УДК 517.526

О. Є. Баран

ПАРНІ КРУГОВІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними встановлено теореми про парні кругові області збіжності та оцінки швидкості збіжності цих дробів.

Багато з існуючих ознак збіжності неперервних дробів є ознаками типу областей збіжності (теореми Ворпіцького, Ван Флека, параболічні теореми [7]).

***Означення* [7].** Дві області G_1 і G_2 комплексної площини називають парними областями збіжності неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1}, \tag{1}$$

якщо при виконанні умов $a_{2k-1} \in G_1$ та $a_{2k} \in G_2$, $k = 1,2,\ldots$, дріб (1) збігається.

Перший результат про парні області збіжності був отриманий у 1936 р. В. Лейтоном і Г. С. Уоллом [10]: для збіжності дробу (1) достатньо виконання умов $|a_{2k-1}| \le \frac{1}{4}$ і $|a_{2k}| \ge \frac{25}{4}$, $k = 1,2,\ldots$. Покладаючи $a_k = c_k^2$, $k = 1,2,\ldots$, В. Трон [7] встановив теорему збіжності неперервного дробу $\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{1}$ до скінченного значення, якщо $|c_{2k-1}| \le \rho$ і $|c_{2k} \pm i| \ge \rho$, $0 < \rho < 1$, $k = 1,2,\ldots$, причому ця збіжність є рівномірною відносно вказаних областей. Ланге [7] довів збіжність дробу $\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{1}$ до скінченного значення за умов, що $|c_{2k-1} \pm ia| \le \rho$ і $|c_{2k} \pm i(1+a)| \ge \rho$, $k = 1,2,\ldots$, де $a \in \mathbb{C}$ та a і ρ задовольняють нерівність $|a| < \rho < |a+1|$, при чому ця збіжність є рівномірною відносно областей збіжності. Для $\rho = 1$ В. Трон [7] довів, що умови $|c_{2k-1}| \le 1$ і $|c_{2k} \pm i| \ge 1$, $k = 1,2,\ldots$, разом з умовою $|c_{2k}| > \varepsilon$, де ε – довільне додатне число, є достатніми для збіжності дробу $\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{1}$ до скінченного значення і збіжність є рівномірною відносно цих областей. Для $\rho > 1$ Трон [7] встановив, що для збіжності дробу (1) до скінченного значення достатньо виконання умов $|a_{2k-1}| \le \rho^2$ і $|a_{2k}| \ge 2(\rho^2 - \cos\arg a_{2k})$, $k = 1,2,\ldots$. Важливим є результат Н. Вишінскі та Дж. Мак Лафлін [9], яким встановлено, що дріб (1) збігається до скінченного значення, якщо $|a_{2k-1}| \le c$ і $|a_{2k}| \ge 1 + 3c + 2\sqrt{c}\sqrt{2c+1}$, $k = 1,2,\ldots$, де $c > 0$.

Багатовимірним узагальненням неперервних дробів є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД), означені В. Я. Скоробогатьком [8]. Досліджувалися парні області збіжності для ГЛД з $N > 1$ гілками розгалуження на кожному поверсі. Е. А. Болтарович побудував контрприклад [5], з якого випливає, що теорема Лейтона – Уолла про парні області збіжності у природному формулюванні на ГЛД не переноситься. Ним було встановлено аналог цієї теореми для дробу вигляду

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{2}$$

де $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$ – мультиіндекс, $a_{i(k)}$ – комплексні числа.

Теорема 1 [5]. *Нехай частинні чисельники ГЛД* (2) *з* $N>1$ *гілками розгалуження є комплексними числами, які задовольняють умови:*

1°) $\left|a_{i(2k-1)}\right|\le\frac{\alpha}{N},\quad i_p=1,\ldots,N,\quad p=1,\ldots,2k-1,\quad k=1,2,\ldots;$

2°) *для кожного натурального* k *існує єдиний індекс* j_{2k}, $1\le j_{2k}\le N$, *що*

$$\left|a_{i(2k-1)j_{2k}}\right|\ge R,\quad i_p=1,\ldots,N,\quad p=1,\ldots,2k-1,\quad k=1,2,\ldots,$$

$$\left|a_{i(2k)}\right|\le\frac{r}{N-1},\quad i_p=1,\ldots,N,\quad p=1,\ldots,2k,\quad i_{2k}\ne j_{2k},\quad k=1,2,\ldots,$$

