УДК 517.95

О. М. Боценюк

ПРО ОЦІНКИ СПАДАННЯ ЗА ЧАСОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО РІВНЯННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ В НЕЛІНІЙНОМУ НЕОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто початково-крайову задачу для рівняння магнітного поля в необмеженій області з некомпактною межею. Встановлено оцінки спадання розв'язків, які залежать від геометрії області.

Асимптотична поведінка розв'язків при $t \to \infty$ еволюційних рівнянь в необмежених областях розглядалась у багатьох роботах (див., наприклад, бібліографію в оглядовій статті [3]). У пропонованій роботі вивчається поведінка розв'язків рівняння магнітного поля в областях, які описуються в термінах ізопериметричності [2].

Формулювання задачі та основний результат. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – необмежена область з межею Γ класу C^2 і $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$, $Q = \Omega \times (0, \infty)$. Розглянемо в Q початково-крайову задачу

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mu}(b) = 0, \qquad \operatorname{div} b = 0, \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$b(x,0) = b_0(x), \qquad\qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$n \cdot b = 0, \qquad n \times \operatorname{rot} \tilde{\mu}(b) = 0 \qquad \text{на} \qquad \Sigma. \tag{3}$$

Тут $b : Q \to \mathbb{R}^3$ – вектор-функція магнітної індукції; $\tilde{\mu} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – відображення класу C^1; n – одиничний вектор нормалі до межі Γ. Рівняння (1) описує магнітне поле в однорідних електропровідних магнетиках, якщо знехтувати струмами зміщення. Будемо припускати, що для $\tilde{\mu}$ існує обернене відображення $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mu(z) = \varphi(|z|)z$, $z \in \mathbb{R}^3$, і монотонно неспадна функція $\varphi \in C^1(([0, +\infty))$ задовольняє умову

$$m(t-s) \le \varphi(t)t - \varphi(s)s \le M(t-s) \ \text{для} \ t \ge s \ge 0, \quad m > 0, \quad M > 0. \tag{4}$$

Опишемо області, в яких розглядається задача (1)–(3). Розглянемо функцію $\ell(v) = \inf\{\operatorname{mes}_{n-1}(\partial G \cap \Omega) : \operatorname{mes}_n G = v,\ G$ – довільна відкрита підмножина в $\Omega\}$. Нехай функція $g(v)$, $v > 0$, неперервна, монотонно неспадна і нехай існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що функція $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно неспадна і $\ell(v) \ge g(v)$ $\forall v > 0$. Позначимо

$$P(v) = \int_0^v \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi \frac{\theta\, d\theta}{g^2(\theta)}$$

і нехай неперервна функція $w(t)$, $t > 0$, є оберненою до $P(v)$. Будемо припускати, що існує таке $\ae > 0$, що функція $t \to t^{\ae}/(t)$ монотонно неспадна. Говоримо, що область Ω *задовольняє умову* **A**, якщо існують функції $g(v)$, $w(t)$, які задовольняють перераховані вище умови.

Позначення. Нехай Ω – задана однозв'язна область в $\mathbb{R}^3$. Норму в просторах $L^p(\Omega)$, $(L^p(\Omega))^3$, $1 \le p \le \infty$, позначимо через $|\cdot|_p = |\cdot|_{p,\Omega}$. Нехай

$$\mathscr{V} = \{\varphi \mid \varphi \in (\mathscr{D}(\Omega))^3,\ \operatorname{div} \varphi = 0\},$$

$$\mathscr{W} = \{\varphi \mid \varphi \in (C^1_{(0)}(\bar{\Omega}))^3, \;\; \operatorname{div}\varphi = 0, \;\; n \cdot \varphi = 0 \;\text{ на }\; \Gamma\},$$

