УДК 517.956

І. Д. Пукальський

# ПАРАБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА І ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

*Встановлено необхідні та достатні умови вибору оптимального керування системами, що описуються параболічною крайовою задачею з обмеженими внутрішнім і крайовим керуваннями. Критерій якості задано сумою об'ємного та поверхневого інтегралів.*

Необхідність оптимального керування процесами, що описуються рівняннями параболічного типу, виникає при розв'язанні багатьох прикладних задач, зокрема, при розв'язанні задач оптимального керування температурними напруженнями і переміщеннями у термопружних і термов'язкопружних тілах, а також при розв'язанні задач керування нестаціонарними температурними режимами при обмеженнях на керування і параметри теплового процесу. Вивчення таких задач проводилося в монографіях [1, 2, 5, 6].

Задачам мінімізації функціоналів для систем, що описуються крайовими задачами для гіперболічних та еліптичних рівнянь, присвячені праці [4, 9–12].

У цій статті розглядаємо задачу вибору оптимального керування системами, що описується параболічною крайовою задачею з обмеженими внутрішнім і крайовим керуваннями. Функціонал якості визначаємо як суму об'ємного та поверхневого інтегралів.

Нехай $\mathcal{D}$ – обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\mathcal{D}$. В області $Q = [0,T) \times \mathcal{D}$ розглянемо задачу про знаходження функцій $(u,p,q)$, на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_1(t,x,\mathbf{u})\,dx + \int_0^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} \mathcal{F}_2(t,x,\boldsymbol{\omega})\,d_xS \tag{1}$$

досягає мінімуму у класі функцій $V : (p,q) \in V \equiv \{p(t,x) \in C^{\alpha}(Q) \mid p_1 \le p \le p_2;$ $q(t,x) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma) \mid q_1 \le q \le q_2\}$, із яких $u(t,x,p,q)$ є розв'язком параболічної крайової задачі

$$(Lu)(t,x) = \Big(\partial_t - \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x)\partial_x^k\Big)u = f_0(t,x,p), \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3}$$

$$(B_i u)(t,x)\big|_{\Gamma} = \sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(t,x)\partial_x^k u\,\Big|_{\Gamma} = f_i(t,x,q), \tag{4}$$

де $1 \le r_i \le 2b-1$, $i \in \{1,\ldots,b\}$; $\mathbf{u} = (u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^{r-1}u, p) = (u_0,\ldots,u_{r+1})$; $\boldsymbol{\omega} = (u\big|_{\Gamma}, \ldots, \partial_x^{r-1}u\big|_{\Gamma}, q) \equiv (\omega_0,\ldots,\omega_{r+1})$; $\Gamma = (0,T] \times \partial\mathcal{D}$; $r = \min_i r_i$.

Нехай для задачі (1)–(4) виконуються умови:

**1°**) крайова задача (2)–(4) рівномірно параболічна [8] і $A_k \in C^{d+\alpha}(Q)$, $b_k^{(i)} \in C^{2b-r_i+d+\alpha}(\Gamma)$, $\partial\mathcal{D} \in C^{2b+d+\alpha}$, $p_1 \in C^{\alpha}(Q)$, $p_2 \in C^{\alpha}(Q)$, $f_0(t,x,p(t,x))$ як функція $(t,x)$ належить простору $C^{\alpha}(Q)$ і має гельдерові похідні другого порядку за $p$, неперервні як функції $(t,x)$;

**2°**) функції $\varphi \in C^{2b+\alpha}(\mathcal{D})$, $(B_i\varphi)(0,x)\big|_{\Gamma} = f_i(0,x,q)$, $q_1 \in C^{2b-r+\alpha}(\Gamma)$, $q_2 \in C^{2b-r+\alpha}(\Gamma)$, $f_i(t,x,q)$ як функція $(t,x)$ належать простору

$C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$ і має гельдерові похідні другого порядку за $q$, неперервні як функції $(t,x)$;

**3°)** функції $\mathcal{F}_1(t,x,\mathbf{u})$ і $\mathcal{F}_2(t,x,\boldsymbol{\omega})$ визначені відповідно в областях $M_1 = Q\times\mathbb{R}^r\times[p_1,p_2]$, $M_2 = \Gamma\times\mathbb{R}^r\times[q_1,q_2]$, мають гельдерові похідні другого порядку за $u_j$, $\omega_j$, $j\in\{0,\ldots,r\}$, і як функції $(t,x)$ належать відповідно до просторів $C(Q)$, $C(\Gamma)$.

