УДК 517.95+511.72

І. Я. Савка

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, СТАЛІ КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОЇ ЛЕЖАТЬ НА ГЛАДКИХ КРИВИХ

Робота присвячена дослідженню нелокальної крайової задачі в циліндричній області для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, що належать гладким кривим. Розв'язність цієї задачі пов'язана із проблемою малих знаменників на гладких многовидах, які виникають при побудові розв'язку. Отримано умови єдиності та існування розв'язку задачі. Встановлено метричні оцінки знизу малих знаменників на гладких кривих.

Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними, взагалі, є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемами малих знаменників і є нестійкою стосовно як завгодно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області [7].

1. Постановка задачі. Надалі будемо використовувати такі позначення і функціональні простори:

$$x = (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{Z}^p, \qquad (k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p,$$

$$\tilde{k} = (1 + (k,k))^{1/2}, \qquad s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p, \qquad |s| = s_1 + \ldots + s_p,$$

$$\partial_t^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \qquad \partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1}\ldots\partial_{x_p}^{s_p}, \qquad \partial_{x_r}^{s_r} = \frac{\partial^{s_r}}{\partial x_r^{s_r}};$$

$\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ – p-вимірний тор, $\mathcal{D} = (0,T)\times\Omega_p$, $T > 0$;

$\boldsymbol{T}(\Omega_p)$ – простір тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \exp(ik,x)$;

$\boldsymbol{T}'(\Omega_p)$ – простір узагальнених 2π-періодичних функцій ($\boldsymbol{T}'(\Omega_p)$ – простір, спряжений до простору $\boldsymbol{T}(\Omega_p)$);

$H_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір Соболєва 2π-періодичних функцій, отриманих поповненням множини $\boldsymbol{T}(\Omega_p)$ за нормою $\|\cdot\|_{H_q(\Omega_p)}$, яка породжується скалярним добутком

$$(\varphi,\psi)_{H_q(\Omega_p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q}\varphi_k\bar{\psi}_k,$$

$H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial_t^j u(t,\cdot)$, $j = 0,1,\ldots,n$, належать простору $H_{q-j}(\Omega_p)$ і неперервні на відрізку $[0,T]$ у цьому просторі; норма в просторі $H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$ визначається формулою

$$\|u\|^2_{H_q^n(\bar{\mathcal{D}})} = \sum_{j=0}^n \max_{t\in[0,T]} \left\|\partial_t^j u(t,\cdot)\right\|^2_{H_q(\Omega_p)}.$$

Простори $H_q(\Omega_p)$ утворюють за параметром $q \in \mathbb{R}$ шкалу гільбертових просторів $\{H_q(\Omega_p)\}_{q\in\mathbb{R}}$. Шкалу банахових просторів $\{H_q^n(\bar{\mathcal{D}})\}_{q\in\mathbb{R}}$ утворюють також простори $H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$.

В області $\mathcal{D}$ змінних (t,x) розглянемо задачу для нормального диференціального рівняння

$$L(a,\partial_t,\partial_x)u \equiv \partial_t^n u + a_1\partial_{x_1}^n u + \ldots + a_p\partial_{x_p}^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x)\partial_t^{n-j}u = 0 \qquad (1)$$

з нелокальними двоточковими умовами

$$L_j(\mu)u \equiv \mu_1\partial_t^{j-1}u\,|_{t=0} - \mu_2\partial_t^{j-1}u\,|_{t=T} = \varphi_j, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad (2)$$

де

$$A_j(\partial_x) = \sum_{|s|\le j} A_s^j\partial_x^s,$$

$a = (a_1,\ldots,a_p)$, $\mu = (\mu_1,\mu_2)$, φ_j – довільні задані функції із просторів, які належать шкалі $\{H_q(\Omega_p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, $u = u(t,x)$ – шукана функція.

Коефіцієнти $a_1,\ldots,a_p$, A_s^j, μ_1 і μ_2 задачі (1), (2) є дійсними числами, причому вважаємо, що A_s^j є фіксованими числами, а вектори a і μ змінюються уздовж гладких кривих.

Простір $\mathbb{R}^{p+2}$, до якого належать пари (a,μ), називаємо *простором даних*.

