

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В ОБЛАСТИ КОМБИНАЦИОННЫХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

*Рассматривается задача о нелинейных параметрических колебаниях цилиндрической оболочки. Колебания описываются уравнениями Донелла – Муштари – Власова. Движения раскладываются по формам собственных колебаний оболочки. С помощью метода Бубнова – Галеркина получена динамическая система с шестью степенями свободы, которая исследуется методом многих масштабов. Решение задачи представляется на амплитудно-частотной характеристике.*

**1. Введение.** Оболочечные конструкции составляют обширный класс механических объектов, которые используются в машиностроении, ракетно-космической технике, строительстве. Поэтому не удивительно, что значительное число исследований посвящено анализу нелинейных колебаний оболочечных конструкций. Традиционные задачи, рассматриваемые в этой области, описаны в обзорной статье В. Д. Кубенко и П. С. Ковальчука [10]. В этой публикации рассматриваются свободные колебания, а также движения, обусловленные действием на оболочки внешних периодических продольных и поперечных нагрузок. В работах [4, 5] рассматриваются трех- и четырехмодовые модели нелинейных колебаний цилиндрических оболочек. Анализ модели свободных колебаний цилиндрической оболочки с пятью степенями свободы проводится в работе [11]. Ф. Пеллиcano и М. Амабили изучали модели параметрических колебаний цилиндрических оболочек [12]. Они получили дискретную систему с конечным числом степеней свободы большой размерности. В статьях [1, 7] рассматриваются вынужденные колебания цилиндрической оболочки в случае внутреннего резонанса, а также развиваются асимптотические методы для анализа колебаний оболочечных конструкций. В работе [2] изучаются параметрические колебания оболочки с массивным диском на конце. Для исследования параметрических колебаний применяется метод многих масштабов.

В данной статье рассматриваются нелинейные колебания шарнирно опертых оболочек, находящихся под действием параметрических нагрузок в случае комбинационного резонанса. Колебания описываются уравнениями Донелла – Муштари – Власова. С помощью метода Бубнова – Галеркина получена модель колебаний оболочки с конечным числом степеней свободы. Для анализа нелинейных колебаний применяется метод многих масштабов.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим шарнирно опертую оболочку без начальных неправильностей (рис. 1), подверженную действию равномерно распределенной продольной сжимающей периодической нагрузки вида

$$N_x(t) = N_0 + N_1 \cos(vt), \quad N_0, N_1 = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Предположим, что оболочка совершает колебания с умеренными амплитудами. При этом деформации являются малыми, а перемещения – умеренными и связи между деформациями и перемещениями описываются нелинейными уравнениями. Соотношения между напряжениями и деформациями описываются линейным законом Гука. В этом случае колебания оболочки описываются уравнениями Донелла – Муштари – Власова [4, 5]:

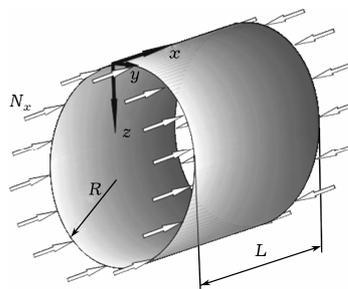


Рис. 1

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ \frac{1}{E} \nabla^4 F &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $w$  – радиальное перемещение точек оболочек;  $x$  – продольная координата;  $y$  – окружная координата;  $F$  – функция напряжений;  $E$  – модуль

упругости;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость оболочки.

Отметим, что в цилиндрических оболочках собственные формы колебаний  $\cos s_1 y \sin r_1 x$  и  $\sin s_1 y \sin r_1 x$  имеют одинаковые частоты. Более того, поскольку рассматриваем комбинационный резонанс, то в разложении радиального прогиба будут участвовать две пары сопряженных форм колебаний, частоты которых участвуют в комбинационном резонансе. Динамический прогиб оболочки  $w$  аппроксимируем выражением

