

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается методика голографической интерферометрии для определения частот свободных колебаний изотропных круговых цилиндрических оболочек, а также сравниваются экспериментальные результаты с результатами расчетов частот этих оболочек на основе методики сплайн-коллокации.

Во многих областях техники широкое применение находят круговые цилиндрические оболочки. Для эксплуатации этих конструкций требуются определенные условия прочности и надежности. В связи с этим особое значение приобретают надежные методы численного и экспериментального определения прочностных параметров таких конструкций, в частности, определение резонансных частот (или частот свободных колебаний).

В данной работе для исследования частот и форм свободных колебаний консольно защемленной изотропной круговой цилиндрической оболочки переменной толщины предлагается экспериментальная методика голографической интерферометрии, а также производится их сравнение с результатами численного расчета с помощью сплайн-коллокации.

1. Методика голографической интерферометрии. Оптическая голография – это способ записи и восстановления световых волн путем регистрации картины интерференции предметной волны и когерентной с ней опорной волны. Зарегистрированная на определенном носителе интерференционная картина называется голограммой. Процесс записи и возобновления голографических изображений исследованы полно в [5, 6, 8, 18, 19].

Если на фотопластинке зафиксировать результат интерференции опорной и предметной волны (рис. 1), а затем полученную голограмму осветить только опорной волной, то голограмма превращает опорную волну в копию предметной волны (рис. 2). При этом голограмма дает возможность восстановить как мнимое, так и действительное изображение исследуемой оболочки.

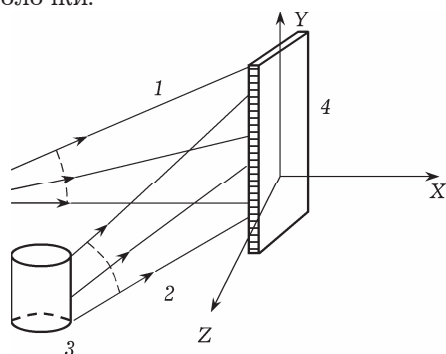


Рис. 1. Схема записи голограммы: 1 – опорная волна; 2 – предметная волна; 3 – оболочка; 4 – фотопластинка.

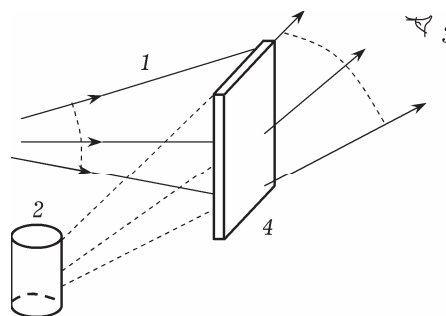


Рис. 2. Схема восстановления голограммы: 1 – опорная волна; 2 – мнимое изображение оболочки; 3 – наблюдатель; 4 – фотопластинка.

Важное свойство голограммы заключается в том, что она позволяет одновременно восстановить точные копии световых волн, которые отражались оболочкой в разные моменты времени и при разных состояниях оболочки.

При наложении этих волн возникает интерференционная структура, которая несет информацию об изменениях волнового фронта и являет собой голографическую интерферограмму. Голографическая интерферометрия, в

отличие от классической интерферометрии, позволяет исследовать объекты неправильной формы и объекты с разным качеством обработки поверхности. Важно также, что голографическая интерферометрия не предъявляет особых требований к качеству оптики.

Принцип голографических измерений для оболочек с диффузно отражательной поверхностью заключается в интерферометрическом сравнении волн, отраженных оболочкой в деформированном и недеформированном состояниях.

Практически такое сравнение можно проводить двумя способами:

1) зафиксировать на голограмме оболочку в исходном состоянии, а затем полученную голографическую копию световой волны в реальном времени сравнить со световой волной, которую отражает деформированная оболочка;

2) методом двойной экспозиции зарегистрировать на голограмме оба состояния оболочки и наблюдать результат наложения двух световых волн, восстановленных голограммой.

Голографическая интерферометрия в реальном времени отличается от двухэкспозиционной тем, что на голограмме регистрируется объект только в одном состоянии (опорная голограмма). После фотохимической обработки голограмма с интерферометрической точностью устанавливается на место экспонирования. В итоге за голограммой происходит интерференция предметной волны (что прошла через голограмму) и ее голографической копии. Если при этом с объектом происходят изменения, которые приводят к возникновению фазового сдвига в предметной волне по отношению к ее копии, то возникает интерференционная картина, наблюдаемая в реальном времени. Как и в методе двух экспозиций, интенсивность результирующей волны будет промодулирована по гармоничному закону

$$I(x, y) \sim 2[1 + \cos \delta(x, y)]. \quad (1)$$

Выражение (1) показывает, что голограмма восстановит предметную волну (то есть мнимое изображение объекта), промодулированную интерференционными полосами $2[1 + \cos \delta(x, y)]$. На участках волнового фронта, где $\delta = 2n\pi$, получим светлые полосы, а когда $\delta = (2n + 1)\pi$, получим темные полосы ($n = 0, 1, 2, \dots$).