де $C^1_{(0)}(\bar{\Omega})$ – простір звужень на Ω функцій із $C^1_0(\mathbb{R}^3)$. Означимо простори H і W: H – замикання $\mathscr{V}$ в $(L^2(\Omega))^3$, W – замикання $\mathscr{W}$ в $(H^1(\Omega))^3$. Простір H наділяється скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, індукованим із $(L^2(\Omega))^3$; простір W – гільбертів простір зі скалярним добутком $((\cdot,\cdot))$ і нормою $\|\cdot\|$, індукованими з $(H^1(\Omega))^3$. Простір W вкладений в H і щільний в ньому, причому вкладення неперервне. Через H^* і W^* позначимо простори, спряжені до H і W. Ототожнюючи за теоремою Рісса H і H^*, приходимо до включень $W \subset H \subset W^*$. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначимо скалярний добуток між W^* і W. Означимо оператор $A : W \to W^*$ за допомогою рівності

$$\langle Av, w\rangle = a(v,w) = \int_\Omega \operatorname{rot}\tilde{\mu}(v)\cdot\operatorname{rot} w\, dx \qquad \forall v, w \in W.$$

Через u' позначимо похідну за змінною t в $\mathcal{D}^*(]0,T[;W^*) = L(\mathcal{D}(]0,T[);W^*)$.

Означення. *Слабким розв'язком* задачі (1)–(3) назвемо функцію $b(x,t)$ таку, що $b \in L^2(0,T;W)$, $b \in L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^3)$, $b' \in L^2(0,T;W^*)$ $\forall T > 0$, $b(0) = b_0$, $b_0 \in H \bigcap (L^\infty(\Omega))^3$, і $b(t)$ задовольняє рівняння

$$b'(t) + Ab(t) = 0 \quad \text{ в } \quad \mathcal{D}^*(]0,T[;W^*). \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай область Ω опукла і задовольняє умову* **A.** *Припустимо, що виконується умова* (4). *Тоді задача* (1)–(3) *має єдиний слабкий глобальний розв'язок $b(x,t)$ і для нього виконується оцінка*

$$|b(t)|_\infty \le c\,|b_0|_p\,(w(t))^{-1/p}, \qquad p \ge 2, \tag{6}$$

де стала c не залежить від b.

Надалі літерою c будемо позначати різні додатні сталі.

Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\psi(x) = \zeta(x)\sqrt{\varphi(u(x))}$, $x \in \Omega$, $u \in (H^1(\Omega))^3$, $\zeta(x) = \tilde{\zeta}(|u(x)|)$, $\tilde{\zeta} \in C([0,\infty))$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$. *Припустимо, що функції $\tilde{\zeta}$, φ невід'ємні монотонно неспадні і, крім того, функція $\tilde{\zeta}$ є кусково-гладкою, $\tilde{\zeta}' \in L^\infty(0,\infty)$, а функція φ задовольняє умову* (4). *Нехай область Ω опукла і належить класу C^2. Тоді для всіх u таких, що $u \in (H^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega))^3$, $\mu(u) \in W$, виконується нерівність*

$$\int_\Omega \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot}(\psi^2 u)\, dx \ge \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \psi^2\,|\nabla u_i|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\psi^2\cdot\nabla|u|^2\, dx. \tag{7}$$

Якщо $\tilde{\zeta} \in L^\infty(0,\infty)$, то нерівність (7) *справджується для всіх u таких, що $u \in (H^1(\Omega))^3$, $\mu(u) \in W$.*

Д о в е д е н н я. Нехай функція u задовольняє умови леми. Оскільки $\mu(u) \in W$, то знайдеться послідовність функцій $\{v_n\}$ із $\mathscr{W}$ така, що $v_n \to \mu(u)$ в W. Через те що відображення $\tilde{\mu} : W \to (H^1(\Omega))^3$ неперервне, отримуємо $\tilde{\mu}(v_n) \to u$ в $(H^1(\Omega))^3$. Функції $u_n = \tilde{\mu}(v_n)$ задовольняють умови леми і, отже, достатньо довести нерівність (7) для функцій u із множини $\tilde{\mu}(\mathscr{H})$. Відмітимо, що, якщо $u \in \tilde{\mu}(\mathscr{H})$, то $u \in (C(\bar{\Omega}))^3$, $\operatorname{supp} u$ − компакт, $u \in (C^1(\Omega \backslash L))^3$, де $L = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}$.

