

МЕТОД R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Запропоновано метод дослідження параметричних коливань ортотропних пластин складної форми при різних типах граничних умов, який базується на варіаційних методах у поєднанні з теорією R-функцій. Запропонований підхід використано для розв'язання конкретних задач. У ході чисельної реалізації алгоритму для розглянутої пластини складної форми побудовано області динамічної нестійкості, залежності прогину від збуджуючої частоти та часу.

Практичний інтерес до цієї проблеми пов'язаний з тим, що конструкції, складові яких моделюються пластинами, використовують у багатьох галузях промисловості, таких як будівництво, авіапромисловість, суднобудування та інших. Вивченню параметричних коливань пластин присвячено багато робіт, зокрема [2, 3, 7, 9–11]. Головною ідеєю цих робіт є зведення початкової системи руху до системи звичайних нелінійних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Реалізація цієї ідеї здійснюється за допомогою подання прогину пластини у вигляді узагальненого ряду Фур'є і застосування методу Бубнова – Гальоркіна. Особливістю одержаної системи рівнянь є те, що при деяких співвідношеннях параметрів тривіальний розв'язок стає нестійким, що призводить до параметричного резонансу. Слід зауважити, що в більшості із відомих робіт, з метою спрощення задачі, чисельні результати одержано при збереженні тільки одного члена ряду Фур'є, завдяки чому система зводиться тільки до одного рівняння. Невирішеним залишається питання, для яких задач таке спрощення є допустимим. У роботі [8] це питання розглянуто для шарнірно опертих пластин та оболонки прямокутної форми. Як відомо з літератури, саме для цього випадку власні функції відповідної лінійної задачі подаються в аналітичному вигляді та використовуються як базисні.

Якщо ж пластина має форму, відмінну від прямокутника або кола, вивчення параметричних коливань значно ускладнюється, оскільки в цьому випадку виникає проблема побудови базисних функцій в аналітичному вигляді. У цій роботі для дослідження параметричних коливань пластин складної форми при різних видах граничних умов запропоновано метод, що базується на використанні теорії R-функцій (RFM), яка дозволяє розв'язувати цю проблему. За допомогою розробленого алгоритму побудовано області динамічної нестійкості пластини (ОДН), залежності прогину від часу та від збуджуючої частоти при апроксимації прогину трьома членами ряду. Проведено порівняльний аналіз наведених характеристик, отриманих з використанням однієї та трьох мод.

1. Математична постановка. Будемо досліджувати коливання ортотропної пластини постійної товщини h , що знаходиться під дією періодичного навантаження $p(t)$ у своїй площині. Рівняння руху пластини з урахуванням демпфування, коли сила опору пропорційна швидкості руху $\frac{\partial w}{\partial t}$, у змішаній формі [1, 4] мають вигляд

$$L_1 \Phi = -C_1 L(w, w), \quad (1)$$

$$L_2 w = L(w, \Phi) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

де w – прогин пластини, а $\Phi(x, y)$ – функція зусиль, яка вводиться за допомогою напружень σ_x , σ_y і τ такими співвідношеннями:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y, \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \tau.$$

Оператори L_1 , L_2 та $L(w, w)$, $L(w, \Phi)$ в (1), (2) визначаються як

$$L_1 = C_1 \frac{\partial}{\partial x^4} - \left(2\mu_1 - \frac{E_1}{G} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (3)$$

$$L_2 = \frac{1}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} \left(C_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(C_3 + C_2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \quad (4)$$

$$L(w, w) = 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right),$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Коефіцієнти C_1 , C_2 та C_3 в (1)–(4) визначаються за формулами

$$C_1 = \frac{E_1}{E_2}, \quad C_2 = \frac{G(1 - \mu_1 \mu_2)}{E_2}, \quad C_3 = \frac{G(1 - \mu_1 \mu_2)}{E_2} + \mu_1.$$

Рівняння руху (1), (2) записано в безрозмірній формі. Співвідношення між розмірними та безрозмірними параметрами мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{p} = \frac{a^2 p}{h^3 E_2}, \\ \bar{t} = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E_2}{\rho}} t, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \varepsilon, \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{E_2 h^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Риски над безрозмірними параметрами в (1), (2) і у подальшому відкинуто. У формулах (1)–(5) E_1 , E_2 – модулі Юнга; G – модуль зсуву; μ_1 , μ_2 – коефіцієнти Пуассона; ρ – щільність пластини; ε – коефіцієнт демпфування.