В обоих случаях условие возникновения интерференции для каждой точки поверхности можно записать в виде

$$N\lambda = U(\cos\alpha + \cos\beta), \quad (2)$$

где λ – длина световой волны; N – порядок полосы, который отвечает данной точке поверхности оболочки; U – перемещение точки поверхности оболочки; α – угол между вектором перемещения и волновым вектором освещения; β – угол между вектором перемещения и вектором наблюдения.

Голографическое изображение оболочки при этом оказывается покрытым системой интерференционных полос, которые проходят через точки равных разностей хода лучей. При исследовании колебаний интерференционную картину можно наблюдать в реальном времени, что позволяет точно установить момент возникновения резонанса, выбрать необходимый режим вибровозбуждения и оперативно исследовать спектр собственных частот и форм колебаний.

Для изучения вибраций метод голографической интерферометрии применяется в двух модификациях: метод усреднения по времени (метод Пауш – Стетсона) и метод стробоголографической интерферометрии.

При усреднении по времени исследуемый объект вибраций регистрируется на голограмме при освещении непрерывным световым потоком. Поскольку в амплитудных положениях колеблющиеся точки находятся в больший промежуток времени, чем в промежуточных, поэтому на голограмме они фиксируются в основном только в амплитудных положениях. Соответственно возобновленная голограмма воспроизводит в мнимом изображе-

нии два мнимых изображения, удаленных друг от друга на удвоенную амплитуду колебаний. Интерференция этих волн приводит к образованию интерферограммы. При этом в узлах колебаний яркость изображения высокая, а по мере увеличения амплитуды она падает, что приводит к резкому снижению контраста интерференционных полос.

Соответствующие расчеты показывают, что при гармонических колебаниях яркость точек изображения оболочки, восстановленной из усредненной по времени голограммы, выражается такой зависимостью:

$$I \approx \alpha^2 \gamma_0^2 (4\pi A/\lambda), \quad (3)$$

где I – яркость точки в восстановленном изображении; γ_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; A – амплитуда колебаний точки; α – амплитуда световой волны; λ – длина световой волны.

График этой функции представлен на рис. 3. Кривая 1 – яркость изображения объекта из голограммы, усредненной во времени; кривая 2 – яркость изображения объекта, полученная с применением стробированного излучения.

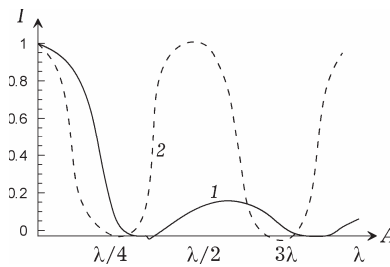


Рис. 3

Уменьшение яркости полос с увеличением амплитуды колебаний объясняется наличием некогерентной подсветки при прохождении оболочки промежуточных положений между амплитудами колебаний.

При оценке распределения амплитуд колебаний поверхности оболочки по интерферограммам форм колебаний, усредненных во времени, возникают проблемы точности определения координат полос интерференции. Поэтому для решения поставленных задач применялся метод стробоголографической интерферометрии, при котором существенно растет контраст полос и точность предела измерений.

Чтобы получить высокий контраст интерференционной картины по всей наблюдаемой поверхности вибрирующего объекта, необходимо убрать аргоновую засветку голограммы в те моменты времени, когда объект проходит промежуточные положения между амплитудными. С этой целью удобно использовать стробоскопическую регистрацию голограммы, синхронизируя стробимпульсы с амплитудными состояниями объекта. Модуляцию излучения осуществляют электрооптическим модулятором.

Импульсное освещение эффективно используется при исследовании периодических колебаний. Такие методы получения интерферограмм были названы стробоголографическими. Их значение заключается в том, что вибрирующий объект при голографировании освещается только в определенные моменты времени, например, соответствующие амплитудным значениям вибраций. Интерференционная картина в этом случае такая же, как при статических деформациях со сдвигами точек, равными размаху колебаний. По сравнению с методом усреднения контраст полос существенно возрастает, расширяются пределы измерения, однако эксперимент усложняется: нужен оптический модулятор и синхронизация с источником исследуемых колебаний. Кроме того, необходим компромисс при выборе длительности световых импульсов. Если импульсы очень короткие, то может стать неразрешенным время экспозиции. При росте же длительности импульсов падает контраст интерференционных полос.