де α, r, R – *довільні дійсні числа такі, що*

$$0\le\alpha\le\frac{1}{4},\qquad 0\le r<\infty,\qquad R>\frac{(1+\alpha)(r+2-2\alpha)}{1-\alpha},$$

$$(1-\alpha)^2\left(\frac{R}{1+\alpha}-\frac{r}{1-\alpha}-1\right)^2>\alpha(R+r).$$

Тоді ГЛД (2) *збігається.*

Області збіжності в теоремі 1 не є парними. Парні області збіжності ГЛД досліджували у своїх роботах Т. М. Антонова і В. Р. Гладун [1–3, 6].

Об'єктом дослідження є функціональний гіллястий ланцюговий C-дріб з нерівнозначними змінними

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}z_{i_k}}{1}, \tag{3}$$

де $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$ – мультиіндекс; $i_0=N$, N – кількість гілок розгалужень, $N\ge 2$; $a_{i(k)}$ – комплексні числа; $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N$.

Позначимо через I множину всіх мультиіндексів $i(k)$, тобто

$$I=\left\{i(k):i(k)=i_1i_2\ldots i_k,\ 1\le i_p\le i_{p-1},\ p=1,\ldots,k,\ k=1,2,\ldots,\ i_0=N\right\}.$$

Розіб'ємо множину I на три підмножини $I=I_1\cup I_2\cup I_3$, які попарно не перетинаються:

$$I_1=\left\{i(k):i(k)\in I,\ \ell=1,\ k=1,2,\ldots\right\},$$

$$I_2=\left\{i(k):i(k)\in I,\ \ell\ \text{– парне},\ \ell>1,\ k=2,3,\ldots\right\},$$

$$I_3=\left\{i(k):i(k)\in I,\ \ell\ \text{– непарне},\ \ell>1,\ k=3,4,\ldots\right\},$$

де $\ell=\sum_{s=1}^{k}\delta_{i_k}^{i_s}$ – кількість повторів індексу i_k в мультиіндексі $i(k)\in I$; $\delta_{i_k}^{i_s}$ – символ Кронекера.

Теорема 2. *ГЛД* (3) *рівномірно збігається у замкненій області*

$$D=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N,\ \alpha\le\left|z_p\right|\le\beta,\ p=1,\ldots,N\right\}$$

до деякої голоморфної функції $f(\mathbf{z})$, *якщо елементи дробу* $a_{i(k)}$ – *комплексні числа, які задовольняють умови*

$$\left|a_{i(k)}\right|\le\begin{cases}\dfrac{r_1/\beta}{i_{k-1}-1}, & i(k)\in I_1,\\ r/\beta, & i(k)\in I_3,\end{cases} \tag{4'}$$

$$\left|a_{i(k)}\right| \ge \frac{1}{\alpha}(2+r_1)(1+r_1+r), \qquad i(k) \in I_2, \tag{4''}$$

$0 < r_1 < \dfrac{1-3r}{1+r}$, $0 < r < \dfrac{1}{3}$, *і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$\left|f(\mathbf{z}) - f_m(\mathbf{z})\right| \le MC_{N+m}^{N-1} q^{m+1},$$

де $f_m(\mathbf{z})$ – m*-й підхідний дріб ГЛД* (3), $M = \left(\dfrac{r_1}{r}\right)^p$, $p = i_1 - i_{m+1} + 1$, $1 \le$ $\le p \le N$, $q = \sqrt{\dfrac{(2+r_1)r}{1-r_1-r}}$.

Д о в е д е н н я. Позначимо залишки дробу (3):

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1, \qquad Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} + \frac{a_{i(k)i_k} z_{i_k}}{Q_{i(k)i_k}^{(n)}(\mathbf{z})},$$

$$k = 1, \ldots, n-1, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Зауважимо, що $i(k+1) \in I_1$ для всіх елементів і залишків дробу під знаком суми, оскільки $i_{k+1} < i_k$.