$$\begin{aligned} w &= f_1 \cos s_1 y \sin r_1 x + f_2 \sin s_1 y \sin r_1 x + f_3 \cos s_2 y \sin r_2 x + \\ &+ f_4 \sin s_2 y \sin r_2 x + f_5 \sin^2 r_1 x + f_6, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $s_1 = n_1/R$ ;  $r_1 = m_1\pi/L$ ;  $s_2 = n_2/R$ ;  $r_2 = m_2\pi/L$ ;  $n_1, n_2$  – число волн в окружном направлении;  $m_1, m_2$  – число полуволн вдоль образующей. Слагаемое  $f_5 \sin^2 r_1 x$  отражает несимметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным перемещением к центру кривизны. Слагаемое  $f_6$  описывает радиальные перемещения точек, принадлежащих торцевым сечениям оболочки. Это слагаемое не зависит от окружной координаты  $y$ , то есть предполагается, что торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать».

**3. Модель колебаний с конечным числом степеней свободы.** Определим функцию напряжений  $F$ , которая является решением второго из уравнений системы (2). Введем разложение (3) во второе из уравнений системы (2). В результате получаем линейное уравнение в частных производных относительно функции напряжения  $F$ . Решение этого уравнения определяется точно и оно имеет следующий вид:

$$F = F_h + F_p, \quad (4)$$

где  $F_h$  – общее решение однородного уравнения;  $F_p$  – частное решение неоднородного уравнения. Частное решение представим так:

$$\begin{aligned} F_p &= F_1 \cos 2r_1 x + F_2 \cos 2r_2 x + F_3 \cos 2s_1 y + F_4 \cos 2s_2 y + \\ &+ F_5 \sin 2s_1 y + F_6 \sin 2s_2 y + F_7 \cos s_1 y \sin r_1 x + \\ &+ F_8 \sin s_1 y \sin r_1 x + F_9 \cos s_2 y \sin r_2 x + F_{10} \sin s_2 y \sin r_2 x + \\ &+ F_{11} \cos (s_1 + s_2) y \cos (r_1 + r_2) x + F_{12} \cos (s_1 - s_2) y \cos (r_1 + r_2) x + \\ &+ F_{13} \cos (s_1 + s_2) y \cos (r_1 - r_2) x + F_{14} \cos (s_1 - s_2) y \cos (r_1 - r_2) x + \\ &+ F_{15} \sin (s_1 + s_2) y \cos (r_1 + r_2) x + F_{16} \sin (s_1 - s_2) y \cos (r_1 + r_2) x + \\ &+ F_{17} \sin (s_1 + s_2) y \cos (r_1 - r_2) x + F_{18} \sin (s_1 - s_2) y \cos (r_1 - r_2) x + \\ &+ F_{19} \cos s_1 y \sin 3r_1 x + F_{20} \sin s_1 y \sin 3r_1 x + \\ &+ F_{21} \cos s_2 y \sin (r_2 - 2r_1) x + F_{22} \cos s_2 y \sin (r_2 + 2r_1) x + \\ &+ F_{23} \sin s_2 y \sin (r_2 - 2r_1) x + F_{24} \sin s_2 y \sin (r_2 + 2r_1) x. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) введем во второе из уравнений системы (2) и приравняем коэффициенты при соответствующих гармониках. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $F_i$ . Решая эту систему, находим амплитуды гармоник  $F_i$ , которые здесь не приводим для краткости изложения.

Решение  $F_h$  представим в следующем виде:

$$F_h = -\frac{Kx^2}{2} - \frac{N_x y^2}{2}. \quad (6)$$

Уравнения (3), (6) подставим в условие периодичности окружных перемещений, которое принимает следующий вид:

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left\{ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{Ew}{R} \right\} dy = 0. \quad (7)$$

Тогда получим следующее выражение для константы  $K$ :

$$K = \mu N_x + \frac{E}{R} \left( \frac{1}{2} f_5 + f_6 \right) - \frac{E}{8} (s_1 f_1^2 - s_1 f_2^2 - s_2 f_3^2 - s_2 f_4^2). \quad (8)$$