Этот метод является видеоизмененным методом усреднения во времени. Если возбужденную оболочку во время получения голограммы освещать короткими световыми импульсами, синхронизированными с ее амплитудными положениями, то при скважности импульсов ≥ 20 полученную интерферограмму без существенных ошибок можно рассматривать как вариант двух экспозиций. Яркость интерференционных максимумов на ней доста-

точно незначительно уменьшается с ростом амплитуды колебаний. Расчеты показывают, что при высокой скважности стробирования яркость точек на стробинтерферограмме зависит от амплитуды по такому закону:

$$I \approx \alpha^2 \cos^2(2\pi A/\lambda). \quad (4)$$

Если импульс освещения достаточно короток, то этот метод эквивалентен методу голографической интерферометрии неподвижных объектов в реальном времени. Однако световой импульс может освещать возбужденную поверхность в любой из фаз колебания, что дает возможность сравнивать положение поверхности в любой из фаз колебания с ее неподвижным положением. Можно также изменять частоту колебаний и таким образом исследовать модовую структуру колебаний в широком диапазоне частот. При этом световые импульсы синхронизируются с колебаниями поверхности. Этим способом можно исследовать острые резонансы. Такая модификация стробоголографического метода позволяет наблюдать изменение интерференционной картины при увеличении амплитуды колебаний от нуля до определенной величины, при которой контраст полос становится неудовлетворительным, или при приближении частоты колебаний к резонансной. При описанных наблюдениях стало возможно определять положение узловых линий для данных частот, а также определять относительную фазу колебаний для всех точек модовой картины вибраций. Стробоскопические методы применяются и в голографической двухэкспозиционной интерферометрии. Одна из их модификаций такая: используются пары мировых импульсов, которые дают две экспозиции; пары импульсов синхронизируются с вибрацией так, что они освещают объект один раз за период колебания; при восстановлении голограммы получается система интерференционных полос, которые характеризуют относительное смещение поверхности за время между первым и вторым импульсами; интервалы между импульсами регулируются, что позволяет исследовать достаточно сильные вибрации, то есть уменьшать относительное смещение поверхности между импульсами при больших амплитудах колебаний, оставаясь при этом в пределах точности метода.

Для решения поставленных задач в данной работе была разработана и применялась вторая модификация метода. Первую экспозицию проводили при неподвижной поверхности. Для обеспечения при восстановлении высокой дифракционной эффективности время первой экспозиции выбирали равным половине привычного времени экспозиции. Потом возбуждали вибрацию поверхности, а для освещения поверхности использовали синхронизированные с колебаниями световые импульсы. При таких условиях повторно экспонировали голограмму. При восстановлении голограммы появляется характерная для метода двух экспозиций интерференционная картина, которая имеет характерные для стробоскопического метода преимущества:

- амплитуды вибраций можно изучать в любой фазе колебаний;
- интерференционные полосы имеют постоянный контраст.

Для определения амплитуд колебаний поверхности оболочек вдоль образующей использовался однокомпонентный голографический интерферометр на базе гелий-неонового лазера ЛГН-222 (рис. 4). Лазерный луч светоделе-

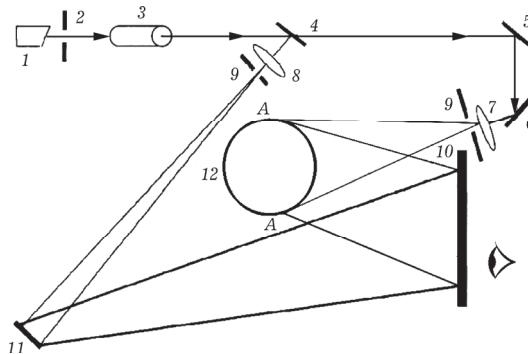


Рис. 4. Оптическая схема установки: 1 – лазер ЛГН-222; 2 – затвор; 3 – электрооптический модулятор МЛ-3; 4 – светоделительная пластинка; 5, 6, 11 – 100% плоские зеркала; 7, 8 – микрообъективы; 9 – диафрагма; 10 – голограмма; 12 – оболочка.

лительной пластинкой 4 делится на два луча, из которых зеркалами 6, 11, микрообъективами 7 и 8 формируются соответственно пучок освещения оболочки и опорный пучок.

2. Методика расчета частот и форм свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях ортотропной круговой цилиндрической оболочки переменной толщины $h(s, \theta)$. В качестве координатных линий выбираем длину дуг s по образующей и центральный угол направляющей θ . Тогда длина элемента срединной поверхности оболочки определяется таким образом: $dl^2 = ds^2 + R^2 d\theta^2$, откуда получаем параметры Ламе оболочки: $A = 1$, $B = R$.

