УДК 517.983.54

М. Круль

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА СТІЙКІСТЬ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ІТО ПЕРШОГО І ДРУГОГО ПОРЯДКІВ

Вивчається експоненціальна стійкість еволюційних диференціальних рівнянь, отриманих на основі рівнянь теплопровідності. Для визначення меж стохастичної стійкості розв'язку цих рівнянь застосовується метод побудови функціонала Ляпунова.

Вступ. Стаття присвячена застосуванню методу Ляпунова до виведення критеріїв майже безсумнівної стійкості нелінійних рівнянь типу Іто, породжених рівняннями, що описують процеси теплообміну [9]. Для цього використаємо формулювання задачі та результати, отримані в [5–7, 9, 10]. До аналізу стійкості застосовано експоненціальну формулу мартингала, функціонал Ляпунова і деякі нерівності, необхідні для визначення меж стійкості.

Методи, використані в статті, раніше були застосовані такими авторами, як U. G. Haussmann [7], A. Ichikawa [8]. Дослідження в цьому напрямку проводили також P. L. Chow [6], T. Caraballo [3–5], J. Appleby [2].

1. Основні позначення та деякі означення. Нехай V – рефлексивний банахів простір з двома дійсними сепарабельними гільбертовими просторами H, K такими, що

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*,$$

причому ці включення є щільні та неперервні, V і V^* – рівномірно опуклі простори.

Введемо необхідні позначення. Позначимо через $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ норми відповідно в просторах V і H, через $(\cdot,\cdot)$ – внутрішній добуток у просторі H, а через $\langle\, \cdot\,,\, \cdot\,\rangle$ – скалярний добуток між просторами V і V^* такий, що $\left\langle x \in V,\, y \in V^* \right\rangle$.

Нехай $W(t)$ – процес Вінера, який приймає значення в осередненому просторі Гільберта і визначений на деякому повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P). Приймаємо, що елементи сепарабельного гільбертового простору K, на якому визначений незалежний оператор коваріації Q_W, мають скінченну норму $|\cdot|$. Позначимо через $\{F_t\}_{t\ge 0}$ сім'ю всіх s-тіл, утворених множиною $\{W_s, 0 \le s \le t\}_{t \ge 0}$. Тоді $W(t)$ є дійсним мартингалом відносно сім'ї $\{F_t\}_{t\ge 0}$ і його можна подати за допомогою формули

$$W(t) = \sum_{i-1}^{\infty} \beta_t^i e_i\,, \tag{1}$$

де $\{e_i\}$ – множина власних векторів оператора Q_W, а β_t^i – взаємно незалежні дійсні процеси Вінера з приростом коваріації $\lambda_i > 0$,

$$Q_W e_i = \lambda_i e_i \tag{2}$$

і

$$\operatorname{tr} Q_W = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \tag{3}$$

($\operatorname{tr} Q$ – слід оператора).

Ймовірнісний інтеграл $\int_0^t \Phi(s,\omega)\, dW_s$ означимо так.

Нехай

$$\mathscr{L}_2(K,H) := \{L \in \mathscr{L}(K,H) : \|L\|_2^2 = \operatorname{tr}(LQ_W L^*) < \infty\}, \tag{4}$$

де $\mathscr{L}(K,H)$ – сім'я всіх обмежених лінійних операторів із K в H з топологією, породженою нормою оператора. Нехай $\Phi(t,\omega)$, $t \in [0,T]$, є F_t-вимірним процесом, який приймає значення в $\mathscr{L}_2(K,H)$, з нормою

$$|\Phi|_t = \left\{E\int_0^t \|\Phi(s,\omega)\|_2^2\, ds\right\}^{1/2} \tag{5}$$

для довільного $t \in [0,T]$.

Позначимо через $N^2([0,T],\mathscr{L}_2(K,H))$ (або простіше – через $N^2(0,T)$) всі предикційні процеси Φ з множиною значень в $\mathscr{L}_2(K,H)$ такі, що $|\Phi|_T < +\infty$.