За умов, накладених на гладкість коефіцієнтів рівняння (2) і крайових умов (4) при $d = 4b-2r+1$, існує функція Ґріна $(G_0,\ldots,G_b)$ [3, теорема 1], за допомогою якої розв'язок визначається формулою

$$u(t,x,p,q) = \int_0^t d\tau\int_{\mathcal{D}} G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi,p(\tau,\xi))\,d\xi + \int_{\mathcal{D}} G_0(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \\ + \sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau\int_{\partial\mathcal{D}} G_i(t,x,\tau,\xi)f_i(\tau,\xi,q)\,d_\xi S\,. \qquad (5)$$

Якщо $d\ge 0$ і виконані умови **1°**) і **2°**), то згідно з теоремою 1 із [3] існує єдиний розв'язок задачі (2)–(4) у просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ при кожному $(p,q)\in V$ і для нього справджується оцінка

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \le c\left(\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(\mathcal{D})} + \|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)} + \sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}\right). \qquad (6)$$

Нехай $E(t,x,\tau,\xi)$ – функція Ґріна однорідної крайової задачі (2)–(4) ($f_i\equiv 0$), побудована в [7]. Позначимо

$$\lambda(\tau,\xi) = \sum_{k=0}^{r}\int_\tau^T dt\left\{\int_{\mathcal{D}}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial u_k}D_x^k E(t,x,\tau,\xi)\,dx + \int_{\partial\mathcal{D}}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\omega_k}D_x^k E(t,x,\tau,\xi)\,d_x S\right\},$$

$$v_i(\tau,\xi) = \sum_{k=0}^{r}\int_\tau^T dt\left\{\int_{\mathcal{D}}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial u_k}D_x^k G_i(t,x,\tau,\xi)\,dx + \int_{\partial\mathcal{D}}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\omega_k}D_x^k G_i(t,x,\tau,\xi)\,d_x S\right\},$$

$$H_1(\mathbf{u},\lambda) = \mathcal{F}_1(t,x,\mathbf{u}) + \lambda(t,x)f_0(t,x,u_{r+1}),$$

$$H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}) = \mathcal{F}_2(t,x,\boldsymbol{\omega}) + \sum_{i=1}^{b}v_i(t,x)f_i(t,x,\omega_{r+1})\,.$$

Сформулюємо умови оптимальності $(u_{r+1},\omega_{r+1})$.

**Теорема 1.** *Якщо функції* $H_1(\mathbf{u},\lambda)$ *і* $H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v})$ *відповідно за аргументами* $u_{r+1}$ *і* $\omega_{r+1}$ *є монотонно зростаючими, то оптимальним є керування* $u_{r+1}^{(0)} = p_1(t,x)$, $\omega_{r+1}^{(0)} = q_1$, *а оптимальним розв'язком задачі* (1)–(4) *є* $u^{(0)}(t,x,p,q) = u(t,x,p_1,q_1)$.

*Якщо функція* $H_1(\mathbf{u},\lambda)$ *за аргументом* $u_{r+1}$ *є монотонно спадною, а* $H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v})$ *за аргументом* $\omega_{r+1}$ *є монотонно зростаючою, то оптимальним є керування* $(p_2,q_1)$, *а оптимальним розв'язком задачі* (1)–(4) *є* $u(t,x,p_2,q_1)$.

*Якщо функція* $H_1(\mathbf{u},\lambda)$ *за аргументом* $u_{r+1}$ *є монотонно зростаючою, а функція* $H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v})$ *за аргументом* $\omega_{r+1}$ *є монотонно спадною, то оптимальним є керування* $(p_1,q_2)$, *а оптимальним розв'язком задачі* (1)–(4) *є* $u(t,x,p_1,q_2)$.

*Якщо функції* $H_1(\mathbf{u},\lambda)$ *і* $H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v})$ *відповідно за аргументами* $u_{r+1}$ *і* $\omega_{r+1}$ *є монотонно спадними, то оптимальним є керування* $(p_2,q_2)$, *а оптимальним розв'язком задачі* (1)–(4) *є* $u(t,x,p_2,q_2)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\Delta u_{r+1}$ – деякий допустимий приріст керування $u_{r+1}^{(0)}(t,x)$, $\Delta\omega_{r+1}$ – деякий допустимий приріст керування $\omega_{r+1}^{(0)}(t,x)$. Через $\Delta_p u_0$ позначимо відповідний приріст функції $u_0(t,x,u_{r+1}^{(0)},\omega_{r+1}^{(0)})$ за керуванням $u_{r+1}^{(0)}(t,x)$, а через $\Delta_q u_0$ – відповідний приріст розв'язку $u_0(t,x,u_{r+1}^{(0)},\omega_{r+1}^{(0)})$ за керуванням $\omega_{r+1}^{(0)}(t,x)$.