Для $u \in \tilde{\mu}(\mathscr{H})$ маємо

$$J := \int_\Omega \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot}(\psi^2 u)\, dx = \int_\Omega \psi^2 |\operatorname{rot} u|^2\, dx + 2\int_\Omega \psi \operatorname{rot} u \cdot (\nabla\psi \times u)\, dx\,. \quad (8)$$

Із рівності $\operatorname{rot}(\psi u) = \psi \operatorname{rot} u + \nabla\psi \times u$ випливає

$$|\operatorname{rot}(\psi u)|^2 = \psi^2 |\operatorname{rot} u|^2 + 2\psi \operatorname{rot} u \cdot (\nabla\psi \times u) + |\nabla\psi \times u|^2. \quad (9)$$

Із (8), використавши (9), одержимо

$$J = \int_\Omega |\operatorname{rot}(\psi u)|^2\, dx - \int_\Omega |\nabla\psi \times u|^2\, dx\,. \quad (10)$$

Із (10), враховуючи тотожність $|\nabla\psi \times u|^2 = |\nabla\psi|^2 |u|^2 - (\nabla\psi \cdot u)^2$, отримуємо

$$J = \int_\Omega |\operatorname{rot}(\psi u)|^2\, dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla\psi)^2 dx - \int_\Omega |\nabla\psi|^2 |u|^2\, dx\,. \quad (11)$$

Оскільки $\operatorname{div}[\varphi(|u|)u] = 0$, то $\operatorname{div}\big(\sqrt{\varphi(|u|)}\, u\big) = -u \cdot \nabla\sqrt{\varphi(|u|)}$, і тому

$$\operatorname{div}(\psi u) = \sqrt{\varphi(|u|)}\, u \cdot \nabla\zeta - \zeta u \cdot \nabla\sqrt{\varphi(|u|)}\,. \quad (12)$$

За допомогою (12) отримуємо

$$(u \cdot \nabla\psi)^2 - \big(\operatorname{div}(\psi u)\big)^2 = \big(u \cdot \nabla\zeta^2\big)\big(u \cdot \nabla\varphi(|u|)\big). \quad (13)$$

Оскільки $\nabla\zeta^2 = 2\tilde{\zeta}(|u|)\tilde{\zeta}'(|u|)\nabla|u|$, $\nabla\varphi(|u|) = \varphi'(|u|)\nabla|u|$, то з (13) випливає

$$(u \cdot \nabla\psi)^2 \geq \big(\operatorname{div}(\psi u)\big)^2 \qquad \text{для майже всіх} \qquad x \in \Omega\,. \quad (14)$$

Отже, з (11), враховуючи (14), отримуємо

$$J \geq \int_\Omega |\operatorname{rot}(\psi u)|^2\, dx + \int_\Omega |\operatorname{div}(\psi u)|^2\, dx - \int_\Omega |\nabla\psi|^2 |u|^2\, dx\,. \quad (15)$$

У [4, с. 331] для $v \in (C^1(\Omega))^3$, $n \cdot v = 0$ на Γ доведено тотожність

$$\sum_{i=1}^3 \int_\Omega |\nabla u_i|^2\, dx = \int_\Omega |\operatorname{rot} v|^2\, dx + \int_\Omega |\operatorname{div} v|^2\, dx - G(v)\,, \quad (16)$$

