УДК 512.546

Н. М. Пирч

ВІЛЬНІ ПАРАТОПОЛОГІЧНІ ГРУПИ ТА ВІЛЬНІ ДОБУТКИ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

Досліджуються тополого-алгебраїчні властивості вільних паратопологічних груп та вільних добутків паратопологічних груп.

Паратопологічною групою називають пару (G, τ), де G – група, τ – топологія на G, причому відображення множення $m : G \times G \to G$, $m(x, y) \mapsto$ $\mapsto xy$ є неперервним (топологію τ називають при цьому напівгруповою).

Поняття вільного добутку топологічних груп вперше появилось у роботі М. І. Граєва [2]. Значний вклад у розвиток теорії вільних добутків топологічних груп зробили такі математики, як С. Морріс, Е. Ордман, Е. Кац, М. Кан.

У роботі [4] означено поняття вільного добутку сім'ї паратопологічних груп.

Означення 1. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ – сім'я паратопологічних груп. Паратопологічну групу G будемо називати *вільним топологічним добутком груп* (позначати $G = \prod\limits_{i \in I} * G_i$), якщо виконуються умови:

– група G містить групи G_i як свої підгрупи;
– мінімальна підгрупа групи G, що містить в собі всі підгрупи G_i, співпадає з G;
– якщо для кожного $i \in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i : G_i \to H$ з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм f з паратополоігчної групи G у паратопологічну групу H такий, що $f|_{G_i} = f_i$ для всіх $i \in I$.

Як було встановлено у [4], для кожної сім'ї паратопологічних груп вільний добуток існує, є єдиним з точністю до ізоморфізму, що залишає на місці всі елементи груп, і є алгебраїчно ізоморфний вільному добутку абстрактних груп G_i.

Означення 2. Нехай X – топологічний простір. *Вільною паратопологічною групою простору* X називають паратопологічну групу $F_p(X)$ таку, що:

– X є підпростором в $F_p(X)$;
– X породжує $F_p(X)$ алгебраїчно, тобто $\langle X \rangle = F_p(X)$;
– для кожного неперервного відображення f з X у паратопологічну групу G існує неперервний гомоморфізм Φ групи $F_p(X)$ у групу G, що продовжує відображення f.

У [7] встановлено, що для кожного топологічного простору X існує вільна паратопологічна група $F_p(X)$, яка є єдиною з точністю до природного ізоморфізму, що залишає на місці всі точки простору X і є алгебраїчно ізоморфною вільній групі з множиною твірних X. Аналогічні властивості має і вільна абелева паратопологічна група $A_p(X)$ топологічного простору X.

У цій роботі дослідимо тополого-алгебраїчні властивості вільних паратопологічних груп і вільних добутків паратопологічних груп, зокрема такі,

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. – 52, № 4. – С. 58-63.

як лінійна зв'язність, властивість бути k_ω-простором, σ-компактним простором, сіткова вага, властивість Бера.

2. Властивості вільних паратопологічних груп і вільних добутків паратопологічних груп. Нагадаємо, що топологічний простір X називають лінійно зв'язним, якщо для довільних різних точок $a, b \in X$ існує неперервне відображення $h : I \to X$ таке, що $h(0) = a$, $h(1) = b$.

Твердження 1. *Нехай $\{G_i : i \in I\}$ – сім'я паратопологічних груп. Вільний топологічний добуток $\prod_{i \in I} * G_i$ є лінійно зв'язною паратопологічною групою тоді й тільки тоді, коли усі співмножники є лінійно зв'язними паратопологічними групами.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $g = a_1 a_2 \dots a_n$ – довільний елемент з $\prod_{i \in I} * G_i$. Для того щоб довести лінійну зв'язність паратопологічної групи $\prod_{i \in I} * G_i$, з огляду на її однорідність, достатньо показати, що існує неперервне відображення $f : I \to \prod_{i \in I} * G_i$ таке, що $f(0) = g$, $f(1) = e$. Нехай $a_1 \in G_j$ для деякого $j \in I$. Тоді існує неперервне відображення $h_1 : I \to G_j$ таке, що $h_1(0) = a_1$, $h_1(1) = e$. З однорідності паратопологічної групи маємо, що образ неперервного відображення $f_1(x) : I \to \prod_{i \in I} * G_i = h_1(x) \cdot a_2 \dots a_n$ з'єднує точки $g = a_1 a_2 \dots a_n$ і $g_2 = a_2 \dots a_n$. Аналогічно можемо побудувати ланцюг неперервних відображень $f_k : I \to \prod_{i \in I} * G_i$, образи яких з'єднують відповідно точки $g_k = a_k a_{k+1} \dots a_n$ і $g_{k+1} = a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n$ для $k = 2, 3, \dots, n$, де $g_{n+1} = e$. Означимо відображення $f : I \to \prod_{i \in I} * G_i$, поклавши $f(x) = f_k(nx - k + 1)$, якщо $\frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n}$. Відображення f є неперервним і $f(0) = g$, $f(1) = e$.