Означення 1. Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u \in H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$, яка для $\forall v \in \boldsymbol{T}(\Omega_p)$ задовольняє в усіх точках відрізка $[0,T]$ умови

$$(Lu,v)_{H_0(\Omega_p)} = 0,$$

$$(L_ju - \varphi_j, v)_{H_0(\Omega_p)} = 0, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad (3)$$

де $L \equiv L(a,\partial_t,\partial_x)$, $L_j \equiv L_j(\mu)$.

2. Побудова формального розв'язку, умови єдиності. Побудуємо формальний розв'язок задачі (1), (2) і встановимо необхідні та достатні умови його єдиності. Розв'язок u задачі (1), (2) як функція з $H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$ зображається рядом Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(ik,x), \qquad (4)$$

де $u_k(t)$ – функція, неперервно диференційовна n разів на $[0,T]$.

Праві частини φ_j умов (2) за припущенням мають такий вигляд:

$$\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{jk}\exp(ik,x), \qquad j = 1,\ldots,n. \qquad (5)$$

З умов (3) отримаємо, що кожна функція $u_k = u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком двоточкової нелокальної задачі для звичайних диференціальних рівнянь

$$L(a,d/dt,ik)u_k = 0, \qquad (6)$$

$$L_j(\mu)u_k = \varphi_{jk}, \qquad j = 1,\ldots,n. \qquad (7)$$

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно встановити існування розв'язків задач (6), (7), а для єдиності – необхідно і достатньо встановити єдиність розв'язку задачі (6), (7) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$.

У позначеннях

$$v_k(t) = \mathrm{col}\left(u_k(t), \frac{du_k(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u_k(t)}{dt^{n-1}}\right),$$

$$\varphi_k = \mathrm{col}(\varphi_{1k},\ldots,\varphi_{nk}), \qquad \boldsymbol{L}_k(a) = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ \boldsymbol{L}_{nk}(a) & \tilde{\boldsymbol{L}}_k(a) \end{pmatrix},$$

де E_m – одинична матриця порядку m,

$$\boldsymbol{L}_{nk}(a) = -i^n \sum_{j=1}^{p} a_j k_j^n - A_n(ik), \qquad \tilde{\boldsymbol{L}}_k(a) = \left(-A_{n-1}(ik)\ldots - A_1(ik)\right),$$

задача (6), (7) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = \boldsymbol{L}_k(a)v_k(t), \tag{8}$$

$$\mu_1 v_k(0) - \mu_2 v_k(T) = \varphi_k. \tag{9}$$

Загальний розв'язок рівняння (8) зображається формулою

$$v_k(t) = e^{\boldsymbol{L}_k(a)t}C(k), \tag{10}$$

де $C(k)$ – довільний стовпець сталих. З умови (9) отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення вектора $C(k)$:

$$\left[\mu_1 E_n - \mu_2 e^{\boldsymbol{L}_k(a)T}\right]C(k) = \varphi_k, \tag{11}$$

яка має єдиний розв'язок, якщо визначник цієї системи відмінний від нуля.

Отже, задача (1), (2) має єдиний розв'язок тоді й тільки тоді, коли є невиродженою матриця $\mu_1 E_n - \mu_2 e^{\boldsymbol{L}_k(a)T}$. Звідси випливає таке твердження про єдиність розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *із простору* $H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$ *необхідно та достатньо виконання умови*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \det\left[\mu_1 E_n - \mu_2 e^{\boldsymbol{L}_k(a)T}\right] \neq 0. \tag{12}$$

Умова (12) теореми виконується, якщо $\mu_1 = 0$ або $\mu_2 = 0$ і не виконується при $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Якщо $\mu_2 \neq 0$, то ця умова означає, що число μ_1/μ_2 не є власним значенням матриці $e^{\boldsymbol{L}_k(a)T}$ для жодного $k \in \mathbb{Z}^p$.