де $G(v) = \sum\limits_{i,j=1}^3 \int_\Gamma v_i v_j \dfrac{\partial n_j}{\partial x_i}\, dS$. Оскільки область Ω опукла, то $G(v) \geq 0$. Із (15), використовуючи (16) для $v = \psi u$, отримуємо

$$J \geq \sum_{i=1}^3 \int_\Omega |\nabla(\psi u_i)|^2\, dx - \int_\Omega |\nabla\psi|^2 |u|^2\, dx\,.$$

Звідси випливає (7). ◊

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови леми* 1. *Тоді справджується така нерівність:*

$$a(b,b) \geq c\sum_{i=1}^3 |\nabla b_i|_2^2 \qquad \forall b \in W\,. \quad (17)$$

Д о в е д е н н я. Застосуємо лему 1 до функції $u = \tilde{\mu}(b)$ при $\zeta \equiv 1$. ◊

Існування принаймні одного розв'язку рівняння (5) такого, що $b \in$ $\in L^2(0,T;W)$, $b' \in L^2(0,T;W^*)$, можна довести методом Фаедо − Гальоркіна з використанням (17). Доведемо єдиність розв'язків. Нехай b_1, b_2 − два розв'язки задачі (1)–(3) і $b = b_1 - b_2$. Тоді

$$\langle b', w\rangle + \int_\Omega \operatorname{rot}\left(\tilde\mu(b_1) - \tilde\mu(b_2)\right) \cdot \operatorname{rot} w\, dx = 0 \qquad \forall w \in W. \tag{18}$$

Нехай $u(t) \in W$ – розв'язок такої задачі ($\varepsilon > 0$):

$$\int_\Omega \operatorname{rot} u(t) \cdot \operatorname{rot} v\, dx + \varepsilon \int_\Omega u(t) \cdot v\, dx = \int_\Omega b(t) \cdot v\, dx \qquad \forall v \in W. \tag{19}$$

Оскільки для $v \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$ маємо $v = \operatorname{grad} p + q$, $q \in W$, то рівність (19) буде виконуватися для всіх $v \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$. Покладемо $w = u(t)$ у (18) і $v = \tilde\mu(b_1) - \tilde\mu(b_2)$ у (19). Тоді, порівнюючи (18) і (19), отримуємо

$$\langle b', u\rangle + \int_\Omega b \cdot \left(\tilde\mu(b_1) - \tilde\mu(b_2)\right) dx = \varepsilon \int_\Omega u \cdot \left(\tilde\mu(b_1) - \tilde\mu(b_2)\right) dx. \tag{20}$$

Продиференціюємо (19) за t і покладемо $v = u(t)$. Тоді матимемо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\operatorname{rot} u|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}|u|_2^2 = \langle b'(t), u(t)\rangle. \tag{21}$$

Із (20), використовуючи (21) і лему Ґронуолла, виводимо, що $b \equiv 0$. ◊

Лема 2. *Припустимо, що область* Ω *опукла. Тоді для слабкого розв'язку задачі* (1)–(3) *виконується оцінка*

$$|b(t)|_\infty \le |b_0|_\infty \qquad \forall t > 0. \tag{22}$$

Д о в е д е н н я. Означимо $v^+ = \max\{v, 0\}$. Нехай $\zeta^2 = f(\xi)$, $\xi = \left(|b|^2 - k^2\right)^+$, $k \ge 0$, $f(s) := \min\{s, \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, b – розв'язок задачі (1)–(3). Помножимо обидві частини рівняння (1) на $\zeta^2 b$ і проінтегруємо на Ω. Тоді отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega f(\xi)\frac{d}{dt}|b|^2\, dx + a(b, \zeta^2 b) = 0. \tag{23}$$

Нехай F – первісна функції f і $F(0) = 0$. Тоді матимемо

$$\int_\Omega f(\xi)\frac{d}{dt}|b|^2\, dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega F(\xi)\, dx. \tag{24}$$