Використовуючи метод математичної індукції, доведемо такі оцінки для залишків ГЛД (3):

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \ge 1, \tag{5'}$$

де $i(k) \in I_1 \bigcup I_3$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$1 - r_1 - r \le \left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \le 1 + r_1 + r, \tag{5''}$$

де $i(k) \in I_2$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$.

При $k = n$ нерівності (5′) і (5″) виконуються, оскільки $\left|Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, і

$$\left|Q_{i(n-1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| = \left|1 + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} a_{i(n)} z_{i_n} + a_{i(n-1)i_{n-1}} z_{i_{n-1}}\right|.$$

Нехай $i(n-1) \in I_2$, тоді $i(n-1)i_{n-1} \in I_3$. У цьому випадку справджуються оцінки

$$\left|Q_{i(n-1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \le 1 + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \left|a_{i(n)} z_{i_n}\right| + \left|a_{i(n-1)i_{n-1}} z_{i_{n-1}}\right| \le$$

$$\le 1 + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \frac{r_1/\beta}{i_{n-1}-1}\beta + \frac{r}{\beta}\beta = 1 + r_1 + r,$$

$$\left|Q_{i(n-1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \ge 1 - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \left|a_{i(n)} z_{i_n}\right| - \left|a_{i(n-1)i_{n-1}} z_{i_{n-1}}\right| \ge$$

$$\ge 1 - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \frac{r_1/\beta}{i_{n-1}-1}\beta - \frac{r}{\beta}\beta = 1 - r_1 - r.$$

Нехай $i(n-1) \in I_1 \bigcup I_3$, тоді $i(n-1)i_{n-1} \in I_2$. Враховуючи, що $1 + r_1 +$ $+ r > 1$, у цьому випадку виконується оцінка

$$\left|Q_{i(n-1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \ge \left|a_{i(n-1)i_{n-1}} z_{i_{n-1}}\right| - 1 - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \left|a_{i(n)} z_{i_n}\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{\alpha}(2+r_1)(1+r_1+r)\alpha - 1 - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \frac{r_1/\beta}{i_{n-1}-1}\beta > 2 + r_1 - 1 - r_1 = 1.$$

Припустимо, що оцінки (5′), (5″) виконуються для $p \ge k+1$. Оцінимо залишки при $p = k$:

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| = \left|1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} + \frac{a_{i(k)i_k} z_{i_k}}{Q_{i(k)i_k}^{(n)}(\mathbf{z})}\right|.$$

Нехай $i(k) \in I_2$ і відповідно $i(k)i_k \in I_3$. Тоді справджуються оцінки

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \le 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{\left|a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}\right|}{\left|Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} + \frac{\left|a_{i(k)i_k} z_{i_k}\right|}{\left|Q_{i(k)i_k}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} \le$$

$$\le 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{r_1/\beta}{i_k - 1}\beta + \frac{r}{\beta}\beta = 1 + r_1 + r,$$

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \ge 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{\left|a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}\right|}{\left|Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} - \frac{\left|a_{i(k)i_k} z_{i_k}\right|}{\left|Q_{i(k)i_k}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} \ge$$

$$\ge 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{r_1/\beta}{i_k - 1}\beta - \frac{r}{\beta}\beta = 1 - r_1 - r.$$

Нехай $i(k) \in I_1 \bigcup I_3$ і відповідно $i(k)i_k \in I_2$. У цьому випадку виконується оцінка

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \ge \frac{\left|a_{i(k)i_k} z_{i_k}\right|}{\left|Q_{i(k)i_k}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} - 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{\left|a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}\right|}{\left|Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} \ge$$

$$\ge \frac{\frac{1}{\alpha}(2 + r_1)(1 + r_1 + r)\alpha}{(1 + r_1 + r)} - 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \frac{r_1/\beta}{i_k - 1}\beta = 2 + r_1 - 1 - r_1 = 1.$$

Отже, оцінки (5′), (5″) виконуються для довільного $k = 1,\ldots,n$, $n = 1,2,\ldots$.