Із єдиності розв'язку $v_k(t)$ задачі (8), (9) випливає існування цього розв'язку, який згідно з формулами (10), (11) має вигляд

$$v_k(t) = e^{\boldsymbol{L}_k(a)t}\left[\mu_1 E_n - \mu_2 e^{\boldsymbol{L}_k(a)T}\right]^{-1}\varphi_k. \tag{13}$$

У протилежному випадку розв'язок задачі (1), (2) не існує для деякого лінійного підпростору $\mathbb{C}^n$ векторів φ_k, а для всіх інших векторів φ_k існує безліч розв'язків.

Якщо розв'язок задачі (1), (2) існує і є єдиним, то він зображається рядом (4), де функція $u_k(t)$ є першою компонентою вектора $v_k(t)$ із формули (13).

За умов єдиності (12) побудуємо розв'язок задачі (6), (7) у вигляді, зручному для оцінювання.

Нехай $\lambda_1(a,k),\ldots,\lambda_n(a,k)$ – корені характеристичного рівняння

$$\mathcal{L}(a,\lambda,ik) = 0. \tag{14}$$

Відомо, що корені $\lambda_\ell(a,k)$ прості [2] для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^p$) векторів a, є власними значеннями матриці $\boldsymbol{L}_k(a)$ і справджують нерівність

$$|\lambda_\ell(a,k)| \leq \text{const}\cdot\tilde{k}, \qquad \ell = 1,\ldots,n.$$

де стала не залежить від k.

Отже, для майже всіх векторів a розв'язок задачі (6), (7) зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{\ell=1}^{n} c_{\ell k} e^{\lambda_\ell(a,k)t}, \tag{15}$$

де коефіцієнти $c_{\ell k}$ визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{\ell=1}^{n} \left(\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right) \lambda_\ell^{j-1}(a,k) c_{\ell k} = \varphi_{jk}, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{16}$$

За формулами Крамера

$$c_{\ell k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{\ell+j} \Delta_{j\ell}(a,\mu,k)}{\Delta(a,\mu,k)} \varphi_{jk}, \tag{17}$$

де визначник $\Delta(a,\mu,k)$ системи (16) зображається формулою

$$\Delta(a,\mu,k) = \prod_{i=1}^{n} \left(\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_i(a,k)T}\right) \prod_{1\le\alpha<\beta\le n} \left(\lambda_\beta(a,k) - \lambda_\alpha(a,k)\right),$$

$\Delta_{j\ell}(a,\mu,k)$ – мінор, який отримується із визначника $\Delta(a,\mu,k)$ викреслюванням ℓ-го стовпця та j-го рядка. Мінор $\Delta_{j\ell}(a,\mu,k)$ обчислюється за формулою

$$\Delta_{j\ell}(a,\mu,k) =$$

$$= \prod_{\substack{i=1,\\ i\ne\ell}}^{n} \left(\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_i(a,k)T}\right) \prod_{\substack{1\le\alpha<\beta\le n\\ \alpha\ne\ell,\beta\ne\ell}} (\lambda_\beta(a,k) - \lambda_\alpha(a,k)) S_{n-j}[\lambda_\ell(a,k)], \tag{18}$$

де $S_q[\lambda_\ell(a,k)]$ – сума всіх можливих добутків елементів

$\lambda_1(a,k), \dots, \lambda_{\ell-1}(a,k), \lambda_{\ell+1}(a,k), \dots, \lambda_n(a,k)$

по q штук у кожному добутку, причому $S_0[\lambda_\ell(a,k)] = 1$.

Із рівностей (15), (17), (18) маємо формулу для розв'язку задачі (6), (7):

$$u_k(t) = \sum_{\ell,j=1}^{n} \frac{(-1)^{n+j} S_{n-j}[\lambda_\ell(a,k)] e^{\lambda_\ell(a,k)t}}{\left(\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right) \mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)} \varphi_{jk}, \tag{19}$$

де

$$\mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik) = \prod_{i=1,i\ne\ell}^{n} \left(\lambda_\ell(a,k) - \lambda_i(a,k)\right).$$

3. Існування розв'язку задачі (1), (2), проблема малих знаменників і метричний підхід. Якщо виконується умова єдиності (12), то розв'язок задачі (1), (2) зображається формулою

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{\ell,j=1}^{n} \frac{(-1)^{n+j} S_{n-j}[\lambda_\ell(a,k)]\, e^{\lambda_\ell(a,k)t+(ik,x)}}{\left(\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right) \mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)} \varphi_{jk}. \tag{20}$$

Для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ функція (20) належить до простору узагальнених функцій $\boldsymbol{T}'(\Omega_p)$ і за означенням 1 є розв'язком задачі (1), (2), якщо $u \in H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$.