Функція прогину задовольняє такі початкові умови:

$$w|_{t=0} = w_0, \quad w'|_{t=0} = 0.$$

Рівняння руху доповнюються граничними умовами, які залежать від типу закріплення пластини.

2. Метод розв'язування. Подамо прогин пластини у вигляді

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) w_i(x, y), \quad (6)$$

де w_i – власні функції задачі про лінійні коливання ненавантаженої пластини. Математична постановка такої задачі зводиться до розв'язання рівняння

$$L_2 w_i = \omega_{L,i}^2 w_i, \quad (7)$$

де $\omega_{L,i}$ – частота пластини, що відповідає формі коливань w_i . Задачу (7) розв'язували методом Рітца [5], послідовність координатних функцій для якого у випадку складної геометрії пластини будували за допомогою методу R -функцій [6].

Функцію зусиль Φ будемо шукати у вигляді

$$\Phi(x, y, t) = p \Phi_0 + \sum_{i,j=1}^n f_i(t) f_j(t) \Phi_{ij}(x, y). \quad (8)$$

Функція $\Phi_0(x, y)$ у (8) є розв'язком рівняння

$$L_1 \Phi_0 = 0 \quad (9)$$

і на границі області задовольняє умови

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tau^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial n \partial \tau} = 0. \quad (10)$$

Функції $\Phi_{ij}(x, y)$ є розв'язками рівнянь

$$L_1 \Phi_{ij} = -\frac{1}{2} C_1 L(w_i, w_j), \quad (11)$$

права частина яких має вигляд

$$L(w_i, w_j) = 2 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \right).$$

Рівняння (11) доповнюються однорідними граничними умовами

$$\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial n \partial \tau} = 0. \quad (12)$$

Розв'язання задач (9), (10) і (11), (12) для пластин складної форми також виконуємо за допомогою методу Рітца у поєднанні з теорією R -функцій.

Підставляючи вирази (6) і (8) для функцій w і Φ в рівняння (2), одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n L_2 w_i f_i &= p \sum_{i=1}^n L(w_i, \Phi_0) f_i + \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^n L(w_k, \Phi_{ij}) f_i f_j f_k - \varepsilon \sum_{i=1}^n w_i f'_i - \sum_{i=1}^n w_i f''_i. \end{aligned}$$

Застосовуючи до отриманого рівняння метод Бубнова – Гальоркіна, отримуємо нелінійну систему рівнянь

$$f''_m + \varepsilon f'_m + \omega_{L,m}^2 f_m - p \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(m)} f_i + \sum_{i,j,k=1}^n \beta_{ijk}^{(m)} f_i f_j f_k = 0, \quad m = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Коефіцієнти системи (13) визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(m)} &= \frac{1}{\|w_m\|^2} \iint_{\Omega} L(w_i, \Phi_0) w_m dx dy, \\ \beta_{ijk}^{(m)} &= -\frac{1}{\|w_m\|^2} \iint_{\Omega} L(w_k, \Phi_{ij}) w_m dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Систему рівнянь (13) подамо у матричному вигляді

$$\mathbf{f}'' + \varepsilon \mathbf{f}' + (\mathbf{C} - p\mathbf{A})\mathbf{f} + \mathbf{B}(\mathbf{f}) = 0, \quad (15)$$

вводячи в розгляд матриці \mathbf{A} та \mathbf{C} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \omega_{L,1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{L,2}^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{L,n}^2 \end{pmatrix},$$