После определения функции напряжений к первому уравнению системы (2) применяем метод Бубнова – Галеркина. В результате получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую колебания цилиндрической оболочки. Эту систему перепишем относительно таких безразмерных переменных и параметров:

$$\tilde{t} = \omega_0 t, \quad \tilde{f}_i(t) = h^{-1} f_i(t). \quad (9)$$

В дальнейшем анализе опустим волну в обозначениях. Тогда модель с конечным числом степеней свободы относительно безразмерных переменных и параметров принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + \lambda_{i5} f_i f_5 + \lambda_{i6} f_i f_6 + \gamma_{i1} f_i f_1^2 + \gamma_{i2} f_i f_2^2 + \gamma_{i3} f_i f_3^2 + \\ + \gamma_{i4} f_i f_4^2 + \gamma_{i5} f_i f_5^2 + \sigma_i N_x f_i = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \ddot{f}_5 + \frac{4}{3} \ddot{f}_6 + \omega_5^2 f_5 + \omega_6^2 f_6 + \lambda_{51} f_1^2 + \lambda_{52} f_2^2 + \lambda_{53} f_3^2 + \lambda_{54} f_4^2 + \\ + \gamma_{51} f_5 f_1^2 + \gamma_{52} f_5 f_2^2 + \gamma_{53} f_5 f_3^2 + \gamma_{54} f_5 f_4^2 + \sigma_5 N_x f_5 + o_5 N_x = 0, \\ \ddot{f}_6 + \frac{1}{2} \ddot{f}_5 + \omega_7^2 f_6 + \omega_8^2 f_5 + \lambda_{61} f_1^2 + \\ + \lambda_{62} f_2^2 + \lambda_{63} f_3^2 + \lambda_{64} f_4^2 + o_6 N_x = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 1$ ,  $\omega_3 = \omega_4 = 2\omega = 2$ .

Таким образом, задача о параметрических колебаниях оболочки сводится к анализу системы шести обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Параметры  $\omega_5, \dots, \omega_8$  значительно больше частот  $\omega_1, \dots, \omega_4$ . Поэтому два последних уравнения системы (10) преобразуются в статические с использованием условия  $\dot{f}_5 = \dot{f}_6 = 0$ . Учитывая малость коэффициентов  $\gamma_{i5}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $\sigma_5$ ,  $o_5$ ,  $o_6$ , из статических уравнений получаем

$$f_5 = \frac{\omega_6 \lambda_{6i} f_i^2 - \omega_7 \lambda_{5i} f_i^2}{\omega_6 \omega_8 - \omega_5 \omega_7}, \quad f_6 = \frac{\omega_5 \lambda_{6i} f_i^2 - \omega_8 \lambda_{5i} f_i^2}{\omega_6 \omega_8 - \omega_5 \omega_7}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11)$$

Теперь подставляя эти решения в первые четыре уравнения системы (10), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + \varepsilon \Phi_i(f_1, f_2, f_3, f_4) = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (12) \\ \Phi_i(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mu_i \dot{f}_i + \eta_{i1} f_i f_1^2 + \eta_{i2} f_i f_2^2 + \\ + \eta_{i3} f_i f_3^2 + \eta_{i4} f_i f_4^2 + R_i(f) + \chi_i f_i N_x, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_1(f) &= \eta_{15}f_1^5 + \eta_{16}f_1^3f_2^2 + \eta_{17}f_1f_2^4, \\ R_2(f) &= \eta_{25}f_2^5 + \eta_{26}f_2^3f_1^2 + \eta_{27}f_2f_1^4, \\ R_3(f) &= \eta_{35}f_3f_1^4 + \eta_{36}f_3f_1^2f_2^2 + \eta_{37}f_3f_2^4, \\ R_4(f) &= \eta_{45}f_4f_1^4 + \eta_{46}f_4f_1^2f_2^2 + \eta_{47}f_4f_2^4, \quad f = (f_1, \dots, f_4). \end{aligned}$$

Формулы для определения коэффициентов  $\eta_{ij}$  не приводим для краткости изложения. В динамическую систему (12) введена диссипация, описывающая затухание колебаний в материале оболочки.

Периодическое параметрическое возбуждение колебаний в оболочке представим так:  $N_x(t) = N_1 \cos vt$ .