Приріст $\Delta_p u_0$ є розв'язком крайової задачі

$$
\begin{aligned}
&(L\Delta_p u)(t,x) = f_0(t,x,u_{r+1}^{(0)}+\Delta u_{r+1}) - f_0(t,x,u_{r+1}) \equiv \Delta_{u_{r+1}} f_0(t,x,u_{r+1}),\\
&\Delta_p u\big|_{t=0} = 0, \qquad (B_i\Delta_p u)(t,x)\big|_{\Gamma} = 0 .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Використовуючи функцію Ґріна $E(t,x,\tau,\xi)$ однорідної крайової задачі, маємо зображення розв'язку задачі (7) і його похідних

$$
\begin{aligned}
&\Delta_p u_0 = \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{D}} E(t,x,\tau,\xi)\Delta_{u_{r+1}} f_0(\tau,\xi,u_{r+1})\,d\xi ,\\
&\Delta_p u_k = \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{D}} D_x^k E(t,x,\tau,\xi)\Delta_{u_{r+1}} f_0(\tau,\xi,u_{r+1})\,d\xi, \qquad k\in\{1,\dots,r\} .
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Приріст $\Delta_q u_0$ є розв'язком крайової задачі

$$
\begin{aligned}
&(L\Delta_q u)(t,x) = 0, \qquad \Delta_q u\big|_{t=0} = 0 ,\\
&(B_i\Delta_q u)(t,x)\big|_{\Gamma} = f_i(t,x,\omega_{r+1}^{(0)}(t,x)+\Delta\omega_{r+1}) - f_i(t,x,\omega_{r+1}^{(0)}(t,x)) \equiv\\
&\qquad \equiv \Delta_{\omega_{r+1}} f_i(t,x,\omega_{r+1}) .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Використовуючи функцію Ґріна $(G_0,G_1,\dots,G_b)$ неоднорідної крайової задачі, маємо зображення розв'язку задачі (9) і його похідних

$$
\begin{aligned}
&\Delta_q u_0 = \sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} G_i(t,x,\tau,\xi)\Delta_{\omega_{r+1}} f_i(\tau,\xi,\omega_{r+1})\,d_\xi S ,\\
&\Delta_q u_k = \sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} D_x^k G_i(t,x,\tau,\xi)\Delta_{\omega_{r+1}} f_i(\tau,\xi,\omega_{r+1})\,d_\xi S .
\end{aligned}
\tag{10}
$$

За допомогою формули Тейлора запишемо приріст функціонала $I(p,q)$, враховуючи, що $\Delta_q u_k\big|_{\Gamma} \equiv \Delta_q\omega_k$ :

$$
\begin{aligned}
\Delta I = &\int_0^T dt \int_{\mathcal{D}} \left\{ \sum_{k=0}^{r} \frac{\partial\mathcal{F}_1(t,x,\mathbf{u})}{\partial u_k}(\Delta_p u_k + \Delta_q u_k) + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial p}\Delta p + O(|\Delta\mathbf{u}|^2) \right\} dx +\\
&+ \int_0^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} \left\{ \sum_{k=0}^{r} \frac{\partial\mathcal{F}_2(t,x,\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_k}(\Delta_p\omega_k + \Delta_q\omega_k) + \right.\\
&\left. + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial q}\Delta q + O(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2) \right\} d_x S ,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

де $|\Delta\mathbf{u}|^2 = \sum_{k=0}^{r+1}\Delta u_k^2$, $|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 = \sum_{k=0}^{r+1}\Delta\omega_k^2$.