а також вектори

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \dots \\ f'_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}'' = \begin{pmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ \dots \\ f''_n \end{pmatrix}$$

і вектор $\mathbf{B}(\mathbf{f})$ з компонентами

$$b_m = \sum_{i,j,k=1}^n f_i f_j f_k \beta_{ijk}^{(m)}.$$

Періодичне навантаження подамо як $p(t) = p_0 + p_t \cos \theta t$, де p_0 – постійна складова навантаження, p_t – амплітуда змінної частини навантаження і θ – частота збудження. У цьому випадку досліджувана система (15) набуває такого вигляду:

$$\mathbf{f}'' + \varepsilon \mathbf{f}' + \mathbf{Cf} - (p_0 + p_t \cos \theta t) \mathbf{Af} + \mathbf{B}(\mathbf{f}) = 0. \quad (16)$$

Таким чином, дослідження параметричних коливань пластин зводиться до вивчення системи диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від часу. Особливістю такого типу систем є те що, при деяких умовах тривіальний розв'язок може бути нестійким за Ляпуновим, тобто недеформований стан пластини стає динамічно нестійким: виникають коливання, амплітуда яких зростає з часом. Задача про динамічну стійкість є нелінійною, однак, для визначення областей динамічної нестійкості систем з періодичними коефіцієнтами достатньо використовувати лінійну теорію [2]. Поклавши $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ в (16), отримуємо відповідну лінійну систему:

$$\mathbf{f}'' + \varepsilon \mathbf{f}' + \mathbf{Cf} - (p_0 + p_t \cos \theta t) \mathbf{Af} = 0. \quad (17)$$

Окремо треба виділити випадок, коли матриця \mathbf{A} має діагональний вигляд: тоді система (17) розпадається на n окремих скалярних рівнянь, що істотно спрощує її дослідження.

Як відомо з [2], на границях областей нестійкості система має періодичні розв'язки з періодом $T = 2\pi/\theta$ та $2T$. Встановлювати умови існування періодичних розв'язків будемо за допомогою методу, запропонованого в роботі В. В. Болотіна [2]. Як показано в цій роботі, два розв'язки однакового періоду відокремлюють області нестійкості, два розв'язки різних періодів – області стійкості.

Періодичні розв'язки, що відокремлюють головні області нестійкості (саме вони є найбільшими, а тому і найважливішими для практичного застосування), будемо шукати у вигляді

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \sin \frac{\theta t}{2} + \mathbf{b} \cos \frac{\theta t}{2}, \quad (18)$$

де \mathbf{a} та \mathbf{b} – невідомі вектори, що не залежать від часу. Підставляючи (18) у систему (17), отримуємо

$$\begin{aligned} -\mathbf{a} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \sin \frac{\theta t}{2} - \mathbf{b} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \cos \frac{\theta t}{2} + \varepsilon \left(\mathbf{a} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta t}{2} - \mathbf{b} \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta t}{2} \right) + \mathbf{C} \left(\mathbf{a} \sin \frac{\theta t}{2} + \mathbf{b} \cos \frac{\theta t}{2} \right) - (p_0 + p_t \cos \theta t) \mathbf{A} \left(\mathbf{a} \sin \frac{\theta t}{2} + \mathbf{b} \cos \frac{\theta t}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Далі, використовуючи відомі тригонометричні тотожності і відкидаючи члени з потроєною частотою, отримуємо систему матричних рівнянь

$$\begin{aligned} \left(-\left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \mathbf{E} + \mathbf{C} - p_0 \mathbf{A} + \frac{1}{2} p_t \mathbf{A} \right) \mathbf{a} - \frac{\varepsilon}{2} \theta \mathbf{b} = 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} \theta \mathbf{a} + \left(-\left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \mathbf{E} + \mathbf{C} - p_0 \mathbf{A} - \frac{1}{2} p_t \mathbf{A} \right) \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Поклавши визначник системи (19) рівним нулеві, отримуємо рівняння відносно θ , розв'язавши яке, знаходимо критичні частоти. Обчислення були проведені при $n = 1, 3$, тобто при одній і трьох модах. У випадку однієї моди рівняння для знаходження критичних частот має вигляд

$$\frac{\theta^4}{16} - \left(\frac{\Omega_L^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \theta^2 + \Omega_L^4 - \frac{p_t^2}{4} \alpha^2 = 0,$$