Із формули (19) випливають нерівності

$$\left|\frac{\partial^r u_k(t)}{\partial t^r}\right| \le \text{const} \cdot \sum_{\ell,j=1}^{n} \frac{\left(1 + e^{\operatorname{Re}\lambda_\ell(a,k)T}\right) \tilde{k}^{n-j+r} \left|\varphi_{jk}\right|}{\left|\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right| \left|\mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)\right|}, \quad r = 0,\dots,n,$$

на підставі яких отримуємо оцінку для квадрата норми розв'язку:

$$\|u\|^2_{H^n_q(\bar{\mathcal{D}})} \le \mathrm{const} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{\ell,j=1}^{n} \frac{(1+e^{\mathrm{Re}\,\lambda_\ell(a,k)T})^2 \tilde{k}^{2(q+n-j)} \left|\varphi_{jk}\right|^2}{\left|\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right|^2 \left|\mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)\right|^2}. \qquad (21)$$

Подальші оцінки членів ряду (21) вимагають відповідного оцінювання знизу виразів

$$\left|\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right|, \qquad \left|\mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)\right|. \qquad (22)$$

Ці величини, взагалі кажучи, можуть бути як завгодно близькими до нуля. Тому вирази (22) називаються малими знаменниками задачі (1), (2), а в оцінюванні знизу цих малих знаменників полягає *проблема малих знаменників*.

Оскільки малі знаменники можуть призводити до розбіжності ряду у правій частині нерівності (21), то встановлення існування розв'язку u задачі (1), (2) вимагає якісного оцінювання малих знаменників.

Для розв'язання проблеми малих знаменників застосовують метричний підхід [1, 5, 13, 15]. Ідея використання такого підходу в нашому випадку полягає в розгляді не окремої (з фіксованими векторами a та μ) задачі (1), (2), а множини таких задач. Елементом цієї множини є задача із фіксованими даними a та μ. Вважаємо, що a та μ належать певній області O у просторі даних. Оскільки оцінки малих знаменників на всій області O в загальному не існує, то такі оцінки (а, отже, і розв'язність задачі (1), (2)) встановлюються для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) точок області O або для всіх точок підобласті, міра якої не перевищує довільного наперед заданого числа.

За допомогою метричного підходу встановлено [6, 7] оцінки знизу малих знаменників (22) у припущенні *незалежності* параметрів μ_1, μ_2 і $a_1, \ldots, a_p$ задачі.

Теорема 2 [7]. *Для довільних $\varepsilon > 0$ і $\gamma > p$ існує така множина B_ε, $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^2} B_\varepsilon \le \varepsilon$, що для всіх векторів $\mu \in \Pi \setminus B_\varepsilon$ і $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується оцінка*

$$\left|\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(k,a)T}\right| \ge \varepsilon C_3 \tilde{k}^{-\gamma}\left(1 + e^{\mathrm{Re}\,\lambda_\ell(k,a)T}\right), \qquad \ell = 1,\ldots,n, \qquad (23)$$

де Π – фіксований прямокутник, стала $C_3 > 0$ не залежить від k.

Теорема 3 [6]. *Для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^p$) векторів a нерівності*

$$\left|\mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)\right| \ge \tilde{k}^{-\gamma}, \qquad \ell = 1,\ldots,n, \qquad (24)$$

при $\gamma > p(n-1)/2$ виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для залежних параметрів аналоги таких теорем доведено у **п. 5**.

4. Множини (многовиди) задач у просторі даних. Нехай компоненти векторів a чи μ є *залежними*. Тоді ці вектори можуть утворювати множини нульової міри у просторі даних, які не розрізняються теоремами 2 і 3. Наприклад, якщо оцінка виконується для майже всіх векторів на площині, то вона може не виконуватись для всіх точок деякої прямої.