Підставляючи зображення $\Delta_p u_k$, $\Delta_q u_k$, визначені формулами (8), (10) у вираз (11) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо

$$\Delta I = \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{r} \Bigg[ \int_\tau^T dt \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_1(t,x,\mathbf{u})}{\partial u_k} D_x^k E(t,x,\tau,\xi)\, dx +$$

$$+ \int_\tau^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_2(t,x,\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_k} D_x^k E(t,x,\tau,\xi) d_x S \Bigg] \Delta u_{r+1} f_0(\tau,\xi,u_{r+1}) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{F}_1(t,x,\mathbf{u})}{\partial u_{r+1}} \Delta u_{r+1} \Bigg\} d\xi +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{r} \Bigg[ \sum_{i=1}^{b} \Bigg( \int_\tau^T dt \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_1(t,x,\mathbf{u})}{\partial u_k} D_x^k G_i(t,x,\tau,\xi)\, dx +$$

$$+ \int_\tau^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_2(t,x,\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_k} D_x^k G_i(t,x,\tau,\xi)\, d_x S \Bigg) \Bigg] \Delta_{\omega_{r+1}} f_i(\tau,\xi,\omega_{r+1}) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{F}_2(t,x,\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_{r+1}} \Delta\omega_{r+1} \Bigg\} d_\xi S +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{\mathcal{D}} O(|\Delta \mathbf{u}|^2)\, d\xi + \int_0^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} O(|\Delta \boldsymbol{\omega}|^2)\, d_\xi S =$$

$$= \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} \left[ \partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u},\lambda) \Delta u_{r+1} + O(|\Delta \mathbf{u}|^2) \right] d\xi +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} \left[ \partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}) \Delta\omega_{r+1} + O(|\Delta \boldsymbol{\omega}|^2) \right] d_\xi S\, .$$

Якщо $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ і $H_1(\mathbf{u},\lambda)$, $H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v})$ задовольняють умови теореми 1, то при досить малих $\Delta u_{r+1}$, $\Delta\omega_{r+1}$ маємо $\Delta I > 0$.

Нехай $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ – оптимальні керування, тобто $\Delta I > 0$. Перевіримо виконання умов теореми 1. Якщо $H_1(\mathbf{u},\lambda)$ і $H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v})$ не є монотонними за аргументами $u_{r+1}$ і $\omega_{r+1}$ відповідно, то $\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u},\lambda)$ і $\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v})$ – знакозмінні величини. Нехай $\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u},\lambda) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ і $\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u},\lambda) < 0$ в $Q^- = Q \backslash Q^+$, а $\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}) > 0$ на $\Gamma^+ \subset \Gamma$ і $\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}) < 0$ на $\Gamma^- = \Gamma \setminus \Gamma^+$. Використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I = \iint_{Q^+} \partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u},\lambda) \Delta u_{r+1}\, d\xi\, d\tau - \iint_{Q^-} \left| \partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u},\lambda) \right| \Delta u_{r+1}\, d\xi\, d\tau +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{\mathcal{D}} O(|\Delta \mathbf{u}|^2)\, d\xi + \iint_{\Gamma^+} \partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}) \Delta\omega_{r+1}\, d\tau\, d_\xi S -$$

$$- \iint_{\Gamma^-} \left| \partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}) \right| \Delta\omega_{r+1}\, d\tau\, d_\xi S + \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} O(|\Delta \boldsymbol{\omega}|^2)\, d_\xi S =$$

$$= \partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^+,\lambda^+) \iint_{Q^+} \Delta u_{r+1}\, d\xi\, d\tau -$$

$$- \left| \partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^-,\lambda^-) \right| \iint_{Q^-} \Delta u_{r+1}\, d\xi\, d\tau +$$

$$+ \partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^+, \mathbf{v}^+) \iint\limits_{\Gamma^+} \Delta\omega_{r+1} \, d\tau \, d_\xi S -$$
$$- \left| \partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^-, \mathbf{v}^-) \right| \iint\limits_{\Gamma^-} \Delta\omega_{r+1} \, d\tau \, d_\xi S +$$
$$+ \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} O(|\Delta\mathbf{u}|^2) \, d\xi + \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} O(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2) \, d_\xi S .$$

При досить малих $\Delta u_{r+1}$, $\Delta\omega_{r+1}$ знак $\Delta I$ визначається першими двома парами доданків. Різниця перших двох доданків змінює знак в залежності від величини значень $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, $\Delta u_{r+1}$. Різниця наступних двох доданків змінює знак в залежності від величин $\operatorname{mes} \Gamma^+$, $\operatorname{mes} \Gamma^-$, $\Delta\omega_{r+1}$. Отже, функціонал не досягає мінімуму. ◊