Нехай $u = \tilde\mu(b)$. Тоді, застосовуючи лему 1 при $\zeta^2 = f(\xi)$, отримуємо

$$a(b, \zeta^2 b) \ge \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\psi^2 \cdot \nabla(|u|^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(|u|) f'(\xi)\left(\nabla\xi \cdot \nabla(|u|^2)\right) dx +$$

$$+ \int_\Omega f(\xi)\varphi'(|u|)|u|\,|\nabla|u||^2\, dx \ge 0. \tag{25}$$

Із (23), враховуючи (24) і (25), виводимо, що

$$\int_\Omega F\left(\xi(t)\right) dx \le \int_\Omega F\left(\xi(0)\right) dx \qquad \forall t > 0. \tag{26}$$

Покладемо $k = |b_0|_\infty$. Тоді з (26) випливає, що $\xi(t) = 0$ $\forall t > 0$. Отже, маємо (22). ◊

Лема 3. *Нехай* Ω *– опукла область. Тоді для слабкого розв'язку задачі* (1)–(3) *справджується оцінка*

$$|b(t)|_p \le |b_0|_p \qquad \forall t \ge 0, \qquad p \ge 2. \tag{27}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\zeta^2 = |b|^{p-2}$, $p \ge 2$. Помножимо обидві частини рівняння (1) на $\zeta^2 b$ і проінтегруємо на Ω. Тоді отримаємо

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}|b(t)|_p^p + a(b,\zeta^2 b) = 0. \qquad (28)$$

Застосувавши лему 1 для $u = \tilde{\mu}(b)$, $\zeta^2 = |b|^{p-2}$, одержимо $a(b,\zeta^2 b) \ge 0$. Тоді з (28) випливає (27). ◊

Оцінка розв'язків.

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Нехай $v = t^\gamma b$, де $\gamma > 0$ – довільне число. Тоді

$$v'(t) + t^\gamma Ab(t) = \gamma t^{-1} v(t), \qquad v(0) = 0. \qquad (29)$$

Нехай $\zeta^2 = (|v|^2 - k^2)^+$, $k \ge 0$. Помножимо обидві частини рівняння (29) на $\zeta^2 v$ і проінтегруємо на Ω. Тоді отримаємо

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}|\zeta(t)|_4^4 + t^{2\gamma} a(b,\zeta^2 b) = \gamma t^{-1}\int_\Omega \zeta^2 |v|^2\, dx. \qquad (30)$$

Застосувавши лему 1 для $u = \tilde{\mu}(b)$, матимемо

$$a(b,\zeta^2 b) \ge \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(|u|)\nabla\zeta^2 \cdot \nabla|u|^2\, dx + \int_\Omega \zeta^2 \varphi'(|u|)|u| \cdot |\nabla|u||^2\, dx. \qquad (31)$$

Маємо $\nabla|u|^2 = g(|b|)\nabla|b|^2$, $g(s) \ge 1/M^2$ $\forall s \ge 0$. Тоді з (31) випливає

$$a(b,\zeta^2 b) \ge \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(|u|)g(|b|)\nabla\zeta^2 \cdot \nabla|b|^2\, dx \ge ct^{-2\gamma}\int_\Omega |\nabla\zeta^2|^2\, dx. \qquad (32)$$

Отже, з (30), враховуючи (32), отримуємо

$$\frac{d}{dt}|\zeta(t)|_4^4 + c\int_\Omega |\nabla\zeta^2|^2\, dx \le c\gamma t^{-1}\int_\Omega \zeta^2|v|^2\, dx. \qquad (33)$$

Позначимо $A_k(t) = \{x \in \Omega : |v(x,t)| > k\}$, $a_k(t) = \sup\limits_{0\le s\le t} \operatorname{mes} A_k(s)$, $k \ge 0$, $t \ge 0$ і для $u \in H^1(\Omega)$ нехай $B_k^+(u) = \{x \in \Omega : u(x) > k\}$. У роботі [2] доведено нерівність

$$\int_{B_k^+(u)} (u(x)-k)^2 dx \le cP(\operatorname{mes} B_k^+(u)) \int_{B_k^+(u)} |\nabla u|^2\, dx \qquad \forall u \in H^1(\Omega). \qquad (34)$$