Ймовірнісний інтеграл $\int_0^t \Phi(s,\omega)\, dW_s \in H$ описуємо формулою

$$\int_0^t \Phi(s,\omega)\, dW_s = L_2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi(s,\omega)\, e_i d\beta_s^i \tag{6}$$

для всіх $\Phi(t,\omega) \in N^2(0,T)$, де $t \in [0,T]$.

Розглянемо стохастичні рівняння нескінченного порядку в просторі V^* для будь-якого $T > 0$:

$$\begin{aligned} &dX_t = f(X_t,t)\, dt + g(X_t,t)\, dW_t, \qquad t \in [0,T], \\ &X_0 = x_0, \end{aligned} \tag{7}$$

де $f(\,\cdot\,,t) : V \to V^*$ – сім'я всіх нелінійних F_t-вимірних операторів для майже всіх t. Функція $g(\,\cdot\,,t) : V \to F_2(K,H)$ є F_t-вимірним (можливо, обмеженим) відображенням для майже всіх t і така, що $g(X_t,t) \in N^2(0,T)$.

На стохастичний процес накладемо обмеження

$$X_t \in L^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega,(0,T;H)) \qquad \forall T > 0. \tag{8}$$

Вираз (8) є одночасно сильним розв'язком системи (7). Простір усіх неперервних функцій на проміжку $[0,T]$ позначимо через $C(0,T;H)$ на H. Інакше кажучи, X_t у просторі V^* задовольняє таке інтегральне рівняння:

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s,s)\, ds + \int_0^t g(X_s,s)\, dW_s, \quad t > 0,\ P\text{-майже всюди}, \tag{9}$$

де $x_0 \in L^2(\Omega,F_t,P;V)$.

На основі введених позначень сформулюємо такі умови (див. [11]):

1°. *Вимірність*: відображення $t \in (0,T) \mapsto f(x,t) \in V^*$ вимірне за Лебеґом $\forall x \in V$ для майже всіх t, $\forall T > 0$;

2°. *Півнеперервність*: відображення $\theta \in \mathbb{R} \mapsto (f(x+\theta y,t),z) \in \mathbb{R}$ є неперервним $\forall x, y, z \in V$ для майже всіх t;

3°. *Обмеженість*: існує така стала $c > 0$, що

$$\|f(x,t)\|_* \le c\|x\| \quad \forall x \in V \text{ для майже всіх } t,$$

де $\|\cdot\|$ – норма в просторі V^*.

Нехай $g(\cdot,t)$ – сім'я всіх операторів з V в $\mathscr{L}(K,H)$ таких, що для кожних $h \in H$, $k \in K$, $N \in \mathbb{R}^+$ існує таке $L > 0$, що

$$\left|(h,a(u,t)k) - (h,g(u,t)k)\right| \le L\|u - v\| \qquad \forall u,v \in V : \|u\|,\|v\| \le N,$$

де відображення $t \to g(u,t)$ вимірне за Лебеґом на проміжку $(0,T)$ в $\mathscr{L}(K,H)$ $\forall u \in V$.

Введемо означення ще таких властивостей:

4°. *Коерцитивність*: існують $\alpha > 0$, $p > 1$ і $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ такі, що

$$2\langle f(x,t),x\rangle + \|g(x,t)\|_2^2 \le -\alpha\|x\|^2 + \lambda|x|^2 + \gamma \qquad \forall x \in V$$

для майже всіх t.

5°. *Монотонність*:

$$-2\langle f(x,t) - f(y,t), x - y\rangle + \lambda|x - y|^2 \ge \|g(x,t) - g(y,t)\|_2^2 \quad \forall x,y \in V$$

для майже всіх t.