**Теорема 2.** *Нехай функції* $H_1(\mathbf{u}, \lambda)$, $H_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})$ *немонотонні за аргументами* $u_{r+1}$ *і* $\omega_{r+1}$ *відповідно. Для того щоб керування* $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ *і відповідний розв'язок* $u(t, x, u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ *крайової задачі* (2)–(4) *були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*

(***а***) *функція* $H_1(\mathbf{u}, \lambda)$ *за аргументом* $u_{r+1}$ *має у точці* $u_{r+1}^{(0)}$ *мінімальне значення;*

(***б***) *функція* $H_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})$ *за аргументом* $\omega_{r+1}$ *має у точці* $\omega_{r+1}^{(0)}$ *мінімальне значення;*

(***в***) *для довільного вектора* $(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$ *і* $(t, x) \in \overline{Q}$ *виконується нерівність*

$$\mathcal{K}_1(t, x; e) = \sum_{i,j=0}^{r+1} \partial^2_{u_i u_j} \mathcal{F}_1(t, x, \mathbf{u}^{(0)}) e_i e_j > 0 ;$$

(*г*) *для довільного вектора* $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \neq 0$ *і* $(t, x) \in \overline{\Gamma}$ *виконується нерівність*

$$\mathcal{K}_2(t, x; \nu) = \sum_{i,j=0}^{r+1} \partial^2_{\omega_i \omega_j} \mathcal{F}_2(t, x, \boldsymbol{\omega}^{(0)}) \nu_i \nu_j > 0 .$$

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Нехай керування $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ задовольняє умови (***а***) – (*г*). Покажемо його оптимальність. Позначимо через $\Delta u_{r+1}$, $\Delta\omega_{r+1}$ деякі допустимі прирости керувань $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$, через $\Delta u$ – відповідний приріст розв'язку задачі (2)–(4) $u(t, x, u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$.

На підставі формул (8), (10) знаходимо приріст функціонала $I(p, q)$:

$$\Delta I = \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} \left[ \partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda) \Delta u_{r+1} + \frac{1}{2} \left( \mathcal{K}_1(t, x; \Delta u) + O(|\Delta\mathbf{u}|^{2+\alpha}) \right) \right] d\xi +$$
$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} \left[ \partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \mathbf{v}) \Delta\omega_{r+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left( \mathcal{K}_2(t, x; \Delta\omega) + O(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^{2+\alpha}) \right) \right] d_\xi S . \qquad (12)$$

Оцінимо $\Delta I$ знизу, враховуючи, що $\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda) = 0$, $\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \mathbf{v}) = 0$ за умовами (***а***), (***б***) теореми 2. Позначимо $\delta_1 = \inf\limits_{|\xi|=1} \mathcal{K}_1(t, x; \xi)$, $\delta_2 = \inf\limits_{|\eta|=1} \mathcal{K}_2(t, x; \eta)$. За умовою (***в***) $\delta_1 > 0$ для всіх $(t, x) \in \overline{Q}$, а за умовою (*г*)

$\delta_2 > 0$ для всіх $(t,x) \in \bar{\Gamma}$. Тому, враховуючи умову гельдеровості других похідних функцій $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $f_0$, $f_i$ за змінними $u_i$, $\omega_j$, маємо, що $\Delta I > 0$.

*Необхідність.* Нехай $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ – оптимальні, тобто $\Delta I(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)}) > 0$. Перевіримо виконання умов (***а***) – (***г***) теореми 2. Якщо $\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda) \neq 0$, $\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \mathbf{v}) \neq 0$, то, вибираючи досить малі різні за знаком в області $\bar{Q}$ прирости $\Delta u_{r+1}$ і різні за знаком в області $\bar{\Gamma}$ прирости $\Delta\omega_{r+1}$, із формули

$$\Delta I = \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} \left[\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda)\Delta u_{r+1} + O(|\Delta\mathbf{u}|^2)\right] d\xi +$$
$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} \left[\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \mathbf{v})\Delta\omega_{r+1} + O(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2)\right] d_\xi S$$

одержимо, що $\Delta I$ змінює знак в залежності від знаків величин $\Delta u_{r+1}$, $\Delta\omega_{r+1}$. Це суперечить наявності мінімуму функціонала $I(u_{r+1}, \omega_{r+1})$ у точці $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$.