де $\Omega_L = \sqrt{\omega_L^2 - p_0 \alpha}$, $\alpha = \alpha_1^{(1)}$, – частота коливань пластини, що знаходиться під дією постійного навантаження p_0 . У випадку трьох мод, розкривши визначник системи (19) і прирівнявши його до нуля, отримуємо рівняння 12-го степеня, його коефіцієнти мають досить складний вид, тому в роботі не наведені.

3. Числові результати. Розглянемо шарнірно оперту пластину (рис. 1), навантажену вздовж сторін, паралельних до осі OY .

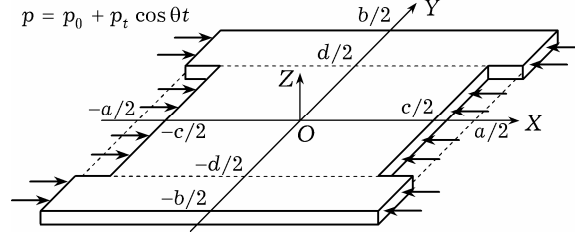


Рис. 1

Граничні умови в цьому випадку мають вигляд

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -p(t), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (20)$$

Нехай пластина виготовлена з матеріалу glass-епoxy ($E_1/E_2 = 3$, $G/E_2 = 0.6$, $\mu_1 = 0.25$).

3.1. Розв'язання послідовності лінійних задач. Як зазначено вище, власні функції w_i і власні частоти $\omega_{L,i}$ знаходимо за допомогою варіаційного методу Рітца, для чого побудуємо відповідний функціонал

$$I(W) = \iint_{\Omega} \left(C_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2C_1 \mu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4C_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \lambda^2 W^2 \right) d\Omega, \quad (21)$$

тут $\lambda^2 = 12 \cdot (1 - \mu_1 \mu_2) \omega_L^2$. Побудову послідовності координатних функцій здійснювали за допомогою *RFM*. Для граничних умов (20) була використана структура розв'язку

$$W = \omega \cdot P_1, \quad (22)$$

де P_1 – невизначена компонента розв'язку, $\omega(x, y) = 0$ – рівняння границі області. Для пластини, зображеної на рис. 1, функцію $\omega(x, y)$ побудуємо у вигляді

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 \bar{f}_4),$$

де

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, & f_2 &= \frac{1}{b} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0, \\ f_3 &= \frac{1}{c} \left(\left(\frac{c}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, & f_4 &= \frac{1}{d} \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Символи $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ у формулах (23) відповідають *R*-операціям [6]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} = -x.$$

Розклавши невизначену компоненту P_1 за повною системою функцій $\{\varphi_k\}$, $k = 1, \dots, \ell$:

$$P_1 = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \varphi_k,$$

отримуємо вираз для функції прогину

$$W = \sum_{k=1}^{\ell} a_k W_k, \quad (24)$$

де $\{W_k\}$ – послідовність координатних функцій, які мають вигляд

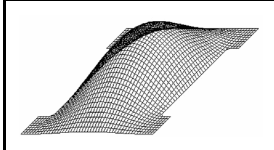
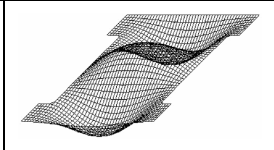
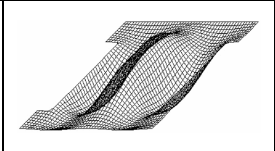
$$W_k = \omega \varphi_k.$$

З умови стаціонарності функціонала (21) знайдемо коефіцієнти a_k в (24) і відповідно власні функції

$$w_i = \sum_{k=1}^{\ell} a_k^{(i)} W_k.$$

Обчислення проводили при $\ell = 1, \dots, 36$ та $i = 1, \dots, 3$. Відповідні форми коливань розглянутої пластини з геометричними параметрами $b/a = 1$, $c/a = 0.8$, $d/a = 0.6$ наведено у табл. 1.