Теорема 1 [11] (формула Іто). *Нехай* $V(\cdot,t) : H \to \mathbb{R}$ *– нелінійний функціонал, який задовольняє такі умови* $\forall t \in \mathbb{R}$:

(***а***) $V(x,t)$ *диференційовний за* t *і двічі диференційовний (за Френе) за* x, *де похідні* $V_t'(\cdot,t)$, $V_x'(\cdot,t)$ *і* $V_{xx}''(\cdot,t)$ *локально обмежені на* H;

(***б***) $V(x,t)$, $V_x'(\cdot,t)$ *і* $V_{xx}''(\cdot,t)$ *неперервні на* H;

(***в***) *для всіх операторів* T *слід* $\mathrm{tr}(TV_{xx}'')$ *неперервний на* $H \to \mathbb{R}$;

(***г***) *якщо* $v \in V$, *то* $V_x'(v,t) \in V$ *і відображення* $u \mapsto \langle V_x'(v,t), v^*\rangle$ *неперервне для кожного* $v^* \in V$;

(***д***) $\|V_x'(v,t)\| \le C_0(t)(1 + \|v\|)$, $C_0(t) > 0$, *для всіх* $v \in V$.

Тоді сильний розв'язок X_t *рівняння* (1) *можна записати у вигляді*

$$V(X_t,t) = V(X_0,0) + \int_0^t LV(X_s,s)\,ds + \int_0^t \left(V_x'(X_s,s), g(X_s,s)\,dW_s\right), \tag{10}$$

де

$$LV(x,t) = V_t'(x,t) + \langle V_x'(x,t), f(x,t)\rangle + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(V_{xx}''(x,t)g(x,t)Q_W g^*(x,t)\right). \tag{11}$$

Надалі будемо приймати, що для $V(x,t)$, $x \in H$, $t \in \mathbb{R}$, виконуються умови теореми 1.

Введемо означення майже безсумнівної експоненціальної стійкості («almost sure exponential stability» [9]).

Означення 1. Рівняння (1) або його сильний розв'язок буде *майже безсумнівно експоненціально стійким,* якщо існує таке $\gamma > 0$, що для кожного випадкового F_0-вимірного вектора $x_0 \in V$ виконується нерівність

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|X_t(x_0)|}{t} \le -\gamma$$

майже всюди.

2. Стійкість термопружних моделей: постановка задачі та отримані результати. Побудуємо функцію Ляпунова, за допомогою якої зможемо дослідити майже безсумнівну стохастичну стійкість нелінійного еволюційного рівняння (7).

Припустимо, що $V(x,t) \in C^{2,1}$ – додатний функціонал такий, що $x \in \in V$, $t \in \mathbb{R}^+$, $V_t'(x,t) \in V$. Тут $C^{2,1}$ – клас функціоналів, диференційовних за часом і двічі диференційовних за просторовими змінними.

Для формулювання критерію стійкості означимо оператори L і Q так, що для всіх $x \in V$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$LV(x,t) = V_t'(x,t) + \left\langle V_x'(x,t), f(x,t) \right\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(V_{xx}''(x,t)g(x,t)Q_W g^*(x,t))$$

і

$$QV(x,t) = \operatorname{tr}\left[V_x' \otimes V_x'(x,t)\left(g(x,t)Q_W g^*(x,t)\right)\right], \tag{12}$$

де символом «$\otimes$» позначено тензорний добуток.

Наведемо деякі твердження, необхідні до подальшого аналізу.

Лема 1. *Нехай* X_t *– сильний розв'язок рівняння* (7), *функція* $g(x,t)$ *і функціонал* $V(x,t)$ *такі, як означено вище, а* T, α, β *– деякі задані додатні числа. Тоді*

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left[\int_0^t \left(V_x'(X_s,s), g(X_s,s)\right)dW(t) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t QV(X_s,s)\,ds > \beta\right]\right\} \le e^{-\alpha\beta}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Припустимо, що розв'язок* X_t *рівняння* (7) *задовольняє умову* $\left|X_t(x_0)\right| \ne 0$ *при* $\left|x_0\right| \ne 0$ *для всіх* $t \ge 0$ *майже всюди. Нехай* $V(x) \in \in C^2(H,\mathbb{R}^+)$ *і* $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{R}$ *– невід'ємні неперервні функції. Якщо для всіх* $x \in V$ *і* $t \ge 0$ *існують додатні сталі* $p > 0$, $\gamma \ge 0$ *і* $\theta \in \mathbb{R}$ *такі, що*

(***а***) $\quad |x|^p \le V(x), \qquad x \in V$;

(***б***) $\quad LV(x,t) \le \varphi_1(t)V(x), \qquad x \in V, \qquad t \in \mathbb{R}^+$;

