymmetric problem of free vibrations of piezoceramic hollow cylinders of finite length by the spline collocation method // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 2. – P. 290–300.
7. Григоренко Я. М., Авраменко О. А. Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых нетонких ортотропных конических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 46–58.
То же: Grigorenko A. Ya., Avramenko O. A. Stress-strain analysis of closed nonthin orthotropic conical shells of varying thickness // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 6. – P. 635–643.

8. Карнаузов В. Г., Ткаченко Я. В., Зражевська В. Ф. Дослідження гармонічних коливань сферичної оболонки з фізично нелінійного п'єзоелектричного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 125–129.
9. Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н. Изгиб пьезокерамического неоднородного слоя при скользящей заделке его торцов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 86–95.
10. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – **22**, № 3. – С. 393–399.
11. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 11. – С. 15–19.
То же: *Shul'ga N. A., Borisenko L. V. Vibrations of an axially polarized piezoceramic cylinder during electrical loading // Int. Appl. Mech. – 1989. – 25, No. 11. – P. 1070–1074.*
12. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Электроупругие колебания секционированного пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 2. – С. 126–130.
13. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные электроупругие волны в полой пьезокерамическом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 26–32.
То же: *Shul'ga N. A., Grigorenko A. Ya., Loza I. A. Axisymmetric electroelastic waves in a hollow piezoelectric ceramic cylinder // Int. Appl. Mech. – 1984. – 20, No. 1. – P. 23–28.*
14. Hussein M., Heyliger P. R. Discrete layer analysis of axisymmetric vibrations of laminated piezoelectric cylinders // J. Sound and Vibr. – 1996. – **192**, No. 5. – P. 995–1013.
15. Kharouf N., Heyliger P. R. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders // J. Sound and Vibr. – 1994. – **174**, No. 4. – P. 539–561.

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З РАДІАЛЬНОЮ ПОЛЯРИЗАЦІЄЮ

Розглядається осесиметрична задача про вільні поздовжні коливання порожнистих п'єзокерамічних циліндрів для деяких типів граничних умов на торцях. П'єзокерамічний матеріал поляризований у радіальному напрямку. Бічні поверхні циліндра покриті тонкими електродами, що закорочені. Метод розв'язування базується на комбінації методу сплайн-колокацій за поздовжньою координатою і методу покрокового пошуку за радіальною координатою. Наведено результати чисельного аналізу циліндра з п'єзокераміки PZT 4 у широкому діапазоні зміни геометричних параметрів циліндра.

FREE VIBRATIONS OF PIEZOCERAMIC HOLLOW CYLINDERS WITH RADIAL POLARIZATION

The axisymmetric problem on free longitudinal oscillations of hollow piezoceramic cylinders with some types of boundary conditions on the edges is considered. Piezoceramic material is polarised in the radial direction. The lateral surfaces are free from external loading and are covered by thin electrodes which are short-circuited. The method of solution is based on combination of spline-collocation method by longitudinal coordinate and the method of stepwise search along the radial coordinate. Numerical calculations for the cylinder of piezoceramic PZT 4 in a wide range of change of geometrical parameters are presented.

Нац. транспортный ун-т, Киев

Получено
20.02.09