Таблиця 1

		
$\omega_{L,1} = 12.077$	$\omega_{L,2} = 34.287$	$\omega_{L,3} = 74.637$

Тепер визначимо функцію Φ (див. формулу (8)).

Оскільки пластина має однорідний докритичний стан, функцію Φ_0 зручно подати у вигляді

$$\Phi_0 = -\frac{y^2}{2},$$

задовольнивши таким чином умови (10). Тоді формула (14) для обчислення коефіцієнтів $\alpha_i^{(m)}$ істотно спроститься.

Послідовність крайових задач (11), (12) також розв'язуємо за допомогою методу R -функцій. При цьому слід зазначити, що граничні умови для функцій Φ_{ij} подаємо у вигляді

$$\Phi_{ij} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial n} = 0. \quad (25)$$

Можна довести, що варіаційна постановка задачі (11), (25) зводиться до мінімізації такого функціонала:

$$I(\Phi_{ij}) = \iint_{\Omega} \left[C_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{E_1}{G} \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} \right)^2 - 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x \partial y} \right)^2 + L(w_i, w_j) \Phi_{ij} \right] d\Omega.$$

Структуру розв'язку цієї задачі будуємо у вигляді

$$\Phi_{ij} = \omega^2 \cdot P_2, \quad (26)$$

де $\omega(x, y) = 0$ – рівняння границі області, P_2 – невизначена компонента, яка розкладається у ряд за деякою повною системою функцій.

Інтегрування для вибраної пластини виконували по 1/4 області з урахуванням симетрії задачі відносно осей OX та OY . Невизначені компоненти структурних формул (22), (26) апроксимували степеневими поліномами. Послідовності поліномів вибирали у такому вигляді:

$$P_1, P_2 : 1, x^2, y^2, x^4, x^2y^2, y^4, \dots$$

Для кожної із функцій використано по 36 координатних функцій, що відповідає 14-му степеню поліномів.

3.2. Побудова областей динамічної нестійкості (ОДН). Дослідження головних областей динамічної нестійкості, що відповідають трьом наведеним формам коливань (див. табл. 1), проводили для таких значень геометричних параметрів: $b/a = 1$, $c/a = 0.8$, $d/a = 0.6$. У ході аналізу отриманих результатів було виявлено, що матриця \mathbf{A} не є діагональною, але вплив її недіагональних елементів є незначним.

Результати дослідження впливу величини коефіцієнта демпфування ε на кожну з трьох областей зображено на рис. 2 (рис. 2а – при $\omega_{L,1} = 12.077$, рис. 2б – при $\omega_{L,2} = 34.287$, рис. 2в – при $\omega_{L,3} = 74.637$). Розрахунки виконували при $p_0 = 0.5$ для $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3$. Незавжно помітити, що найменшою є ОДН, яка відповідає другій формі, найбільшою – ОДН, що відповідає третій формі. Дійсно, наприклад, при $p_t = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ перша, друга і третя форми коливань відповідно збуджуються у проміжках