Використовуючи відому [4] формулу різниці підхідних дробів ГЛД (3), маємо оцінку

$$\left|f_n(\mathbf{z}) - f_m(\mathbf{z})\right| \le \sum_{i_1=1}^{i_0} \sum_{i_2=1}^{i_1} \ldots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \frac{\prod_{k=1}^{m+1} \left|a_{i(k)} z_{i_k}\right|}{\prod_{k=1}^{m+1} \left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \prod_{k=1}^{m-1} \left|Q_{i(k)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|}, \qquad n > m.$$

Оцінимо добутки $\dfrac{\prod_{k=1}^{m+1} \left|a_{i(k)} z_{i_k}\right|}{\prod_{k=1}^{m+1} \left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \prod_{k=1}^{m-1} \left|Q_{i(k)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|}$, $i(k) \in I$.

Для довільного фіксованого набору індексів $j_1, j_2, \ldots, j_{m+1}$ маємо скінченну множину $J \subset I$ мультиіндексів $j(1), j(2), \ldots, j(m+1)$. Розіб'ємо множину J на три підмножини $J = J_1 \bigcup J_2 \bigcup J_3$, які попарно не перетинаються:

$$J_1 = \left\{ j(s) : j(s) \in J \bigcap I_1,\ s = 1,\ldots,m+1 \right\},$$

$$J_2 = \left\{ j(s) : j(s) \in J \bigcap I_2,\ s = 2,\ldots,m+1 \right\},$$

$$J_3 = \left\{ j(s) : j(s) \in J \bigcap I_3,\ s = 3,\ldots,m+1 \right\}.$$

Із властивості мультиіндекса $j(s) \in J_1 \subset I$ маємо, що потужність множини J_1 дорівнює $|J_1| = p$, де $p = j_1 - j_{m+1} + 1$, $1 \le p \le N$. Якщо $j(s) \in J_2$, то $j(s-1) \in J_1 \bigcup J_3$ і $j(s+1) \in J_1 \bigcup J_3$. Отже, для потужностей множин J_2 і J_3 виконуються такі нерівності: $|J_2| \le \left[\frac{m+1}{2}\right]$, $|J_3| \ge m+1-p-\left[\frac{m+1}{2}\right]$.

Запишемо рівність

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{m+1} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\prod\limits_{s=1}^{m+1} \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \prod\limits_{s=1}^{m-1} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{j(s)\in J} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\prod\limits_{j(s)\in J} \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \prod\limits_{j(s)\in J\setminus\{j(m),j(m+1)\}} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{j(s)\in J_1} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right| \prod\limits_{j(s)\in J_2} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right| \prod\limits_{j(s)\in J_3} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\prod\limits_{j(s)\in J_1} \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \prod\limits_{j(s)\in J_2} \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \prod\limits_{j(s)\in J_3} \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod\limits_{j(s)\in J_1\setminus\{j(m),j(m+1)\}} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right| \prod\limits_{j(s)\in J_2\setminus\{j(m),j(m+1)\}} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right| \prod\limits_{j(s)\in J_3\setminus\{j(m),j(m+1)\}} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|}.$$

Враховуючи потужності означених множин J_1, J_2 і J_3, умови теореми на елементи ГЛД (3) та оцінки (5′), (5″) для залишків дробу, маємо, що

$$\prod_{j(s)\in J_1} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right| \le r_1^{\,p}, \qquad \prod_{j(s)\in J_3} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right| \le r^{m+1-p-\left[\frac{m+1}{2}\right]},$$

$$\prod_{j(s)\in J_1\setminus\{j(m),j(m+1)\}} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right| \ge 1,$$

$$\left(\prod_{j(s)\in J_2\setminus\{j(m),j(m+1)\}} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|\right)^{-1} \le (1-r_1-r)^{-\left[\frac{m+1}{2}\right]},$$

$$\prod_{j(s)\in J_3\setminus\{j(m),j(m+1)\}} \left|Q_{j(s)}^{(m)}(\mathbf{z})\right| \ge 1.$$

Розглянемо вираз

$$\frac{\prod\limits_{j(s)\in J_2} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\prod\limits_{j(s)\in J_1\bigcup J_3} \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \prod\limits_{j(s)\in J_2} \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right|}.$$