**4. Асимптотический анализ дискретной модели.** Для исследования динамики системы (12) воспользуемся методом многих масштабов [6] и введем следующие масштабы времени  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon t$ . Тогда производные по времени определяются так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ . Движения системы (12) представим так:

$$f_i(t, \varepsilon) = f_i^{(0)}(T_0, T_1) + \varepsilon f_i^{(1)}(T_0, T_1) + \dots, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (14)$$

Асимптотические разложения (14) введем в (12). Приравнявая теперь коэффициенты при последовательных степенях  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} D_0^2 f_i^{(0)}(T_0, T_1) + \omega_i^2 f_i^{(0)}(T_0, T_1) &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (15) \\ D_0^2 f_i^{(1)} + \omega_i^2 f_i^{(1)} &= -2D_0 D_1 f_i^{(0)} - \mu_i D_0 f_i^{(0)} - \eta_{i1} f_i^{(0)} f_1^{(0)2} - \eta_{i2} f_i^{(0)} f_2^{(0)2} - \\ &\quad - \eta_{i3} f_i^{(0)} f_3^{(0)2} - \eta_{i4} f_i^{(0)} f_4^{(0)2} - R_i(f^{(0)}) - \chi_i f_i^{(0)} N_1 \cos(vT_0), \\ &\quad i = 1, \dots, 4, \quad (16) \end{aligned}$$

где  $f^{(0)} = (f_1^{(0)}, \dots, f_4^{(0)})$ .

Рассмотрим колебания в области комбинационного резонанса, который представим как

$$v = 2\omega_3 - 2\omega_1 + \varepsilon\delta, \quad (17)$$

где  $\delta$  – параметр расстройки. Решения уравнений (15) представим так:

$$f_j^{(0)}(T_0, T_1) = A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_1) \exp(-i\omega_j T_0), \quad j = 1, \dots, 4. \quad (18)$$

Комплексные функции  $A_j(T_1)$  представим в следующем виде:

$$A_j(T_1) = \frac{1}{2} a_j(T_1) \exp(i\alpha_j(T_1)), \quad j = 1, \dots, 4. \quad (19)$$

Используя условие отсутствия секулярных членов в системе (16) и замену переменных

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= T_1 \delta - 2\alpha_1, & \varphi_2 &= T_1 \delta - 2\alpha_2, \\ \varphi_3 &= T_1 \delta - \alpha_3, & \varphi_4 &= T_1 \delta - \alpha_4, \end{aligned} \quad (20)$$