(***в***) $\quad QV(x,t) \ge \varphi_2(t)V^2(x), \qquad x \in V, \qquad t \in \mathbb{R}^+$;

(*г*) $\quad \limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \varphi_1(s)\,ds \le \theta, \qquad \liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \varphi_2(s)\,ds \ge 2\gamma$,

тоді розв'язок рівняння (7) *задовольняє умову*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log\left|\left(X_t(x_0)\right)\right|}{t} \le -\frac{\gamma-\theta}{p}$$

майже всюди, де $\left|x_0\right| \ne 0 \in V$ *майже скрізь, і є* F_0*-вимірним випадковим вектором.*

Якщо $\gamma > \theta$, *то розв'язок рівняння є майже безсумнівно експоненціально стійким.*

Приклад 1. Дослідимо стохастичне рівняння Іто, яке утворимо з рівняння теплопровідності для тонкої пластинки товщини $Z = 2\delta = \text{const}$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} - æ_*^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau^*} + \frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^{*2}},$$

де $T = T(X,Y,\tau^*)$; $\tau^* \in \mathbb{R}^+$; $X, Y \in \Theta$ (Θ – обмежена область з $\mathbb{R}^d$, $d \le 3$, з границею C^2); $X \in [0,d_1]$, $Y \in [0,d_2]$.

У рівнянні теплопровідності використано такі позначення: T – температура; X, Y, Z – просторові координати; τ^* – час релаксації; c_q – швидкість поширення тепла; $\text{æ}_*^2 = \dfrac{\alpha_z}{\lambda_t \delta}$; $a = \dfrac{\lambda_t}{c_v}$ – коефіцієнт температуропровідності; c_v – коефіцієнт теплоємності; α_z – коефіцієнт тепловіддачі; λ_t – коефіцієнт теплопровідності.

Якщо в рівнянні теплопровідності прийняти, що $\text{æ}_*^2 = 0$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0$, то отримане стохастичне рівняння буде відповідати такому рівнянню Іто:

$$dX_t = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} X_t(x) + \varphi(X_t(x))\right)dt + \nu X_t(x) dW(t), \qquad t \in [0, T],$$

$$X_t(0) = X_t(\pi) = 0, \qquad X_0(x) = x_0 > 0, \tag{14}$$

де $W(t)$ – дійсний стандартний процес Вінера.

Нехай

$$V = H_0^1[0,\pi], \quad H = L^2[0,\pi], \quad K = \mathbb{R}$$

і

$$f(u,t) \equiv \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \varphi(u(x)), \quad g(u,t) \equiv \nu u(x),$$

функції $u(x) \in H$, $u'(x)$ абсолютно неперервні і задовольняють умови

$$u(0) = u'(0) = 0.$$

Приймаємо також, що $0 \le \langle u, \varphi(u) \rangle \le c\|u\|^2$, де c – деяка додатна стала така, що $\varphi(0) = 0$.

Задовольняючи початкові умови, отримуємо, що $f(0,t) = 0$ і $g(0,t) = 0$. Звідси випливає, що рівняння (14) має тривіальний розв'язок $X_t = 0$ для $X_0 = 0$. Беручи до уваги однозначність і неперервність сильного розв'язку рівняння (14), отримаємо

$$P\{\omega \in \Omega : |X_t(x_0)| \ne 0 \quad \forall t \ge 0\} = 1$$

при умові, що $|X_t(x_0)| \ne 0$ P-майже всюди.

Уведемо функціонал Ляпунова в такому вигляді: $V(u) = |u|^2$, $u \in V$. Побудуємо функціонал LV згідно з формулою (12):

$$LV(u,\tau) = \left\langle 2u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(u) \right\rangle + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \nu^2 |u|^2 =$$

$$= \left\langle 2u, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \right\rangle + \langle 2u, \varphi(u) \rangle + \nu^2 |u|^2. \tag{15}$$

Цей функціонал можна обмежити зверху:

$$LV(u,\tau) \le -2\langle \nabla u, \nabla u \rangle + 2c|u|^2 + \nu^2 |u|^2 \le [-2\lambda_0 + 2c + \nu^2] V(u), \tag{16}$$

де $\lambda_0 = \inf\limits_{u \in H_0^1} \dfrac{|\nabla u|^2}{|u(x)|^2}$.