Согласно классической теории Кирхгофа – Лява [1–3, 7, 12–16] уравнения, описывающие свободные колебания круговых цилиндрических оболочек в перемещениях, будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned}
& C_{66} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial C_{66}}{R \partial \theta} \frac{\partial u}{R \partial \theta} + C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{11}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 v}{R \partial \theta \partial s} + \\
& \quad + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{\partial C_{66}}{R \partial \theta} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial C_{12}}{R \partial s} w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
& C_{22} \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial C_{22}}{R \partial \theta} \frac{\partial v}{R \partial \theta} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 u}{R \partial \theta \partial s} + \\
& \quad + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial C_{12}}{R \partial \theta} \frac{\partial u}{\partial s} - D_{22} \frac{\partial^3 w}{R^4 \partial \theta^3} - \frac{\partial D_{22}}{R^2 \partial \theta} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} - \\
& \quad - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta \partial s^2} - 4 \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta \partial s} + \\
& \quad + C_{22} \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} - \frac{\partial D_{12}}{R^2 \partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{22}}{R^2 \partial \theta} w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
& D_{22} \frac{\partial^4 w}{R^4 \partial \theta^4} + 2 \frac{\partial D_{22}}{R \partial \theta} \frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \theta^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{R^2 \partial \theta^2 \partial s^2} + \\
& \quad + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta^2 \partial s} + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{R^2 \partial \theta^2} \right) \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} + \\
& \quad + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{R \partial \theta} \frac{\partial^3 w}{R \partial \theta \partial s^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{R \partial \theta \partial s} \frac{\partial^2 w}{R \partial \theta \partial s} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \\
& \quad + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{R^2 \partial \theta^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{C_{22}}{R^2} w + \\
& \quad + C_{22} \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial s} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{5}
\end{aligned}$$

На контурах $\theta = \text{const}$ задаются граничные условия, которые определяются через перемещения:

– жестко закрепленный контур (C):

$$u = v = w|_{\theta=\text{const}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}|_{\theta=\text{const}} = 0; \tag{6}$$

– шарнирно закрепленный контур (Sc):

$$u = v = w|_{\theta=\text{const}} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}|_{\theta=\text{const}} = 0; \tag{7}$$

– шарнирно опертый контур (S):

$$u = w|_{\theta=\text{const}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}|_{\theta=\text{const}} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}|_{\theta=\text{const}} = 0; \tag{8}$$

– замкнутый контур (условия симметрии **Sm**):

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\text{const}} = 0, \quad v|_{\theta=\text{const}} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \Big|_{\theta=\text{const}} = 0; \quad (9)$$

– свободный контур (**F**):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{R\partial \theta} + \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} \Big|_{\theta=\text{const}} &= 0, & \frac{\partial u}{R\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_{\theta=\text{const}} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \Big|_{\theta=\text{const}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \theta^3} + \frac{3}{R^3} \frac{\partial h}{h \partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}R} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2 \partial \theta} + 12 \frac{B_{66}}{RB_{22}} \frac{\partial h}{h \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \right. \\ &\left. + 3 \frac{B_{12}}{RB_{22}} \frac{\partial h}{h \partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \Big|_{\theta=\text{const}} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичные условия, кроме условий **Sm**, могут быть заданы и на контурах $s = \text{const}$, если в уравнениях (6)–(10) сделать замену $s \leftrightarrow R\theta$, $u \leftrightarrow v$, $1 \leftrightarrow 2$.

На контурах оболочек могут быть заданы произвольные комбинации граничных условий вида (6)–(10). Например, **C-C-C-C** – жестко закрепленная по всем контурам открытая цилиндрическая оболочка; **F-C-F-C** – защемленная на прямолинейных торцах открытая цилиндрическая оболочка; **C-Sc-C-Sc** – защемленная на криволинейных торцах и шарнирно закрепленная по образующей открытая цилиндрическая оболочка. В работе рассматриваем консольно защемленную замкнутую цилиндрическую оболочку, следовательно, комбинация краевых условий для нее будет **Sm-C-Sm-F**.

В дальнейшем будем рассматривать стационарные колебания оболочки. Тогда перемещения можно будет представить в виде [12]:

$$\begin{aligned} u(s, t, \tau) &= \tilde{u}(s, t) e^{i\omega_0 \tau}, & v(s, t, \tau) &= \tilde{v}(s, t) e^{i\omega_0 \tau}, \\ w(s, t, \tau) &= \tilde{w}(s, t) e^{i\omega_0 \tau}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{u}(s, t)$, $\tilde{v}(s, t)$ и $\tilde{w}(s, t)$ – амплитуды перемещений, ω_0 – частота свободных колебаний оболочки.