Достатність випливає з того, що неперервний образ лінійно зв'язного простору є лінійно зв'язним. ◊

Твердження 2. *Нехай $G_1, G_2, \dots, G_n$ – сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$ є компактно породженою паратопологічною групою тоді й тільки тоді, коли усі співмножники є компактно породженими паратопологічними групами.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $G_1, G_2, \dots, G_n$ – сім'я паратопологічних груп і нехай $F_1 \subseteq G_1, F_2 \subseteq G_2, \dots, F_n \subseteq G_n$ – компактні підмножини такі, що $G(F_n) = G_n$. Тоді множина $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ є компактною і алгебраїчно породжує групу $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$.

Достатність випливає з того, що фактор група компактно породженої паратопологічної групи є компактно породженою. ◊

Зауважимо, що для нескінченної кількості співмножників дане твердження 2 вже не є вірним. Для прикладу досить розглянути вільний добуток зліченної кількості дискретних груп Z.

Підмножину A топологічної групи G називають симетричною, якщо $A = A^{-1}$.

Якщо G – група, X – підмножина в G, то позначимо через $G_n(X)$ множину слів у G, що мають довжину відносно X, не більшу від n.

Теорема 1. *Нехай X – симетричний k_ω-підпростір паратопологічної гаусдорфової групи G, що алгебраїчно породжує цю групу. Якщо топологія групи G є найсильнішою напівгруповою топологією на G, що індукує на X вихідну топологію, тоді група G є k_ω-простором і підмножина A в G є замкненою тоді й тільки тоді, коли перетин $A \bigcap G_n(X)$ є замкненим в $G_n(X)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $X = \lim\limits_{\to} X_n$. Тоді множина $K_n = i_n((X_n)^n)$ (тут $i_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$) є компактною і $G = \lim\limits_{\to} K_n$ (доведення цього факту аналогічне доведенню теореми 1 з [5]). ◊

Твердження 3. *Нехай $\{G_i : i \in I\}$ – зліченна сім'я паратопологічних груп. Вільний топологічний добуток $\prod\limits_{i \in I} * G_i$ є k_ω-простором тоді й тільки тоді, коли усі співмножники є k_ω-просторами.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Покладемо в теоремі 1 $G = \prod\limits_{i \in I} * G_i$, $X = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$ (тут $\bigcup\limits_{i \in I} G_i$ – об'єднання топологічних просторів $\{G_i : i \in I\}$, що мають єдину спільну точку e).

Достатність випливає з того, що відкритий образ k_ω-простору є k_ω-простором. ◊

Теорема 2. *Нехай X – функціонально-гаусдорфовий простір. Тоді еквівалентні такі умови*:

1°) *вільна паратопологічна група $F_p(X)$ простору X є k_ω-простором;*

2°) *вільна абелева паратопологічна група $A_p(X)$ простору X є k_ω-простором;*

3°) *X є зліченним k_ω-простором.*

Д о в е д е н н я. ***1° ⇒ 2°***. Нехай група $F_p(X)$ є k_ω-простором. Як встановлено у [6], паратопологічна група $A_p(X)$ є фактор-групою паратопологічної групи $F_p(X)$. Оскільки відкритий образ k_ω-простору є k_ω-простором, то група $A_p(X)$ є k_ω-простором.

3° ⇒ 1°. Нехай X є зліченним k_ω-простором. Оскільки простір X є T_1-простором, то множина $X^{-1} \subset F_p(X)$ є дискретною (див. [6]). А тому підпростір $X \oplus X^{-1}$ є k_ω-простором. Тепер застосуємо до паратопологічної групи $F_p(X)$ і її підмножини $X \oplus X^{-1}$ теорему 1.