$$\Delta_1 = \theta_2^{(1)} - \theta_1^{(1)} = 23.82 - 23.19 = 0.63,$$

$$\Delta_2 = \theta_2^{(2)} - \theta_1^{(2)} = 68.40 - 68.31 = 0.09,$$

$$\Delta_3 = \theta_2^{(3)} - \theta_1^{(3)} = 148.81 - 147.92 = 0.89.$$

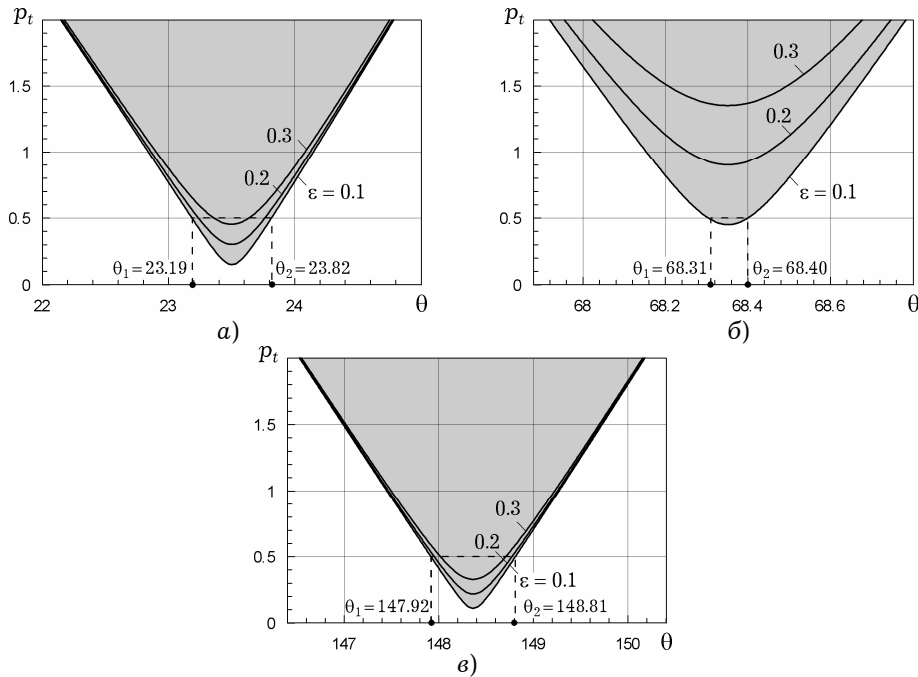


Рис. 2

Збільшення ε зумовлює зменшення ОДН, причому для другої форми це зменшення є найсуттєвішим.

На рис. 3 наведено ОДН, отримані при $\varepsilon = 0.2$ і для значень постійної складової навантаження $p_0 = 0, 0.5, 1$. Вплив зміни параметра навантаження p_0 на кожну з ОДН є однаковим. Зменшення p_0 зумовлює зсув ОДН уздовж осі θ до менших значень збуджуючої частоти, причому розміри ОДН залишаються незмінними.