Функціонал QV є обмежений знизу:

$$QV(u,t) \ge 4\nu^2 V(u). \tag{17}$$

Отже, на основі теореми 2 отримуємо, що

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\log\left[\int_0^t (-2\lambda_0 + 2c + \nu^2)\,ds\right] \le -2\lambda_0 + 2c + \nu^2, \tag{18}$$

$$\lim_{t\to\infty}\inf \frac{1}{t}\log\left[\int_0^t 4\nu^2 ds\right] \ge 4\nu^2, \tag{19}$$

для всіх дійсних величин $\nu \in \mathbb{R}$. Сильний розв'язок рівняння (14) є майже безсумнівно експоненціально стійким, якщо виконується умова

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{\log|X_t(x_0)|}{t} \le \frac{-2\nu^2 + 2\lambda_0 - 2c - \nu^2}{2} \le$$

$$\le -\left[\frac{\nu^2}{2} + \lambda_0 - c\right] \qquad P\text{-майже всюди.} \tag{20}$$

Приклад 2. Розглянемо таку задачу з рівнянням Іто:

$$dX_t(x) = \left(\frac{\partial^2 X_t(x)}{\partial x^2} + r_0 X_t(x) + \varphi\big(X_t(x)\big)\right)dt +$$

$$+ \big(\nu X_t(x) + \alpha(X_t(x)\big)\,dW(t), \qquad t \in [0,T],$$

$$X_t(0) = X_t(\pi) = 0, \qquad X_0(x) = x_0 > 0, \tag{21}$$

де $W(t)$ – дійсний стандартний процес Вінера такий, що $K = \mathbb{R}$, $Q = 1$, і $r_0 \in \mathbb{R}$, крім цього, $\alpha(\,\cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією, яка задовольняє умову Ліпшиця.

Нехай $H = L^2(0,\pi)$, $V = W_0^{1,2}([0,\pi])$ – простір Соболєва, елементи якого задовольняють початкові умови задачі (21) і

$$f(t,u) \equiv \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + r_0 u(x) + \varphi\big(u(x)\big),$$

$$g(t,u) \equiv \nu u(x) + \alpha\big(u(x)\big).$$

Припускаємо, що складові частини оператора $f(t,u)$ задовольняють такі умови:

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right\rangle \le -2\|u\|^2, \tag{22}$$

$$\langle \varphi(t,u), u \rangle \le c^2\,|u|^2, \tag{23}$$

$$\langle r_0 u, u \rangle \le 2r_0\,|u|^2, \tag{24}$$

$$|\alpha(u)| \le k\,|u|. \tag{25}$$

Оператор $g(t,u)$ задовольняє умови **4°** і **5°**.

Функціонал Ляпунова вибираємо, як і в *прикладі 1*, у формі $V(u) = |u|^2$, $u \in V$. Для рівняння (21) будуємо функціонал LV:

$$LV = \langle f(t,u), u \rangle + \|g(t,u)\|_2^2 = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_0 u + \varphi(u), u \right\rangle + \big(\nu u + \alpha(u)\big)^2 =$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right\rangle + \langle r_0 u, u \rangle + \langle \varphi(u), u \rangle +$$

$$+ \nu^2 u^2 + 2\nu u \alpha(u) + \alpha^2(u). \tag{26}$$

Використовуючи умову **4°** і обмеження (21)−(25), отримуємо оцінку для функціонала LV:

$$LV \le -2\|u\|^2 + 2r_0|u|^2 + 2c|u|^2 + \nu^2u^2 + 2\nu u\alpha(u) + \alpha^2(u),$$