Систему уравнений (5) с учетом (11) удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= a_{11}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{12}(\theta, s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_{13}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial s} + a_{14}(\theta, s, \omega_0) u + \\ &+ a_{15}(\theta, s) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial s} + a_{16}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ &+ a_{17}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial s} + a_{18}(\theta, s) \frac{\partial w}{\partial s} + a_{19}(\theta, s) w, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= a_{21}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{22}(\theta, s) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + a_{23}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial s} + a_{24}(\theta, s, \omega_0) v + \\ &+ a_{25}(\theta, s) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial s} + a_{26}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{27}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial s} + a_{28}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \\ &+ a_{29}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + a_{2,10}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial s^2} + a_{2,11}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial s} + \\ &+ a_{2,12}(\theta, s) \frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{2,13}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{2,14}(\theta, s) w, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= a_{31}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + a_{32}(\theta, s) \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial s^2} + a_{33}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial s} + a_{34}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \\ &+ a_{35}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial s^2} + a_{36}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial s} + a_{37}(\theta, s) \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{38}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + a_{3,9}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \\
& + a_{3,10}(\theta, s, \omega_0) w + a_{3,11}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial s} + a_{3,12}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Сформулированная краевая задача на собственные значения для систем дифференциальных уравнений в частных производных решалась методом сплайн-коллокации [9–11, 17].

Для искомым перемещений примем такое представление [4, 15]:

$$\begin{aligned}
u(\theta, s) &= \sum_{i=-\alpha}^{N+\beta} u_i(\theta) \varphi_{1i}(s), & v(\theta, s) &= \sum_{i=-\alpha}^{N+\beta} v_i(\theta) \varphi_{2i}(s), \\
w(\theta, s) &= \sum_{i=-\delta}^{N+\gamma} w_i(\theta) \varphi_{3i}(s), \quad (13)
\end{aligned}$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $i = 0, \dots, N$, – искомые функции; $\varphi_{1i}(s)$, $\varphi_{2i}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций B -сплайнов третьей степени ($N \geq 4$), $\varphi_{3i}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций B -сплайнов пятой степени ($N \geq 6$), которые точно удовлетворяют граничным условиям при $s = \text{const}$ [4, 15]. Основные преимущества B -сплайнов обусловлены следующим:

- устойчивостью относительно локальных возмущений, то есть поведение сплайнов в окрестности точки не влияет на поведение сплайна в целом;
- более удовлетворительной сходимостью, в отличие от случая применения многочленов как функций аппроксимации;
- простотой и удобством при вычислении и реализации сплайн-функций на современных персональных компьютерах.

Для краевых условий типа **C**, **Sc**, **S** в (13) следует положить $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Если только один контур оболочки $s = 0$ (или $s = L$) свободен (**F**), то в (13) следует положить $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 2, \delta = 0$, ($\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 2$). Если же оболочка свободна по торцам, то $\alpha = \beta = 1, \gamma = \delta = 2$. При ненулевых значениях параметров α, β, γ или δ соответствующие комбинации B -сплайнов представляют один единственный B -сплайн определенной степени, а соответствующие краевые условия присоединяются к системе уравнений (12).

Подставив (13) в уравнения (12), будем требовать, чтобы они точно удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = 0, \dots, N$. В случае четного числа узлов сетки ($N = 2n + 1$, $n \geq 3$) и при условии, что узлы коллокации удовлетворяют требованиям: $\xi_{2q} \in [s_{2q}, s_{2q+1}]$, $\xi_{2q+1} \in [s_{2q}, s_{2q+1}]$, $q = 0, \dots, n$, на отрезке $[s_{2q}, s_{2q+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[s_{2q+1}, s_{2q+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков $[s_{2q}, s_{2q+1}]$ точки коллокации выбираются следующим образом: $\xi_{2q} = s_{2q} + z_1 h$, $\xi_{2q+1} = s_{2q} + z_2 h$, $q = 0, \dots, n$, где z_1 и z_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равны: $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ и $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации. После всех преобразований получим систему $N + 1 + \alpha + \beta + \delta + \gamma$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i , v_i и w_i , которую можно записать в нормальной форме Коши

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta, \omega_0)\bar{Y}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad (14)$$

где $\bar{Y}^\top = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}'''\}^\top$, $\bar{u}^{(i)} = (u_{-\alpha}^{(i)}, \dots, u_{N+\beta}^{(i)})$, $\bar{v}^{(i)}v = (v_{-\alpha}^{(i)}, \dots, v_{N+\beta}^{(i)})$, $i = 0, 1$, $\bar{w}^{(j)} = (w_{-\delta}^{(j)}, \dots, w_{N+\gamma}^{(j)})$, $j = 0, \dots, 3$; \bar{Y} – вектор искомых функций; $\mathbf{A}(\theta, \omega_0)$ – квадратная матрица порядка $8(N + 1 + \alpha + \beta + \delta + \gamma)$.