получаем следующую систему модуляционных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i \omega + \frac{1}{2} \mu_i \omega a_i + M_i(a_1, a_2, a_3, a_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) a_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \dot{\varphi}_i \omega a_i - \delta \omega a_i + N_i(a_1, a_2, a_3, a_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) a_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (21) \\ M_1 &= K_1 + \frac{1}{4} \chi_1 N_1 \sin \varphi_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left( \frac{1}{8} \eta_{12} a_2^2 + \frac{1}{16} \eta_{16} a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{8} \eta_{17} a_2^4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\
M_2 &= -K_2 + \frac{1}{4} \chi_2 N_1 \sin \varphi_2, \\
K_2 &= \left( \frac{1}{8} \eta_{21} a_1^2 + \frac{1}{16} \eta_{26} a_2^2 a_1^2 + \frac{1}{8} \eta_{27} a_1^4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\
M_3 &= K_3, \quad K_3 = \frac{1}{16} \eta_{34} a_4^2 \sin(2\varphi_3 - 2\varphi_4) + \frac{1}{64} \eta_{35} a_1^4 \sin(2\varphi_3 - 2\varphi_1) + \\
&\quad + \frac{1}{64} \eta_{37} a_2^4 \sin(2\varphi_3 - 2\varphi_2) + \frac{1}{64} \eta_{36} a_1^2 a_2^2 \sin(2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2), \\
M_4 &= K_4, \quad K_4 = \frac{1}{16} \eta_{43} a_3^2 \sin(2\varphi_4 - 2\varphi_3) + \frac{1}{64} \eta_{45} a_1^4 \sin(2\varphi_4 - 2\varphi_1) + \\
&\quad + \frac{1}{64} \eta_{47} a_2^4 \sin(2\varphi_4 - 2\varphi_2) + \frac{1}{64} \eta_{46} a_1^2 a_2^2 \sin(2\varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2), \\
S_1 &= L_1 + \frac{1}{2} \chi_1 N_1 \cos \varphi_1, \quad L_1 = \left( \frac{1}{4} \eta_{12} a_2^2 + \frac{1}{8} \eta_{16} a_1^2 a_2^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \eta_{17} a_2^4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \left( \frac{3}{4} \eta_{11} a_1^2 + \frac{1}{2} \eta_{12} a_2^2 + \frac{1}{2} \eta_{13} a_3^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \eta_{14} a_4^2 + \frac{5}{8} \eta_{15} a_1^4 + \frac{3}{8} \eta_{16} a_1^2 a_2^2 + \frac{3}{8} \eta_{17} a_2^4 \right), \\
S_2 &= L_2 + \frac{1}{2} \chi_2 N_1 \cos \varphi_2, \quad L_2 = \left( \frac{1}{4} \eta_{21} a_1^2 + \frac{1}{8} \eta_{26} a_2^2 a_1^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \eta_{27} a_1^4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \left( \frac{3}{4} \eta_{22} a_2^2 + \frac{1}{2} \eta_{21} a_1^2 + \frac{1}{2} \eta_{23} a_3^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \eta_{24} a_4^2 + \frac{5}{8} \eta_{25} a_2^4 + \frac{3}{8} \eta_{26} a_2^2 a_1^2 + \frac{3}{8} \eta_{27} a_1^4 \right), \\
S_3 &= L_3, \quad L_3 = + \frac{1}{32} \eta_{35} a_1^4 \cos(2\varphi_3 - 2\varphi_1) + \frac{1}{32} \eta_{37} a_2^4 \cos(2\varphi_3 - 2\varphi_2) + \\
&\quad + \left( \frac{1}{8} \eta_{34} a_4^2 + \frac{1}{16} \eta_{36} a_1^2 a_2^2 \right) \cos(2\varphi_3 - 2\varphi_4) + \\
&\quad + \frac{1}{32} \eta_{36} a_1^2 a_2^2 \cos(2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) + \left( \frac{1}{4} \eta_{31} a_1^2 + \frac{1}{4} \eta_{32} a_2^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \eta_{33} a_3^2 + \frac{1}{4} \eta_{34} a_4^2 + \frac{3}{16} \eta_{35} a_1^4 + \frac{1}{8} \eta_{36} a_1^2 a_2^2 + \frac{3}{16} \eta_{37} a_2^4 \right), \\
S_4 &= L_4, \quad L_4 = \frac{1}{32} \eta_{45} a_1^4 \cos(2\varphi_3 - 2\varphi_1) + \frac{1}{32} \eta_{47} a_2^4 \cos(2\varphi_3 - 2\varphi_2) + \\
&\quad + \left( \frac{1}{8} \eta_{43} a_3^2 + \frac{1}{16} \eta_{46} a_1^2 a_2^2 \right) \cos(2\varphi_3 - 2\varphi_4) + \\
&\quad + \frac{1}{32} \eta_{46} a_1^2 a_2^2 \cos(2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) + \left( \frac{1}{4} \eta_{41} a_1^2 + \frac{1}{4} \eta_{42} a_2^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \eta_{43} a_3^2 + \frac{3}{8} \eta_{44} a_4^2 + \frac{3}{16} \eta_{45} a_1^4 + \frac{1}{8} \eta_{46} a_1^2 a_2^2 + \frac{3}{16} \eta_{47} a_2^4 \right).
\end{aligned}$$

Неподвижные точки системы модуляционных уравнений (21) описывают такие периодические колебания системы (12):

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_1 \cos \frac{vt - \varphi_1}{2}, & f_2 &= a_2 \cos \frac{vt - \varphi_2}{2}, \\
f_3 &= a_3 \cos(vt - \varphi_3), & f_4 &= a_4 \cos(vt - \varphi_4).
\end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) следует, что период колебаний первых двух сопряженных мод  $\cos s_1 y \sin r_1 x$ ,  $\sin s_1 y \sin r_1 x$  в области комбинационного резонанса в два

раза больше, чем период колебаний двух вторых сопряженных мод  $\cos s_2 y \sin r_2 x$ ,  $\sin s_2 y \sin r_2 x$ .