де k − стала Ліпшиця для функції φ, а норма в просторі V має вигляд

$$\|u\|^2 = \int_0^\pi (u'(x))^2 dx. \qquad (27)$$

Функціонал LV можна обмежити зверху:

$$LV \le 2\langle f(t,u), u\rangle + \|g(t,u)\|_2^2 \le$$

$$\le -2\|u\|^2 + (2r_0 + 2c)|u|^2 + (1+\varepsilon)\nu^2u^2 + (1+\varepsilon^{-1})k^2|u|^2 \le$$

$$\le \left(-2\lambda_0 + 2r_0 + 2c + (1+\varepsilon)\nu^2 + (1+\varepsilon^{-1})k^2\right)V. \qquad (28)$$

Функціонал QV можна обмежити знизу:

$$QV(u,t) \ge 4\left((1+\varepsilon)\nu^2 + (1+\varepsilon^{-1})k^2\right)V(u). \qquad (29)$$

Тоді на основі теореми 2 отримуємо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\left(\int_0^t \left[-2\lambda_0 + 2r_0 + 2c + (1+\varepsilon)\nu^2 + (1+\varepsilon^{-1})k^2\right]ds\right) \le$$

$$\le -2\lambda_0 + 2r_0 + 2c + (1+\varepsilon)\nu^2 + (1+\varepsilon^{-1})k^2, \qquad (30)$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\left(\int_0^t 4\left[(1+\varepsilon)\nu^2 + (1+\varepsilon^{-1})k^2\right]ds\right) \ge$$

$$\ge 4\left[(1+\varepsilon)\nu^2 + (1+\varepsilon^{-1})k^2\right]. \qquad (31)$$

Приклад 3. Розглянемо таку задачу з рівнянням Іто:

$$d\vartheta_0 = \left(\frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial\gamma^2} + 2k\frac{\partial\vartheta_0}{\partial\gamma} + c\vartheta_0\right)d\tau + \nu\vartheta_0 dW(\tau), \qquad \tau \in [0,T],$$

$$\vartheta_0(0) = \vartheta_0(\pi) = 0, \qquad \vartheta_0(\gamma) = \gamma_0 > 0, \qquad (32)$$

де $W(\tau)$ − дійсний стандартний процес Вінера, який відповідає рівнянню теплопровідності [1].

Так само, як у *прикладі 1*, припускаємо, що

$$V = H_0^1[0,\pi], \qquad H = L^2[0,\pi], \qquad K = \mathbb{R}$$

і

$$f(\gamma,\tau) \equiv \frac{\partial^2 u(\gamma)}{\partial\gamma^2} + 2k\frac{\partial u(\gamma)}{\partial\gamma} + cu(\gamma), \qquad g(\gamma,\tau) \equiv \nu u(\gamma),$$

функції $u(\gamma) \in H$, $u'(\gamma)$ абсолютно неперервні і задовольняють умови

$$u(0) = u'(0) = 0.$$

З огляду на початкові умови маємо $f(\gamma,\tau) = 0$ і $g(\gamma,\tau) = 0$. Задача має тривіальний розв'язок $\vartheta_0 \equiv 0$.

Враховуючи існування та єдиність сильного розв'язку цього рівняння, отримуємо

$$P\{\omega \in \Omega : |\vartheta_0(\gamma_0)| \ne 0 \ \forall\tau \ge 0\} = 1$$

при умові, що $|\vartheta_0(\gamma_0)| \ne 0$ P-майже всюди.

Функціонал Ляпунова вибираємо, як і в попередніх прикладах, у вигляді $V(u) = |u|^2$ для $u \in V$.

Для рівняння (32) цього прикладу будуємо функціонал LV у такому вигляді:

$$LV(u,\tau) = \left\langle 2u, \frac{\partial^2 u(\gamma)}{\partial\gamma^2} + 2k\frac{\partial u(\gamma)}{\partial\gamma} + cu(\gamma) \right\rangle + \frac{1}{2}\cdot 2\nu^2 |u|^2 =$$

$$= \left\langle 2u, \frac{\partial^2 u(\gamma)}{\partial\gamma^2} \right\rangle + \left\langle 2u, 2k\frac{\partial u(\gamma)}{\partial\gamma} \right\rangle + \langle 2u, cu(\gamma)\rangle + \nu^2 u^2. \qquad (33)$$

З огляду на те, що $\left\langle 2u, 2k\frac{\partial u(\gamma)}{\partial\gamma} \right\rangle \le 0$ [7], і з використанням оцінок (22)–(25) отримуємо результат, аналогічний, як у *прикладі 1*, стосовно обмеження для функціонала LV:

$$LV(u,\tau) \le \left[-2\lambda_0 + 2c + \nu^2\right] V(u), \qquad (34)$$

а також для функціонала QV:

$$QV(u,\tau) \ge 4\nu^2 V(u), \qquad (35)$$

де $\lambda_0 = \inf\limits_{u \in H_0^1} \frac{|\nabla u|^2}{|u(x)|^2}$.