Граничные условия (6)–(10) для системы (12) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_1\bar{Y}(\theta_1) = \bar{0}, \quad \mathbf{B}_2\bar{Y}(\theta_2) = \bar{0}. \quad (15)$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (14) с граничными условиями (15) решалась методом дискретной ортогонализации вместе с методом пошагового поиска [2–4, 12, 13, 15, 16].

3. Результаты исследований. С помощью описанной в п. 1 методики голографической интерферометрии исследовался спектр резонансных колебаний консольно заземленной изотропной круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины (рис. 5, размеры приведены в мм). Предложенные численный и экспериментальный подходы позволяют проводить решения задач о свободных колебаниях упругих цилиндров также в случае переменной толщины. Параллельно были проведены расчеты частот и форм собственных колебаний с помощью описанной в п. 2 методики сплайн-коллокации.

Характеристики оболочки таковы: $R = 0.044$ м – радиус срединной поверхности; $L = 0.12$ м – длина оболочки; $h_0 = 0.00445$ м – толщина оболочки. Механические свойства материала (сталь 40X): $E = 2.14 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.2588$, $\rho = 7850$ кг/м³.

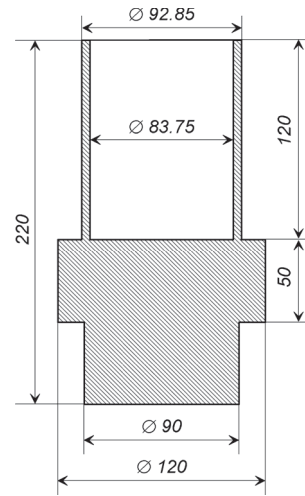


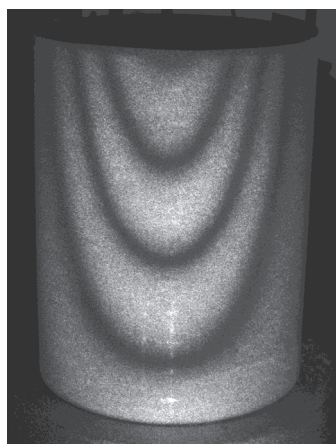
Рис. 5

В табл. 1 представлены экспериментальные $f_{i, \text{эксп}}$ и расчетные $f_{i, \text{расч}}$ частоты, $i = 1, \dots, 15$, рассматриваемой оболочки для экспериментального количества полуволн по образующей и направляющей соответственно m и n , а также относительная расхожимость измерений и вычислений ε .

Таблица 1

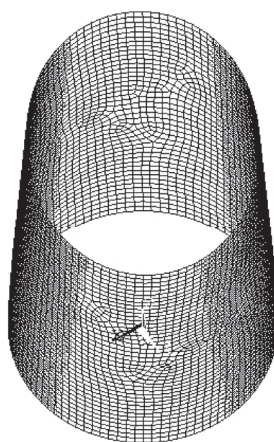
i	n	m	$f_{i, \text{эксп}}, \text{ Гц}$	$f_{i, \text{расч}}, \text{ Гц}$	$\varepsilon, \%$
1	1	4	2238	2389	6.7
2	–	–	–	3774	–
3	1	6	4544	4582	0.8
4	2	4	6722	6860	2.0
5	2	6	7047	7078	0.4
6	–	–	–	7103	–
7	1	8	8346	8388	0.5
8	2	8	10090	10121	0.3
9	3	8	10406	10561	1.5
10	–	–	–	10804	–
11	3	6	11856	12068	1.8
12	3	4	12469	13229	6.1
13	1	10	13193	13236	0.3
14	–	–	–	13887	–
15	2	10	14700	14734	0.23

На рис. 6–11 представлены экспериментальные и расчетные формы резонансных колебаний этих оболочек для частот f_i , $i = 1, 2, 7, 8, 13, 15$.