Рассмотрим параметрические колебания цилиндрической оболочки в области следующего комбинационного резонанса:

$$\nu = \omega_3 + 2\omega_1 + \varepsilon\delta, \quad (23)$$

где  $\delta$  – параметр расстройки. Тогда, представив нулевое приближение в виде (18) и используя (19), а также замену переменных

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} T_1 \delta - 2\alpha_1, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} T_1 \delta - 2\alpha_2, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} T_1 \delta - \alpha_3, \quad \varphi_4 = \frac{1}{2} T_1 \delta - \alpha_4, \quad (24)$$

получим следующую систему модуляционных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i \omega + \mu_i \omega a_i / 2 + P_i(a_1, a_2, a_3, a_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) a_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \dot{\varphi}_1 \omega a_i - \delta \omega a_i + Q_i(a_1, a_2, a_3, a_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) a_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (25) \\ P_1 &= K_1, \quad P_2 = -K_2, \quad P_3 = K_3 + (\chi_3 N_1 a_3 \sin 2\varphi_3) / 8, \\ P_4 &= K_4 + (\chi_4 N_1 a_4 \sin 2\varphi_4) / 8, \quad Q_1 = L_1, \quad Q_2 = L_2, \\ Q_3 &= L_3 + (\chi_3 N_1 a_3 \cos 2\varphi_3) / 8, \quad Q_4 = L_4 + (\chi_4 N_1 a_4 \cos 2\varphi_4) / 8. \end{aligned}$$

Неподвижные точки системы модуляционных уравнений (25) отвечают следующим периодическим колебаниям динамической системы (12):

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 \cos((\nu t - 2\varphi_1)/4), \quad f_2 = a_2 \cos((\nu t - 2\varphi_2)/4), \\ f_3 &= a_3 \cos(\nu t/2 - \varphi_3), \quad f_4 = a_4 \cos(\nu t/2 - \varphi_4). \quad (26) \end{aligned}$$

**5. Устойчивость периодических колебаний.** Исследуем устойчивость полученных нелинейных колебаний. Для этого систему модуляционных уравнений перепишем в декартовых координатах, используя замену переменных:

$$\begin{aligned} A_j(T_1) &= (x_j(T_1) + iy_j(T_1)) \exp(i\delta T_1/2), \quad j = 1, 2, \\ A_k(T_1) &= (x_k(T_1) + iy_k(T_1)) \exp(i\delta T_1), \quad k = 3, 4. \quad (27) \end{aligned}$$

В результате получим систему модуляционных уравнений, которую в общем случае можно представить так:

$$x'_j = X_j(x_1, y_1, \dots, y_4), \quad y'_j = Y_j(x_1, y_1, \dots, y_4), \quad j = 1, \dots, 4. \quad (28)$$

Анализ устойчивости периодических движений сводится к анализу устойчивости неподвижных точек  $\bar{x}_j$ ,  $\bar{y}_j$  модуляционных уравнений (28). Введем малые возмущения в движение  $\Delta x_j$ ,  $\Delta y_j$ , которые определим так:

$$x_j = \bar{x}_j + \Delta x_j, \quad y_j = \bar{y}_j + \Delta y_j, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (29)$$

Эволюция с течением времени этих приращений описывается системой уравнений в вариациях, которая принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta x'_j &= \sum_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial X_j}{\partial y_i} \Delta y_i, \quad \Delta y'_j = \sum_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial Y_j}{\partial y_i} \Delta y_i, \\ & i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (30) \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости неподвижных точек определим характеристические показатели  $\lambda_i$  из уравнения

$$\text{Det}[\partial J - \lambda E] = 0, \quad (31)$$

где  $\partial J$  – матрица Якоби векторного поля (28);  $E$  – единичная матрица.