Таким чином, отриманий кінцевий результат є таким самим, як у *прикладі 1*:

$$\lim_{\tau\to\infty} \sup \frac{1}{\tau} \log\left[\int_0^\tau (-2\lambda_0 + 2c + \nu^2)\, ds\right] \le -2\lambda_0 + 2c + \nu^2, \qquad (36)$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \inf \frac{1}{\tau} \log\left[\int_0^\tau 4\nu^2 ds\right] \ge 4\nu^2 \qquad (37)$$

для всіх дійсних $\nu \in \mathbb{R}$. Сильний розв'язок рівняння (14) є майже безсумнівно експоненціально стійким, якщо виконується умова

$$\lim_{\tau\to\infty} \sup \frac{\log|X_\tau(x_0)|}{\tau} \le \frac{-2\nu^2 + 2\lambda_0 - 2c - \nu^2}{2} \le$$

$$\le -\left[\frac{\nu^2}{2} + \lambda_0 - c\right] \qquad P\text{-майже всюди}. \qquad (38)$$

Висновки. Виконано дослідження стійкості стохастичних диференціальних рівнянь типу Іто, основою для яких у роботі вибрано різні задачі для рівняння теплопровідності. Визначено межі стійкості окремо для кожного прикладу. При дослідженні використано класичний метод побудови функціонала Ляпунова.

1. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
2. *Appleby J., Mao X., Rodkina A.* On stabilization of differential equations // Discrete and Continuous Dynam. Systems. Ser. A. – 2006. – **15**(3). – P. 843–857.
3. *Caraballo T.* Asymptotic exponential stability of stochastic partial differential equations with delay // Stochastics. – 1990. – **33**. – P. 27–47.
4. *Caraballo T.* On the pathwise exponential stability of non-linear stochastic partial differential equations // Stoch. Anal. Appl. – 1994. – **12**. – P. 517–525.
5. *Caraballo T., Liu K.* On exponential stability criteria of stochastic partial equation // Stoch. Proc. Appl. – 1999. – **83**. – P. 289–301.

6. *Chow P. L.* Stability of non-linear stochastic evolution equations // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – **89**. – P. 400–419.
7. *Haussmann U. G.* Asymptotic stability of the linear Ito equation in infinite dimensional // J. Math. Anal. Appl. – 1978. – **65**. – P. 219–235.
8. *Ichikawa A.* Stability of semilinear stochastic evolution equations // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – **90**. – P. 12–44.
9. *Mao X. R.* Exponential stability of stochastic differential equations. – New York: Marcel Dekker, 1994. – xii + 307 p.
10. *Mao X. R.* Stochastic differential equations and applications. – Horwood, 2007. – 440 p.
11. *Pardoux A.* Équations aux dériveés partielles stochastiques non linéaires monotones: Thesis. – Université, Paris XI. – 1975. – 19 p.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ИТО ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Изучается экспоненциальная устойчивость эволюционных дифференциальных уравнений, полученных на основании уравнений теплопроводности. Для определения границ стохастической устойчивости решения этих уравнений использован метод построения функционала Ляпунова.

EXPONENTIAL STABILITY OF EVOLUTION DIFFERENTIAL ITO-TYPE EQUATIONS OF THE FIRST AND SECOND ORDER

The exponential stability of evolution differential equations which are obtained on the base of heat conduction equations is studied. The method of construction of Lyapunov functional is used for determination of stochastic stability region of solution to these equations.

Жешув. політехніка, Жешув, Польща

Одержано
18.05.09