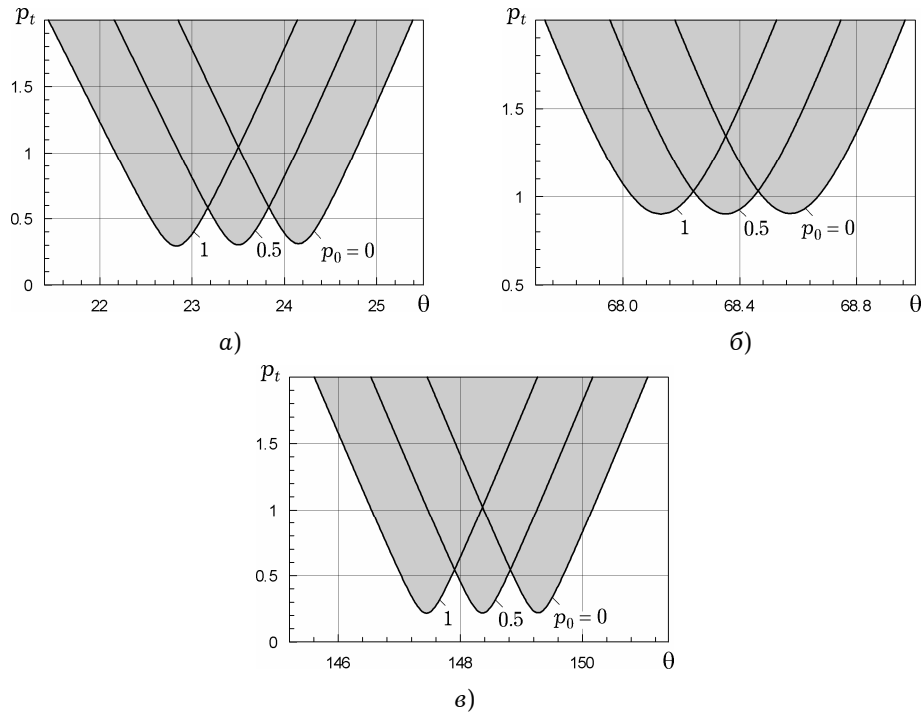


Рис. 3

3.3. Нелінійні параметричні коливання. При дослідженні параметричних коливань пластин головну увагу приділено поведінці системи в зоні головного параметричного резонансу, що відповідає першій формі коливань. Інтегрування нелінійної системи (16) проводили методом Рунге – Кутта 4-го порядку при $b/a = 1$, $c/a = 0.8$, $d/a = 0.6$, $\varepsilon = 0.1$, $w_0 = 0.0001$.

На рис. 4. зображено залежність максимального прогину в центрі пластини

$$w(0, 0, t) = \sum_{i=1}^3 w_i(0, 0) f_i(t) \quad (27)$$

від збуджуючої частоти θ . Розрахунки проводили при $p_0 = p_t = 0.5$, частоти θ вибирали з проміжку Δ_1 .

Отже, відмітимо, що при досить малих значеннях початкової амплітуди результати, отримані за допомогою лінійної теорії, відповідають результатам, отриманим за допомогою нелінійної теорії, тобто проміжок Δ_1 , у якому починають зростати амплітуди коливань, є однаковим в обох випадках.

На рис. 5 наведено залежність прогину $w(0, 0, t)$ у центрі пластини (27) від часу при $p_0 = p_t = 0.5$ і $\theta = 23.5$ (у резонансній зоні, що відповідає першій формі), а також функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$.

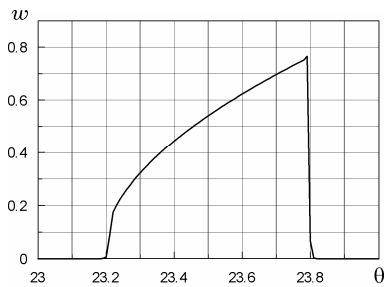


Рис. 4

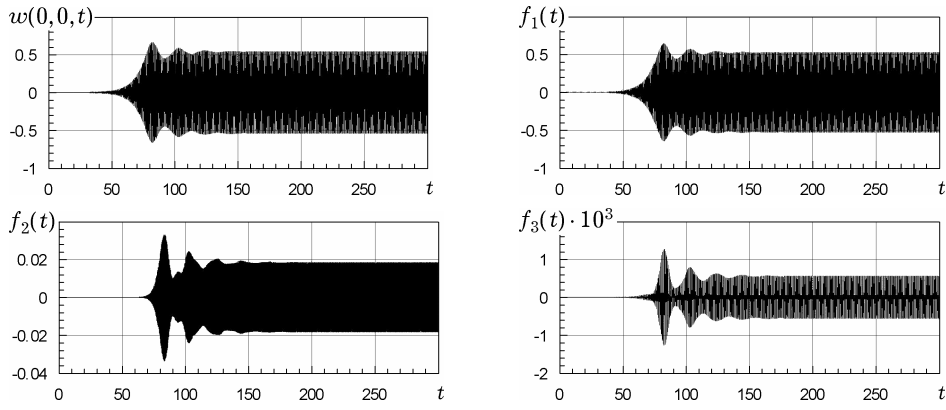


Рис. 5

Аналізуючи результати, наведені на рис. 5, приходимо до висновку, що суттєвий вклад у цьому випадку вносить лише перший доданок у (27).