Визначимо знак функцій $\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}, \lambda)$ і $\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})$ в околах значень $u_{r+1}^{(0)}$ і $\omega_{r+1}^{(0)}$ відповідно. Запишемо приріст $\Delta I$ у вигляді

$$\Delta I = \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} \partial_{u_{r+1}} H_1(u_0, u_1 \ldots, u_r, u_{r+1} + \mu_1 \Delta u_{r+1}, \lambda)\Delta u_{r+1}\, d\xi +$$
$$+ \int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} O(|\Delta\mathbf{u}|^2)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} \partial_{\omega_{r+1}} H_2(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1} + \mu_2\Delta\omega_{r+1}, \mathbf{v})\Delta\omega_{r+1}\, d_\xi S +$$
$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} O(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2)\, d_\xi S ,$$

де $\mu_1 \in (0,1)$, $\mu_2 \in (0,1)$.

При досить малих $\Delta u_{r+1}$ і $\Delta\omega_{r+1}$ із умови $\Delta I > 0$ випливає, що

$$\partial_{u_{r+1}} H_1(u_0, \ldots, u_r, u_{r+1} + \mu_1\Delta u_{r+1}, \lambda)\Delta u_{r+1} > 0 ,$$

$$\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\omega_0, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1} + \mu_2\Delta\omega_{r+1}, \mathbf{v})\Delta\omega_{r+1} > 0 .$$

Тобто $\partial_{u_{r+1}} H_1 < 0$ при $u_{r+1} < u_{r+1}^{(0)}$ і $\partial_{u_{r+1}} H_1 > 0$ при $u_{r+1} > u_{r+1}^{(0)}$, а також $\partial_{\omega_{r+1}} H_2 < 0$ при $\omega_{r+1} < \omega_{r+1}^{(0)}$ і $\partial_{\omega_{r+1}} H_2 > 0$ при $\omega_{r+1} > \omega_{r+1}^{(0)}$.

Тому при значенні $u_{r+1} = u_{r+1}^{(0)}$ функція $H_1(\mathbf{u}, \lambda)$ досягає мінімуму, а функція $H_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})$ досягає мінімуму при значенні $\omega_{r+1} = \omega_{r+1}^{(0)}$.

Якщо умови (***в***) і (***г***) не виконуються, то з формули (12) одержуємо $\Delta I \leq 0$, що неможливо.

Нехай $\mathcal{K}_1(t,x;\Delta u) > 0$ в області $Q^+$ і $\mathcal{K}_1(t,x;\Delta u) < 0$ в області $Q^- = Q \backslash Q^+$, $\mathcal{K}_2(t,x;\Delta\omega) > 0$ в області $\Gamma^+$ і $\mathcal{K}_2(t,x;\Delta\omega) < 0$ в області $\Gamma^- = \Gamma \backslash \Gamma^+$.

Використовуючи теорему про середнє, для приросту $\Delta I$ маємо

$$\Delta I = \frac{1}{2}\mathcal{K}_1(t^+, x^+; \Delta u^+)\,\mathrm{mes}\,Q^+ - \frac{1}{2}\left|\mathcal{K}_1(t^-, x^-; \Delta u^-)\right|\mathrm{mes}\,Q^- +$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{K}_2(\tau^+, y^+; \Delta\omega^+)\,\mathrm{mes}\,\Gamma^+ - \frac{1}{2}\left|\mathcal{K}_2(\tau^-, y^-; \Delta\omega^-)\right|\mathrm{mes}\,\Gamma^- +$$

$$+\int_0^T d\tau \int_{\mathcal{D}} O(|\Delta\mathbf{u}|^{2+\alpha})\,d\xi + \int_0^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} O(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^{2+\alpha})\,d_\xi S\,.$$

При досить малих $\Delta u_{r+1}$, $\Delta\omega_{r+1}$ знак $\Delta I$ визначається першими чотирма членами суми. Різниця цих членів змінює знак залежно від величин значень $\mathrm{mes}\,Q^\pm$, $\mathrm{mes}\,\Gamma^\pm$. Отже, при знакозмінних величинах $\mathcal{K}_1(t, x; \Delta u)$ і $\mathcal{K}_2(t, x; \Delta\omega)$ функціонал $I(u_{r+1}, \omega_{r+1})$ не досягає мінімуму.

Існування $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ встановлюємо таким чином. Нехай $(u_{r+1}^{(0)}, \omega_{r+1}^{(0)})$ – оптимальні, тоді $\partial_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda) = 0$, $\partial_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \mathbf{v}) = 0$ і $\partial^2_{u_{r+1}} H_1(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda) > 0$, $\partial^2_{\omega_{r+1}} H_2(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \mathbf{v}) > 0$.