Аналогично исследуется устойчивость неподвижных точек модуляционных уравнений (25). В этом случае для перехода к декартовым координатам в системе (25) применяется такая замена переменных:

$$\begin{aligned} A_j(T_1) &= (x_j(T_1) + iy_j(T_1)) \exp(i\delta T_1/2), \quad j = 1, 2, \\ A_j(T_1) &= (x_j(T_1) + iy_j(T_1)) \exp(i\delta T_1), \quad j = 3, 4. \quad (32) \end{aligned}$$

**6. Численный анализ колебаний.** В численных расчетах будем использовать следующие параметры оболочки [9]:

$$\begin{aligned} h = 0.002 \text{ м}, \quad L = 0.4 \text{ м}, \quad R = 0.2 \text{ м}, \quad E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad \mu = 0.3, \\ \rho = 7850 \text{ Кг/м}^3, \quad n_1 = 5, \quad n_2 = 7, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad \varepsilon = 0.01, \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0.0001, \quad \omega_0 = 3165.03, \quad N_1 = 0.4N_{\text{cr}}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $N_{\text{cr}} = Eh^2/R\sqrt{3(1-\mu^2)}$  – величина критическая продольной эйлеровой нагрузки [13]. Для значений параметров оболочки (33)  $N_{\text{cr}} = 2.54 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ .

На рис. 2 показаны зависимости амплитуды параметрических колебаний от расстройки  $\delta$  для резонанса (17). Сплошной линией показаны устойчивые колебания, а пунктирной линией – неустойчивые. Подчеркнем, что в этом случае формы колебаний, соответствующие амплитудам  $a_1, a_2$ , являются активными, а амплитуды  $a_3, a_4$  равны нулю. Кривые 1, 2, представленные на рис. 2, соответствуют случаю  $a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = a_4 = 0$ , то есть колебания проходят только по одной из двух сопряженных форм колебаний и в оболочке наблюдается стоячая волна. Существует и другой режим: кривые 3, 4 соответствуют случаю  $a_1 = a_2 \neq 0, a_3 = a_4 = 0$ .

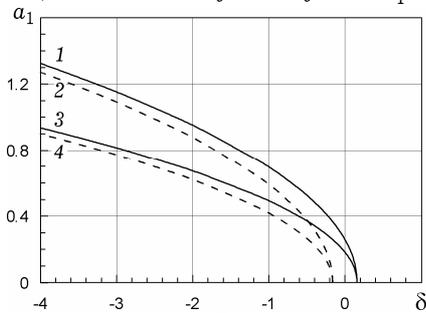


Рис. 2

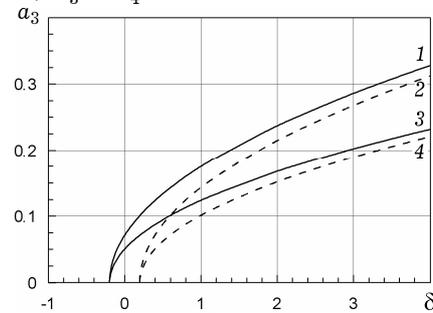


Рис. 3

На рис. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики для резонанса (23). Устойчивые колебания показаны сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной. В этом случае равны нулю формы, соответствующие амплитудам  $a_1, a_2$ . Кривые 1, 2, представленные на рис. 3, соответствуют  $a_3 \neq 0, a_4 = a_1 = a_2 = 0$ , а кривые 3, 4 –  $a_3 = a_4 \neq 0, a_1 = a_2 = 0$ .

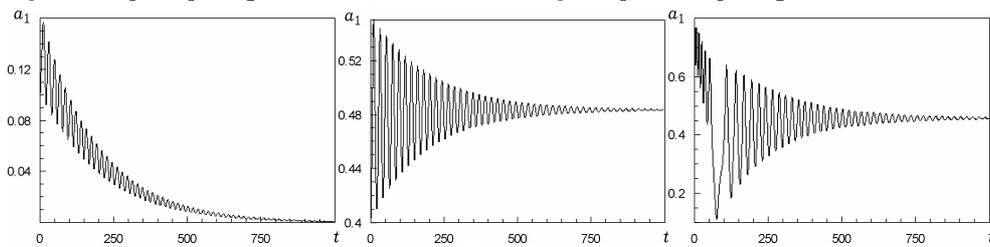


Рис. 4

Системы модуляционных уравнений (21), (25) исследовались с помощью прямого численного интегрирования. Из результатов расчетов следует, что с течением времени все траектории притягиваются к устойчивым колебаниям, представленным на рис. 2 и 3. На рис. 4 представлены зависимости амплитуды  $a_1$  от времени для движений, описываемых модуляционными уравнениями (21) при  $\delta = -0.4, a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = a_4 = 0$ .