Покладемо в (34) $u = |v|^2$ і замінимо k на k^2. Тоді отримаємо

$$|\zeta(t)|_4^4 \le cP(\operatorname{mes} A_k(t))\,|\nabla\zeta^2(t)|_2^2, \qquad k \ge 0. \qquad (35)$$

Позначимо $f(t) = t^{-1}|v(t)|^2$, $J = \int_\Omega f\zeta^2 dx$. Тоді, використовуючи (35), маємо

$$J \le |f|_{2,A_k(t)}|\zeta|_4^2 \le c|f|_{2,A_k(t)}(P(\operatorname{mes} A_k(t)))^{1/2}|\nabla\zeta^2|_2 \le$$

$$\le \varepsilon|\nabla\zeta^2|_2^2 + c\varepsilon^{-1}|f|_{2,A_k(t)}^2 P(\operatorname{mes} A_k(t)), \qquad \varepsilon > 0. \qquad (36)$$

Оцінюючи праву частину нерівності (33) за допомогою (36) при ε достатньо малому, отримуємо

$$\frac{d}{dt}|\zeta(t)|_4^4 + c\left|\nabla\zeta^2(t)\right|_2^2 \le c\gamma^2 \, |f(t)|_{2,A_k(t)}^2 \, P(\operatorname{mes} A_k(t)).$$

Звідси, враховуючи (35), випливає

$$\frac{d}{dt}|\zeta(t)|_4^4 + \frac{c|\zeta(t)|_4^4}{P(\operatorname{mes} A_k(t))} \le c\gamma^2 \, |f(t)|_{2,A_k(t)}^2 \, P(\operatorname{mes} A_k(t)). \tag{37}$$

Інтегруючи нерівність (37), отримуємо

$$|\zeta(t)|_4^4 \le c\gamma^2 \int_0^t \exp\left(-c\int_s^t \frac{d\sigma}{P(\operatorname{mes} A_k(\sigma))}\right)|f(s)|_{2,A_k(s)}^2 \, P(\operatorname{mes} A_k(s))\, ds. \tag{38}$$

Оскільки функція P монотонно неспадна, то з (38) випливає

$$|\zeta(t)|_4^4 \le c\gamma^2 (P(a_k(t)))^2 \sup_{0\le s\le t} |f(s)|_{2,A_k(s)}^2. \tag{39}$$

Якщо $h > k \ge 0$, то $|\zeta(t)|_4^4 \ge (h^2 - k^2)^2 \operatorname{mes} A_h(t)$, і тому з (39) дістанемо

$$a_h(t) \le c\gamma^2 (h^2 - k^2)^{-2} a_k(t) (P(a_k(t)))^2 \sup_{0\le s\le t} |f(s)|_\infty^2. \tag{40}$$

Застосуємо до (40) наступну лему з [1].

Лема 4. *Нехай* φ *– невід'ємна й монотонно незростаюча функція на* $[k_0, \infty)$ *така, що*

$$\varphi(h) \le C(h-k)^{-\alpha}\varphi^\beta(k)(P(\varphi(k)))^\theta, \qquad h > k > k_0,$$

де C, α, β, θ *– додатні сталі,* P *– невід'ємна монотонно неспадна функція на* $[0, \infty)$ *така, що* $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \lambda \in (0,1], \ \forall \xi \ge 0 \quad P(\lambda\xi) \le \lambda^\varepsilon P(\xi)$ *і* $\mu = \alpha/(1-\beta-\varepsilon\theta) < 0$. *Тоді* $\varphi(k_0 + d) = 0$, *де*

$$d^\alpha = 2^{\alpha-\mu} C(\varphi(k_0))^{\beta-1}(P(\varphi(k_0)))^\theta. \tag{41}$$