Проаналізуємо поведінку системи при інших значеннях амплітуди змінної частини p_t діючого навантаження. У табл. 2 зображено залежності прогину від часу, отримані при використанні однієї та трьох мод для $p_t = 0.5, 1, 1.5$ та $\theta = 23.5$, $p_0 = 0.5$.

Таблиця 2

$n = 3$		$n = 1$	
$p_t = 0.5$			
$p_t = 1$			
$p_t = 1.5$			

Якщо при $p_t = 0.5$ в обох випадках отримуємо періодичні коливання з частотою, у два рази меншою від збуджуючої частоти θ , то при $p_t = 1$ характер коливань різний: у випадку тримодової апроксимації прогину коливання мають характер биття, при використанні однієї моди маємо періодичні коливання. При $p_t = 1.5$ отримуємо періодичні коливання з частотою, приблизно в два рази меншою від θ , як при $n = 3$, так і при $n = 1$, але амплітуда коливань відрізняється.

Висновки. Запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження параметричних коливань пластин складної форми з різними видами граничних умов. Цей метод базується на використанні теорії R -функцій і варіаційних методів, що дозволило звести початкову систему руху до нелінійної системи з періодичними коефіцієнтами.

Запропонований метод використано для розв'язання поставленої проблеми для пластин зі складною геометрією. При цьому досліджено вплив на ОДН параметрів навантаження та затухання. Виявлено що:

- збільшення постійної складової навантаження p_0 зумовлює зсув ОДН у напрямку менших значень збуджуючої частоти;
- збільшення коефіцієнта затухання ϵ зумовлює зменшення ОДН.

Проведення нелінійного аналізу дозволило зробити такі висновки:

- для побудови ОДН розглянутих пластин достатньо використовувати лінійну теорію;
- у зоні резонансу, що відповідає одній з форм, найсуттєвіший вплив на амплітуду коливань має саме ця форма;
- при дослідженні параметричних коливань пластин складної форми не є достатнім використання одномоделі апроксимації.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1947. – 348 с.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – Москва: Наука, 1970. – 512 с.
6. Рвачев В. Л., Курпа Л. В. R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 175 с.
7. Шмидт Г. Параметрические колебания. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
8. Awrejcewicz J., Krysko A. V. Analysis of complex parametric vibrations of plates and shells using Bubnov-Galerkin approach // Archive of Appl. Mech. – 2003. – **73**. – P. 495-504.
9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Research of stability and nonlinear vibration by R-functions method // Modeling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems / Ed. J. Awrejcewicz. – Springer, 2009. – P. 179-189.
10. Ganapathi M., Patel B. P., Boisse P., Touratier M. Non-linear dynamic stability characteristics of elastic plates subjected to periodic in-plane load // Int. J. Non-Linear Mech. – 2000. – **35**, No. 3. – P. 467-480.
11. Hutt J. M., Salam, A. E. Dynamic stability of plates by finite elements // J. Engng Mech. Division. ASCE. – 1971. – P. 879-899.

МЕТОД R-ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Предложен метод исследования параметрических колебаний ортотропных пластин сложной формы, удовлетворяющих различным видам граничных условий. Разработанный подход базируется на вариационных методах в сочетании с теорией R-функций. Предложенный подход использован для решения конкретных задач. В ходе численной реализации алгоритма для рассмотренной пластины сложной формы были построены области динамической неустойчивости, зависимости прогиба от возбуждающей частоты и времени.

R-FUNCTIONS METHOD FOR INVESTIGATION OF PARAMETRIC VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC COMPLEX FORM PLATES

Parametric vibrations of orthotropic plate with complex form and different types of boundary conditions are studied. The proposed method is based on application of variational methods with R-function theory. The developed method is illustrated on a concrete plate with complex form. The dynamic instability regions, dependencies of deflection on exciting frequency and time for a plate under consideration are constructed by the suggested algorithm.

Нац. техн. ун-т
«Харків. політехн. ін-т», Харків

Одержано
06.07.09