Якщо пари (a,μ) належать деякому многовиду O розмірності $\dim O < p+2$, то питання опису і характеризації у термінах теорії міри множини із O, для якої виконуються оцінки (23) та (24), є досить складним і недослідженим. Воно тісно пов'язане із теорією діофантових наближень на многовидах [10–12, 14], яка вивчається у метричній теорії чисел.

На підставі цього при застосуванні метричного підходу для оцінки малих знаменників можна розглядати різні множини задач (1), (2) залежно від вибору многовиду O, до якого належать точки (a,μ). При цьому кожній задачі (1), (2) відповідає єдина точка (a,μ) і, навпаки.

Розглянемо лише ті випадки, коли компоненти векторів a і μ лежать на гладких кривих $\mathcal{M}$ і $\mathcal{K}$ відповідно.

Розрізняємо задання кривих $\mathcal{M}$ і $\mathcal{K}$ параметричне

$$\mathcal{M} = \{a(\tau) : \tau \in I'\}, \qquad \mathcal{K} = \{\mu(\tau) : \tau \in I''\},$$

де τ – параметр параметризації, I' та I'' – довільні відрізки параметризації, і неявне

$$\mathcal{M} = \{a \in V : G(a) = 0\}, \qquad \mathcal{K} = \{\mu \in U : F(\mu) = 0\},$$

де $G(a) \equiv (G^1(a),\dots,G^{p-1}(a))$ – визначена вектор-функція в обмеженому p-вимірному околі $V = V(a^0)$ фіксованої точки a^0 кривої $\mathcal{M}$, а $F(\mu)$ – задана скалярна функція в обмеженому двовимірному околі $U = U(\mu^0)$ фіксованої точки μ^0 кривої $\mathcal{K}$.

Не обмежуючи загальності, надалі вважаємо, що $I \equiv I' = I''$.

Розглядаємо такі випадки утворення множин задач (1), (2):

1°) $O = V \times U$, ***2***°) $O = V \times \mathcal{K}$,

3°) $O = \mathcal{M} \times U$, ***4***°) $O = \mathcal{M} \times \mathcal{K}$.

У випадку ***1***°) многовид має розмірність $\dim O = p + 2$, тобто параметри $a_1,\dots,a_p$, μ_1, μ_2 задачі (1), (2) є незалежними; у випадку ***2***°) маємо $\dim O = p+1$ і залежними є лише μ_1 і μ_2; у випадку ***3***°) – $\dim O = 3$ і залежними між собою є $a_1,\dots,a_p$; у випадку ***4***°) обмеження накладаються на всі параметри: окремо на $a_1,\dots,a_p$ і окремо на μ_1, μ_2. Причому у випадку ***4***°) $\dim O = 2$, тобто множина O є декартовим добутком двох кривих (одна – у просторі $\mathbb{R}^p$, друга – у просторі $\mathbb{R}^2$).

Для випадку ***1***°) справджуються теореми 2 і 3, інші випадки вивчаються у наступному пункті.

Цікавими є й інші випадки утворення множин задач (1), (2), зокрема, коли обмеження накладаються на параметри a та μ одночасно.

Введемо міру Лебеґа на гладкій кривій K, де

$$K = \{x(\tau) = (x_1(\tau),\dots,x_p(\tau)) : \tau \in I\},$$

за таким означенням.

Означення 2. Під *мірою Лебеґа* mes_K *на кривій* K множини

$$S = \{x(\tau) : \tau \in \mathcal{E} \subset I\}$$

розуміємо число

$$\mathrm{mes}_K S = \int_{\mathcal{E}} \sqrt{(x_1'(\tau))^2 + \ldots + (x_p'(\tau))^2}\, d\tau,$$

де $\mathcal{E}$ – вимірна підмножина відрізка I.

5. Оцінка малих знаменників (22) на гладких кривих.

5.1. Вектор μ ***належить гладкій кривій.*** Вважаємо, що вектор a – фіксований. Розглянемо окремо випадки параметричного та неявного задання кривої $\mathcal{K}$.