**Выводы.** Исследовано взаимодействие между двумя группами сопряженных форм колебаний. Это взаимодействие обусловлено тем, что частота параметрической нагрузки находится в области комбинационного резонанса. Получена механическая система с конечным числом степеней свободы, описывающая это взаимодействие между формами колебаний.

Отметим, что параметрические колебания при взаимодействии форм колебаний в области комбинационного резонанса (17) описываются мягкой амплитудно-частотной характеристикой, а в области комбинационного резонанса (23) амплитудно-частотная характеристика является жесткой.

1. Аврамов К. В. Нелинейные вынужденные колебания цилиндрической оболочки при двух внутренних резонансах // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 2. – С. 51–59.  
То же: Avramov K. V. Nonlinear forced vibrations of a cylindrical shell with two internal resonances // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, No. 2. – P. 169–175.
2. Аврамов К. В., Пеллиcano Ф. Динамическая неустойчивость цилиндрической оболочки с диском на конце // Доп. НАН України. – 2006. – № 5. – С. 41–46.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 423 с.
4. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Вища шк., 1989. – 207 с.
5. Кубенко В. Д., Подчасов П. С., Краснополская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1984. – 218 с.
6. Найфе А. Х. Методы возмущений. – Москва: Мир, 1976. – 456 с.  
То же: Nayfeh A. H. Perturbation methods. – New York: Wiley & Sons, 1973. – 437 p.
7. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V., Kurilov G. Asymptotic analysis of nonlinear dynamics of simply supported cylindrical shells // Nonlinear Dynamics. – 2007. – 47. – P. 331–352.
8. Dowell E. H., Ventres C. S. Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell // Int. J. Solids and Struct. – 1968. – 4. – P. 975–991.
9. Goncalves P. B., Del Prado Z. J. G. N. Nonlinear oscillations and stability of parametrically excited cylindrical shells // Meccanica. – 2002. – 36. – P. 105–116.
10. Kubenko V. D., Koval'chuk P. S. Nonlinear problems of oscillations of thin shells. Survey // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, No. 8. – P. 703–728.  
То же: Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (Обзор) // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 8. – С. 3–31.
11. Kubenko V. D., Koval'chuk P. S., Kruk L. A. Non-linear interaction of bending deformations of free-oscillating cylindrical shells // J. Sound and Vibr. – 2003. – 265. – P. 245–268.
12. Pellicano F., Amabili M. Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // Int. J. Solid and Struct. – 2003. – 40. – P. 3229–3251.
13. Yamaki N. Elastic stability of circular cylindrical shells. – Amsterdam: North Holland, 1984. – 558 p.

#### ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ОБЛАСТІ КОМБІНАЦІЙНИХ РЕЗОНАНСІВ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Розглядається задача про нелінійні параметричні коливання циліндричної оболонки. Коливання описуються рівняннями Донелла – Муштарі – Власова. Рухи розкладаються по формах власних коливань оболонки. З використанням методу Бубнова – Гальоркіна одержано динамічну систему із шістьма ступенями вільності. Система досліджується методом багатьох масштабів. Розв'язок задачі подано через амплітудно-частотні характеристики.

#### PARAMETRIC VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS IN THE REGION OF COMBINATIVE RESONANCES AT GEOMETRICALLY NONLINEAR DEFORMATION

The problem on nonlinear parametric vibrations of cylindrical shell is considered. Vibrations are described by Donnell – Mushtari – Vlasov equations. The motions are presented as expansion with respect to eigenmodes. Applying Bubnov – Galerkin procedure, a dynamic system with six degrees of freedom is derived. The multiple scales method is used to analyze this system. The solution is presented on the amplitude-frequency response.

<sup>1</sup> Нац. техн. ун-т «Харьков. политех. ин-т», Харьков,

<sup>2</sup> Ин-т проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено  
05.12.08