2° ⇒ 3°. Нехай вільна абелева паратопологічна група $A_p(X)$ простору X є k_ω-простором. Оскільки кожен T_1-простір є замкненим у своїй вільній абелевій паратопологічній групі $A_p(X)$ (див. [6]), а замкнений підпростір k_ω-простору є k_ω-простором, то X є k_ω-простором. Як встановлено у [6], для кожного T_1-простору підпростір $-X$ паратопологічної групи $A_p(X)$ є замкненим і дискретним. Отже, $-X$ є дискретним k_ω-простором. Тому простори $-X$ і відповідно X є зліченними. ◊

Нагадаємо, що топологічний простір X називають σ-компактним простором, якщо він може бути поданий у вигляді зліченного об'єднання $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ своїх компактних підпросторів K_n. Покладемо $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Тоді сім'я $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ є неспадною послідовністю компактних підмножин і $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, тобто кожен σ-компактний простір можна подати у вигляді зліченного об'єднання $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ неспадної послідовності своїх компактних підпросторів C_n.

Твердження 4. *Нехай $\{G_i : i \in I\}$ − злічення сім'я паратопологічних груп. Вільний топологічний добуток $\prod_{i\in I} {*G_i}$ є σ-компактним простором тоді й тільки тоді, коли усі співмножники є σ-компактними просторами.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $G_i = \bigcup_{n=1}^{n} G_{i,n}$, де $\{G_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$ − неспадна послідовність компактних підмножин в G_i. Покладемо $K_n = j((G_{1,n} \cup G_{2,n} \cup \ldots \cup G_{n,n})^n)$ (тут $j(g_1, g_2, \ldots, g_s) = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_s$ − операція множення). Множина K_n будучи образом при неперервному відображенні j компактної множини $(G_{1,n} \cup G_{2,n} \cup \ldots \cup G_{n,n})^n$, є компактною. Оскільки $\prod_{i\in I} {*G_i} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, то простір $\prod_{i\in I} {*G_i}$ є σ-компактним.

Достатність випливає з того, що неперервний образ σ-компактного простору є σ-компактним простором. ◊

Зауважимо, що для незліченної кількості співмножників твердження 3 і 4 вже не є вірними. Для прикладу досить розглянути вільний добуток незліченної кількості дискретних груп Z.

Твердження 5. *Нехай X − T_1-простір. Тоді еквівалентні такі умови:*

1°) *вільна паратопологічна група $F_p(X)$ простору X є σ-компактним простором;*

2°) *вільна абелева паратопологічна група $A_p(X)$ простору X є σ-компактним простором;*

3°) *простір X є зліченним.*

Д о в е д е н н я. ***1°*** $\Rightarrow$ ***2°***. Ця еквівалентність випливає з того, що неперервний образ σ-компактного простору є σ-компактним простором.

3° $\Rightarrow$ ***1°***. Для зліченного простору X група $F_p(X)$ є зліченною, а, отже, σ-компактною.

2° $\Rightarrow$ ***3°***. Нехай вільна абелева паратопологічна група $A_p(X)$ простору X є σ-компактним простором. Підпростір $-X$ паратопологічної групи $A_p(X)$ є замкненим і дискретним. Отже, $-X$ є дискретним σ-компактним простором. Тому простори $-X$ і відповідно X є зліченними. ◊

Нагадаємо, що сіткою у топологічному просторі X називають таку множину S, що для кожної точки $x \in X$ і довільного околу O_x точки x знайдеться таке $P \in S$, що $x \in P \subseteq O_x$. Сітковою вагою $nw(X)$ простору X називають кардинал

$$\min\{|S| \cdot \aleph_0 : S \text{ − сітка в } X\}.$$

Розглянемо аналог твердження 3.1. з роботи А. В. Архангельського [1].

Теорема 3. *Нехай* X *– симетричний підпростір паратопологічної групи* G *, що алгебраїчно породжує цю групу. Тоді* $nw(X) = nw(G)$.

Д о в е д е н н я. Нехай G – паратопологічна група, X – симетричний підпростір в G, що породжує цю групу алгебраїчно. Тоді $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, де кожен простір X_n є неперервним образом простору X^n.

При піднесенні до степеня $\leq \aleph_0$ і при неперервному відображенні нескінченна сіткова вага не збільшується. При об'єднанні зліченної кількості підпросторів сіткова вага не перевищує супремума сіткових ваг доданків. Сіткова вага підпростору не перевищує сіткової ваги самого простору. Звідси й отримуємо, що $nw(X) = nw(G)$. ◊

Наслідок 1. *Нехай* $\{G_i : i \in I\}$ *– сім'я паратопологічних груп. Тоді* $nw\left(\prod_{i \in I} * G_i\right) = nw\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right)$. *(Тут* $\bigcup_{i \in I} G_i$ *– об'єднання топологічних просторів* $\{G_i : i \in I\}$, *що мають єдину спільну точку* e *).*

Для топологічного простору X через $F_p(X)_n$ позначимо підпростір у $F_p(X)$, який складається з усіх слів, що мають у нескоротній формі довжину, не більшу ніж n.