Застосувавши лему 4 до (40) (для $\varphi(k) = a_{\sqrt{k}}(t)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\theta = 2$, $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, $C = c\gamma^2 \sup\limits_{0\le s\le t} |f(s)|_\infty^2$), отримаємо $a_{\sqrt{k_0+d}}(t) = 0$, і тому $|v(t)|_\infty^2 \le k_0 + d \ \forall k_0 > 0$. Тоді, враховуючи (41), одержимо

$$|v(t)|_\infty^2 \le k_0 + c\gamma \sup_{[0,t]} |f(s)|_\infty \, P(a_{\sqrt{k_0}}(t)) \qquad \forall k_0 > 0.$$

Отже,

$$|v(t)|_\infty \le k + c\sqrt{\gamma}(P(a_k(t)))^{1/2} \sup_{[0,t]} \{\tau^{-1/2} |v(\tau)|_\infty\} \qquad \forall k > 0. \tag{42}$$

З огляду на нерівність Чебишева маємо $a_k(t) \le s$, де $s = k^{-p} \sup\limits_{[0,t]} |v(\tau)|_p^p$, $p \ge 2$. Із (42) випливає

$$|b(t)|_\infty \le s^{-1/p} \sup_{[0,t]} |b(\tau)|_p + c\sqrt{\gamma} t^{-\gamma} \sqrt{P(s)} \sup_{[0,t]} \{\tau^{\gamma-1/2} |b(\tau)|_\infty\}. \tag{43}$$

Оскільки $t^{æ}/w(t)$ – монотонно неспадна функція, то при $\gamma \ge 1/2 + æ/p$, $\varepsilon > 0$ маємо

$$\sup_{[0,t]} \{\tau^{\gamma-1/2} |b(\tau)|_\infty\} \le t^{\gamma-1/2} (w(\varepsilon t))^{-1/p} \sup_{[0,t]} \{(w(\varepsilon t))^{1/p} |b(\tau)|_\infty\}. \tag{44}$$

Покладемо в (43) $s = w(\varepsilon t)$, $\varepsilon > 0$. Тоді, враховуючи (44), отримуємо

$$(w(\varepsilon t))^{1/p} |b(t)|_\infty \le \sup_{[0,t]} |b(\tau)|_p + c\sqrt{\gamma\varepsilon} \sup_{[0,t]} \left\{ (w(\varepsilon\tau))^{1/p} |b(\tau)|_\infty \right\}. \qquad (45)$$

Вибравши ε достатньо малим, із (45) виводимо

$$\sup_{[0,T]} \left\{ (w(\varepsilon t))^{1/p} |b(t)|_\infty \right\} \le c \sup_{[0,T]} |b(t)|_p \qquad \forall T > 0.$$

Звідси, врахувавши оцінку (27), отримаємо (6). ◊

1. *Боценюк О. М.* Про оцінки спадання за часом розв'язків змішаної задачі для одного квазілінійного параболічного рівняння другого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 3. – С. 16–23.
2. *Гущин А. К.* Об оценке интеграла Дирихле в неограниченных областях // Мат. сб. – 1977. – **99**, № 2. – С. 282–294.
3. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи мат. наук. – 2005. – **60**, № 4. – С. 145–212.
4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.

ОБ ОЦЕНКАХ УБЫВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Рассмотрена начально-краевая задача для уравнения магнитного поля в неограниченной области с некомпактной границей. Установлены оценки убывания решений, которые зависят от геометрии области.

ON TIME DECAY ESTIMATES OF SOLUTIONS OF ONE EQUATION OF MAGNETIC FIELD IN NONLINEAR UNBOUNDED MEDIUM

The initial boundary-value problem for one equation of the magnetic field in the unbounded domain with noncompact boundary is considered. The decay estimates of solutions which depend on the geometry of domain are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.02.09