Згідно з означенням залишків ГЛД (3), для кожного $Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})$, $j(s) \in I_2$, маємо $Q_{j(s-1)}^{(n)}(\mathbf{z})$, $j(s-1) \in I_1 \bigcup I_3$. Тому справджується оцінка

$$\frac{\left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\left|Q_{j(s-1)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \left|Q_{j(s)}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} =$$

$$= \frac{\left|a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}\right|}{\left|\left(1 + \sum_{i_s=1}^{j_{s-1}-1} \frac{a_{j(s-1)i_s} z_{i_s}}{Q^{(n)}_{j(s-1)i_s}(\mathbf{z})} + \frac{a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}}{Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z})}\right) Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z})\right|} =$$

$$= \frac{\left|a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}\right|}{\left|\left(Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z}) + Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z}) \sum_{i_s=1}^{j_{s-1}-1} \frac{a_{j(s-1)i_s} z_{i_s}}{Q^{(n)}_{j(s-1)i_s}(\mathbf{z})} + a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}\right)\right|} =$$

$$= \frac{1}{\left|\left(\frac{Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z})}{a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}} + \frac{Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z})}{a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}} \sum_{i_s=1}^{j_{s-1}-1} \frac{a_{j(s-1)i_s} z_{i_s}}{Q^{(n)}_{j(s-1)i_s}(\mathbf{z})} + 1\right)\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{1 - \frac{\left|Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z})\right|}{\left|a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}\right|} - \frac{\left|Q^{(n)}_{j(s-1)j_{s-1}}(\mathbf{z})\right|}{\left|a_{j(s-1)j_{s-1}} z_{j_{s-1}}\right|} \sum_{i_s=1}^{j_{s-1}-1} \frac{\left|a_{j(s-1)i_s} z_{i_s}\right|}{\left|Q^{(n)}_{j(s-1)i_s}(\mathbf{z})\right|}} \le$$

$$\le \frac{1}{1 - \frac{1 + r_1 + r}{\frac{1}{\alpha}(2 + r_1)(1 + r_1 + r)\alpha} - \frac{1 + r_1 + r}{\frac{1}{\alpha}(2 + r_1)(1 + r_1 + r)\alpha} \sum_{i_s=1}^{j_{s-1}-1} \frac{r_1/\beta}{j_{s-1} - 1}\beta} =$$

$$= 2 + r_1 .$$

Враховуючи також оцінку (5′), маємо

$$\frac{\prod_{j(s)\in J_2} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\prod_{j(s)\in J_1 \cup J_3} \left|Q^{(n)}_{j(s)}(\mathbf{z})\right| \prod_{j(s)\in J_2} \left|Q^{(n)}_{j(s)}(\mathbf{z})\right|} \le (2 + r_1)^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}.$$

Отже,

$$\frac{\prod_{s=1}^{m+1} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\prod_{s=1}^{m+1} \left|Q^{(n)}_{j(s)}(\mathbf{z})\right| \prod_{s=1}^{m-1} \left|Q^{(m)}_{j(s)}(\mathbf{z})\right|} \le \frac{r_1^{\,p} (2 + r_1)^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} r^{m+1-p-\left[\frac{m+1}{2}\right]}}{(1 - r_1 - r)^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}}.$$

Використовуючи нерівність $\left[\frac{x}{2}\right] \le \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{N}$, отримаємо

$$\frac{\prod_{k=1}^{m+1} \left|a_{j(s)} z_{j_s}\right|}{\prod_{s=1}^{m+1} \left|Q^{(n)}_{j(s)}(\mathbf{z})\right| \prod_{s=1}^{m-1} \left|Q^{(m)}_{j(s)}(\mathbf{z})\right|} \le \frac{r_1^{\,p} (2 + r_1)^{\frac{m+1}{2}} r^{m+1-p-\frac{m+1}{2}}}{(1 - r_1 - r)^{\frac{m+1}{2}}} =$$

$$= \left(\frac{r_1}{r}\right)^p \left(\sqrt{\frac{(2 + r_1) r}{1 - r_1 - r}}\right)^{m+1}.$$

Зважаючи на довільність вибору індексів $j_1, j_2, \dots, j_{m+1}$, запишемо

$$\frac{\prod_{k=1}^{m+1}\left|a_{i(k)}z_{i_k}\right|}{\prod_{k=1}^{m+1}\left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right|\prod_{k=1}^{m-1}\left|Q_{i(k)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|}\le Mq^{m+1}, \qquad i(k)\in I,$$

де $M=\left(\frac{r_1}{r}\right)^p$, $q=\sqrt{\frac{(2+r_1)r}{1-r_1-r}}$.