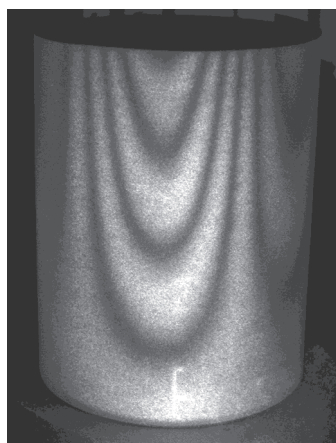
a)

f_1



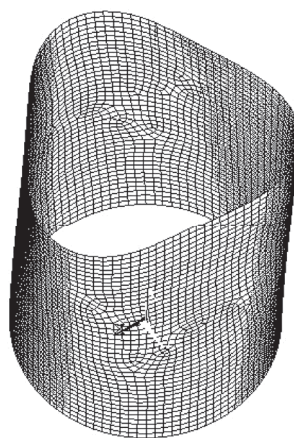
б)

Рис. 6



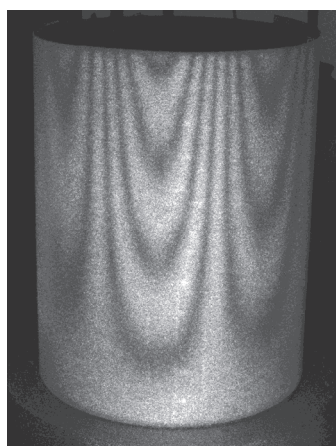
a)

f_2



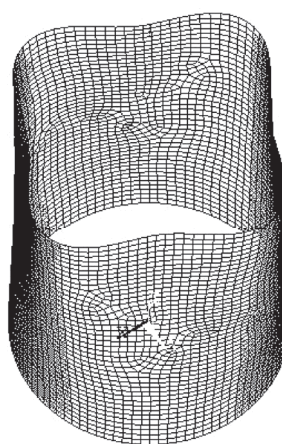
б)

Рис. 7



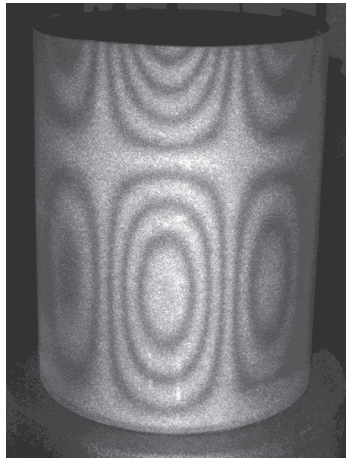
a)

f_7



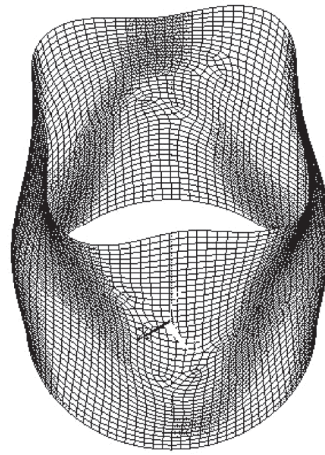
б)

Рис. 8



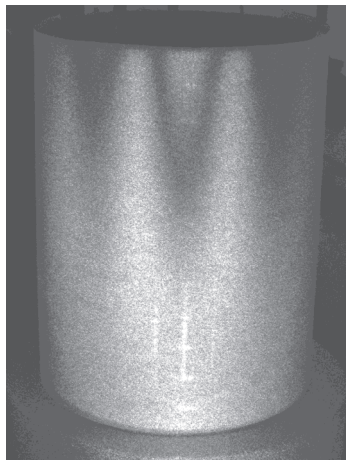
a)

f_8



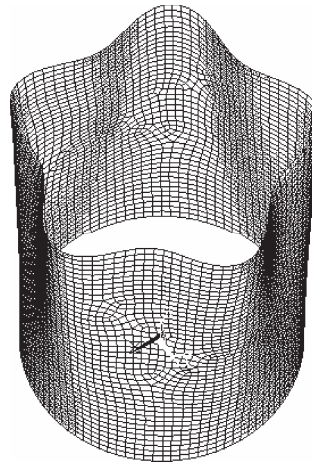
б)

Рис. 9



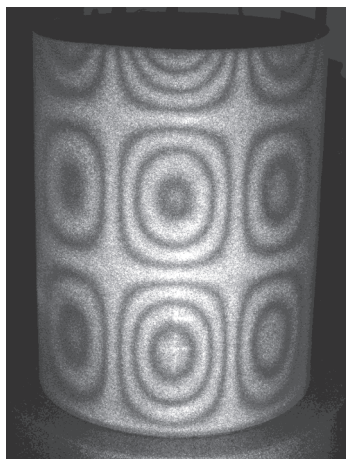
a)

f_{13}



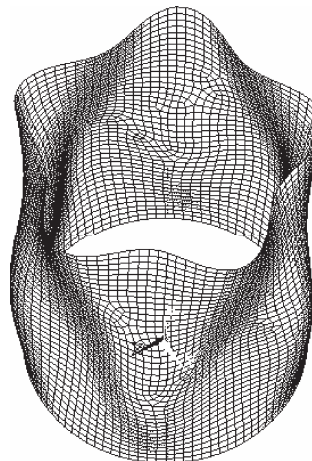
б)