Застосовуючи теорему про неявну функцію, одержимо

$$u_{r+1}^{(0)} = \Phi_1(u_0^{(0)}, \ldots, u_r^{(0)}, \lambda)\,,$$

$$\omega_{r+1}^{(0)} = \Phi_2(\omega_0^{(0)}, \ldots, \omega_r^{(0)}, \mathbf{v})\,. \tag{13}$$

Використовуючи функцію Ґріна, формули (5), (13), поставимо у відповідність задачі (1)–(4) систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_0 = \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{D}} G_0(t, x, \tau, \xi) f_0(\tau, \xi, \Phi_1)\,d\xi + \int_{\mathcal{D}} G_0(t, x, 0, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} G_i(t, x, \tau, \xi) f_i(\tau, \xi, \Phi_2)\,d_\xi S\,,$$

$$u_k = \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{D}} D_x^k G_0(t, x, \tau, \xi) f_0(\tau, \xi, \Phi_1)\,d\xi + \int_{\mathcal{D}} D_x^k G_0(t, x, 0, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int_0^t d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} D_x^k G_i(t, x, \tau, \xi) f_i(\tau, \xi, \Phi_2)\,d_\xi S\,,$$

$$\lambda(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^{r}\int_\tau^T dt \left\{ \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_1(t, x, u_0, \ldots, u_r, \Phi_1)}{\partial u_k} D_x^k E(t, x, \tau, \xi)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_2(t, x, \omega_0, \ldots, \omega_r, \Phi_2)}{\partial \omega_k} D_x^k E(t, x, \tau, \xi)\,d_x S \right\},$$

$$v_i(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^{r}\int_\tau^T dt \left\{ \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_1(t, x, u_0, \ldots, u_r, \Phi_1)}{\partial u_k} D_x^k G_i(t, x, \tau, \xi)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{F}_2(t, x, \omega_0, \ldots, \omega_r, \Phi_2)}{\partial \omega_k} D_x^k G_i(t, x, \tau, \xi)\,d_x S \right\},$$

$$u_k\big|_\Gamma = \omega_k\,, \qquad k \in \{1, \ldots, r\}, \qquad i \in \{1, \ldots, b\}\,. \tag{14}$$

Розв'язок системи (14) знаходимо методом послідовних наближень.

**Зауваження.** Використовуючи методику доведення теорем 1, 2, можна встановити умови існування розв'язку задачі (1)–(4) у випадку монотонності однієї із функцій $H_1$, $H_2$ за аргументами $u_{r+1}$ і $\omega_{r+1}$ відповідно і немонотонності іншої.


1. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина общих неоднородных граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем / АН УССР. Ин-т математики. – Препр. – Киев, 1968. – 52 с.
4. *Ильин В. А., Мойсеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени $T$ управления упругими граничными силами на двух концах струны // Докл. РАН. – 2007. – **417**, № 4. – С. 456–463.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 414 с.
6. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – Москва: Наука, 1975. – 478 с.
7. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
8. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
9. *Majewski M.* On the existence of optimal solutions to an optimal control problem // J. Optimiz. Theory and Appl. – 2006. – **126**, No. 3. – P. 635–651.
10. *Rösch A., Tröltzsch F.* Existence of regular Lagrange multipliers for a nonlinear elliptic optimal control problem with pointwise control-state constraints // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – **45**, No. 2. – P. 548–564.
11. *Wang Gengsheng, Wang Lijuan, Yang Donghui.* Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – **45**, No. 2. – P. 532–547.
12. *Yanlei Kou, Shijin Ding.* Solutions of Ginzburg – Landau equations with weight and minimizers of the renormalized energy // Appl. Math. J. Chin. Univ. B. – 2007. – **22**, No. 1. – P. 48–60.



**ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

*Установлены необходимые и достаточные условия выбора оптимального управления системами, описываемыми параболической краевой задачей с ограниченными внутренним и граничным управлениями. Критерий качества задан суммой объемного и поверхностного интегралов.*

**PARABOLIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM AND OPTIMAL CONTROL PROBLEM**

*The necessary and sufficient conditions of choice of optimal control for systems described by parabolic boundary-value problem with limited internal and boundary controls have been ascertained. The criterion of quality is represented as the sum of volume and surface integrals.*



Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці



Одержано
26.02.09