Враховуючи, що $\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{z})=f(\mathbf{z})$, маємо оцінку швидкості збіжності ГЛД (3) до деякої функції $f(\mathbf{z})$:

$$\left|f(\mathbf{z})-f_m(\mathbf{z})\right|\le\sum_{i_1=1}^{i_0}\sum_{i_2=1}^{i_1}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{i_m}Mq^{m+1}=Mq^{m+1}\sum_{i_1=1}^{i_0}\sum_{i_2=1}^{i_1}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{i_m}1=$$

$$=Mq^{m+1}\frac{N(N+1)(N+2)\ldots(N+m)}{(m+1)!}=MC_{N+m}^{N-1}q^{m+1}. \tag{6}$$

Зауважимо, що C_{N+m}^{N-1} є поліномом степеня $N-1$ від m.

Із оцінки

$$\left|f_m(\mathbf{z})\right|\le\sum_{i_1=1}^{i_0}\frac{\left|a_{i(1)}z_{i_1}\right|}{\left|Q_{i(1)}^{(m)}(\mathbf{z})\right|}\le\sum_{i_1=1}^{i_0}\frac{r_1/\beta}{i_0-1}\beta=\frac{i_0}{i_0-1}r_1=\frac{N}{N-1}r_1$$

маємо, що значення ГЛД (3) і всіх його підхідних дробів належать області $|w|\le\frac{N}{N-1}r_1$ і є голоморфними функціями.

З оцінки (6) випливає рівномірна збіжність послідовності підхідних дробів ГЛД (3) до голоморфної функції $f(\mathbf{z})$ у замкненій області D.

Теорему доведено. ◊

У дробі (3) покладемо змінні $z_p=1$, $p=1,\ldots,N$, і параметри $\alpha=\beta=1$. Отримаємо числовий C-дріб вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}. \tag{7}$$

Наступна теорема є наслідком теореми 2 для дробу (7).

Теорема 3. *Нехай елементи* $a_{i(k)}$ *ГЛД* (7) *є комплексними числами, які задовольняють умови*

$$\left|a_{i(k)}\right|\le\begin{cases}\frac{r_1}{i_{k-1}-1}, & i(k)\in I_1,\\ r, & i(k)\in I_3,\end{cases}$$

$$\left|a_{i(k)}\right|\ge(2+r_1)(1+r_1+r), \qquad i(k)\in I_2,$$

де $0<r_1<\frac{1-3r}{1+r}$, $0<r<\frac{1}{3}$.

Тоді ГЛД (7) *збігається, і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$\left|f-f_m\right|\le MC_{N+m}^{N-1}q^{m+1},$$

де f *– значення ГЛД* (7), f_m *– його* m*-й підхідний дріб,* $M=\left(\frac{r_1}{r}\right)^p$, $p=$ $=i_1-i_{m+1}+1$, $1\le p\le N$, $q=\sqrt{\frac{(2+r_1)r}{1-r_1-r}}$.

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 1. – С. 11–15.
2. *Антонова Т. М.* Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами та їх парних частин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 7–15.
3. *Антонова Т. М., Гладун В. Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 4. – С. 27–35.
4. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
5. *Болтарович Е. А.* Аналог признака сходимости Лейтона – Уолла для ветвящихся цепных дробей // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 32–36.
6. *Гладун В. Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 16–26.
7. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
8. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
9. *Mc Laughlin J., Wyshinski N. J.* A convergence theorem for continued fractions of the form $\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}} \frac{a_n}{1}$ // J. Comput. and Appl. Math. – 2005. – **179**, No. 1-2. – P. 255–262.
10. *Leighton W., Wall H. S.* On the transformation and convergence of continued fractions // Amer. J. Math. – 1936. – **58**. – P. 267–281.

ПАРНЫЕ КРУГОВЫЕ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С НЕРАВНОЗНАЧНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Для ветвящихся цепных дробей с неравнозначными переменными установлены теоремы о парных круговых областях сходимости и оценки скорости сходимости этих дробей.

THE TWIN CIRCULAR DOMAINS OF CONVERGENCE FOR BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH UNEQUIVALENT VARIABLES

The theorems about twin circular domains of convergence and about the estimations for speed convergence for branched continued fractions with unequivalent variables are obtained.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
29.10.08