Рис. 10



a)

f_{15}



б)

Рис. 11

Выводы. Из анализа результатов, приведенных в табл. 1, следует, что наибольшее расхождение между экспериментальными и численными результатами наблюдается только для частот f_1 и f_{12} (6.7% и 6.1%). К такому же выводу можно придти, рассматривая формы свободных колебаний на рис. 6–11. Большинство расчетных частот хорошо коррелирует с экспериментальными данными, что говорит о достаточной точности гипотез Кирхгофа – Лява для практических расчетов. Следует отметить, что в расчете фигурируют частоты, которые не обнаруживаются при соответствующем измерении (для $f_{2,эксп}$, $f_{6,эксп}$, $f_{14,эксп}$ в табл. 1). Этот факт можно отнести к неточности методики измерения, поскольку соответствующие формы являются либо очень близкими (см., например, рис. 6 и рис. 7 для частот f_1 и f_2), либо являются осесимметричными и их трудно выявить экспериментально.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Беспалова Е. И., Григоренко Я. М., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Исследование свободных колебаний неоднородных цилиндрических оболочек в трехмерной постановке // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 4. – С. 9–14.
То же: *Bespalova E. I., Grigorenko Ya. M., Kitaigorodskii A. B., Shinkar' A. I.* Free vibrations of inhomogeneous cylindrical shells in a three-dimensional formulation // *Int. Appl. Mech.* – 1984. – 20, No. 4. – P. 305–308.
3. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1977. – 488 с.
4. Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В. Численное решение задачи о свободных колебаниях пологих оболочек с прямоугольным планом методом сплайн-коллокации // Збірн. наук. праць Нац. ун-ту кораблебудування ім. С. О. Макарова. – 2006. – № 4 (409). – С. 115–122.
5. Будак В. Д., Овчаренко А. В., Золотий Ю. Г., Фролова Т. Ф., Фролов Б. А., Хорішко В. В. Експериментальне визначення динамічних характеристик товстої циліндричної оболонки методом голографічної інтерферометрії // Тези доп. Х Всеукр. наук. конф. «Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики». – Миколаїв: Миколаїв. держ. ун-т ім. В. О. Сухомилинського, 2005. – С. 67.
6. Вест Ч. Голографическая интерферометрия. – Москва: Мир, 1982. – 504 с.
7. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 707 с.
8. Гинзбург В. М., Степанов Б. М. Голографические измерения. – Москва: Радио и связь, 1981. – 296 с.
9. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 8. – С. 91–102.
То же: *Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P.* Stress state of nonthin orthotropic shells with varying thickness and rectangular planform // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, No. 8. – P. 905–915.
10. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – 46, № 10. – С. 74–85.
То же: *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* Using spline-approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of thick-walled orthotropic cylinders // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 46, No. 10. – P. 1137–1147.
11. Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 3. – С. 112–120.
То же: *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Loza I. A.* Solution of an axisymmetric problem of free vibrations of piezoceramic hollow cylinders of finite length by the spline collocation method // *J. Math. Sci.* – 2010. – 165, No. 2. – P. 290–300.
12. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.

13. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 11. – С. 32–68.
То же: Grigorenko Ya. M., Vasilenko A. T. Some approaches to the solution of problems on thin shells with variable geometrical and mechanical parameters // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 11. – P. 1309–1341.
14. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.)
15. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1979. – 280 с.
16. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 280 с.
17. Ефимова Т. Л. Решение задач о свободных крутильных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 92–100.
18. Козачек А. Б. Голографические методы исследования в экспериментальной механике. – Москва: Машиностроение, 1984. – 175 с.
19. Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В. Голографическая интерферометрия. – Москва: Наука, 1977. – 339 с.

ТЕОРЕТИКО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ КРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Розглядається методика голографічної інтерферометрії для визначення частот вільних коливань ізотропних кругових циліндричних оболонок, а також порівнюються експериментальні результати з результатами розрахунків частот цих оболонок на основі методики сплайн-колокації.

THEORETICAL-EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF FREE VIBRATIONS' FREQUENCIES OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS

The method of holography interferometry is examined for determination of frequencies of free vibrations of isotropic circular cylindrical shells, and also experimental results are compared with the results of calculations of frequencies of these shells on the basis of the of spline-collocation method.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенко
НАН України, Київ,

² Николаев. гос. ун-т
им. В. А. Сухомлинского, Николаев

Получено
25.08.09