Нагадаємо, що топологічний простір X має властивість Бера, якщо він не може бути зображений у вигляді зліченного об'єднання своїх ніде не щільних підпросторів. Для дослідження властивості Бера у вільних паратопологічних групах і вільних добутках паратопологічних груп потрібне буде наступне твердження (доведення його аналогічне доведенню твердження 7.20, запропонованому для вільних топологічних груп у [3]).

Твердження 6. *Якщо для деякого* n *підпростір* $F_p(X)_n$ *має непорожню внутрішність, то простір* X *дискретний.*

Наслідок 2. *Простір* $F_p(X)$ *має властивість Бера тоді й тільки тоді, коли простір* X *дискретний.*

Нехай $\{G_i : i \in I\}$ – сім'я паратопологічних груп. Покладемо $G = \prod_{i \in I} * G_i$. Говоримо, що елемент $g = g_1 g_2 \ldots g_n$ з G, де $g_i \in G_{\alpha_i}$, має нескоротну форму, якщо $g_k \neq e$ для всіх $k = 1, \ldots, n$ і $\alpha_k \neq \alpha_{k+1}$ для всіх $k = 1, \ldots, n-1$. Число n назвемо довжиною елемента $g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n$. Для вільного топологічного добутку $G = \prod_{i \in I} * G_i$ позначимо через G_n множину слів довжини $\leq n$.

Твердження 7. *Нехай* $G \neq \{e\}$ *і* $H \neq \{e\}$ *– паратопологіні групи. Якщо для деякого натурального* n *підпростір* $(G * H)_n \subset G * H$ *має непорожню внутрішність, то групи* G *і* H *дискретні.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що принаймні одна з груп G або H недискретна. Без втрати загальності, припустимо, що це група G. Нехай U – відкрита множина, що міститься в $(G * H)_n$. Тоді $V = a^{-1}U$ – окіл одиниці групи $G * H$, що міститься в $(G * H)_{2n}$. Нехай $g_1 \in G$, $h_1 \in H$ – неодиничні елементи. Розглянемо елемент $b = g_1 h_1 g_1 h_1 \ldots g_1 h_1$, довжина якого перевищує

n. Існує окіл V_1 одиниці групи $G * H$ такий, що $bV_1b^{-1} \subset V$. Тоді $V_2 = V_1 \cap \cap G$ – окіл одиниці групи G. Оскільки група G недискретна, то існує таке $g_2 \in V_2$, що $g_2 \neq e$. Тоді елемент $b_1 = bg_2b^{-1} = g_1h_1 \ldots g_1h_1g_2h_1^{-1}g_1^{-1} \ldots h_1^{-1}g_1^{-1}$ міститься в V і має довжину, більшу ніж $2n$.

Наслідок 3. *Нехай $G \neq \{e\}$ і $H \neq \{e\}$ – паратопологіні групи. Вільний топологічний добуток $G * H$ має властивість Бера тоді й тільки тоді, коли групи G і H дискретні.*

1. *Архангельский А. В.* О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств // Успехи мат. наук. – 1980. – **35**. – С. 3–22.
2. *Граев М. И.* Свободные произведение топологических групп // Докл. АН СССР. – 1950. – **14.** – С. 343–354.
3. *Гуран І. Й., Зарічний М. М.* Елементи теорії топологічних груп. – Київ: НМК ВО, 1991. – 75 с.
4. *Пирч Н. М.* Вільні добутки паратопологічних груп // Мат. студії (у друці).
5. *Mack J., Morris S. A., Ordman E. T.* Free topological groups and the projective dimension of locally compact Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **40**. – P. 303–308.
6. *Pyrch N. M., Ravsky O. V.* On free paratopological groups // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 2. – P. 115–125.
7. *Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M.* Free paratopological groups // Topology Proc. – 2002. – **27**. – C. 1–28.

СВОБОДНЫЕ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Исследуются тополого-алгебраические свойства свободных паратопологических групп и свободных произведений паратопологических групп.

FREE PARATOPOLOGICAL GROUPS AND FREE PRODUCTS OF PARATOPOLOGICAL GROUPS

The topologically-algebraic properties of the free paratopological groups and free products of paratopologiacal groups are investigated.

Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
14.07.08