5.1.1. *Параметрично задана крива.* Нехай вектор μ, складений із коефіцієнтів μ_1, μ_2 нелокальних умов (2), лежить на гладкій кривій $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} = \{\mu(\tau) : \tau \in I\}. \tag{25}$$

Для доведення метричних оцінок знизу виразів

$$\left|\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau)e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right|, \qquad \ell=1,\dots,n,$$

що залежать від параметра τ, використаємо допоміжну лему.

Лема 1. *Нехай* $f(\tau,z)=\mu_1(\tau)+z\mu_2(\tau)$, $\mu_1,\mu_2\in C^1(I,\mathbb{R})$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, *а* $W_\mu(\tau)$ *– вронскіан системи функцій* $\{\mu_1(\tau),\mu_2(\tau)\}$. *Якщо* $W_\mu(\tau)\neq 0$ *і* $\mu_2(\tau)\neq 0$ *для будь-якого* τ *із відрізка* I, *то для довільного* ε, $0<\varepsilon<1/2$, *виконується оцінка*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{\tau\in I:|f(\tau,z)|<C_4(1+|z|)\varepsilon\}\le 6\varepsilon,$$

де

$$C_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\min\{C_5,\min_{\tau\in I}|\mu_2(\tau)|\}, \qquad C_5=\|\mu\|^{-1}_{C^1(I)}\min_{\tau\in I}\left|W_\mu(\tau)\right|.$$

Д о в е д е н н я. Позначимо

$$f_1(\tau,z)\equiv\operatorname{Re}f(\tau,z)=\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau)\operatorname{Re}z,$$

$$f_2(\tau,z)\equiv\operatorname{Im}f(\tau,z)=\mu_2(\tau)\operatorname{Im}z$$

і введемо у розгляд множини

$$A_1=\{\tau\in I:|f_1(\tau,z)|<\varepsilon C_5(1+|\operatorname{Re}z|)\}=$$

$$=\{\tau\in I:|f_1(\tau,z)|+|f_2(\tau,z)|<\varepsilon C_5(1+|\operatorname{Re}z|)+|\mu_2(\tau)||\operatorname{Im}z|\},$$

$$A_2=\{\tau\in I:|f_1(\tau,z)|+|f_2(\tau,z)|<\varepsilon C_5(1+|\operatorname{Re}z|)+\varepsilon\min_{\tau\in I}|\mu_2(\tau)||\operatorname{Im}z|\},$$

$$A_3=\{\tau\in I:|f(\tau,z)|<\varepsilon C_4(1+|z|)\},$$

де $0<\varepsilon<1/2$.

Із нерівностей

$$C_4\le\frac{C_5}{\sqrt{2}}, \qquad C_4\le\frac{|\mu_2(\tau)|}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{|f_1(\tau,z)|+|f_2(\tau,z)|}{\sqrt{2}}\le|f(\tau,z)|, \qquad |z|\le|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|$$

випливають такі включення:

$$A_3\subset A_2\subset A_1.$$

Оскільки $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}A_3\le\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}A_1$, то для оцінки зверху міри множини A_3 достатньо оцінити міру множини A_1.

Із системи алгебричних рівнянь

$$\mu_1(\tau)\cdot 1+\mu_2(\tau)\cdot\operatorname{Re}z=f_1(\tau,z),$$

$$\frac{d}{d\tau}\mu_1(\tau)\cdot 1+\frac{d}{d\tau}\mu_2(\tau)\cdot\operatorname{Re}z=\frac{d}{d\tau}f_1(\tau,z)$$

за формулами Крамера в умовах леми отримаємо рівності

$$\left|W_\mu(\tau)\right|=\left|W^1(\tau,z)\right|, \qquad |\operatorname{Re}z|\cdot\left|W_\mu(\tau)\right|=\left|W^2(\tau,z)\right|, \tag{26}$$

де

$$W^1(\tau,z)=\begin{vmatrix} f_1(\tau,z) & \mu_2(\tau)\\ \frac{d}{d\tau}f_1(\tau,z) & \frac{d}{d\tau}\mu_2(\tau)\end{vmatrix}, \quad W^2(\tau,z)=\begin{vmatrix} \mu_1(\tau) & f_1(\tau,z)\\ \frac{d}{d\tau}\mu_1(\tau) & \frac{d}{d\tau}f_1(\tau,z)\end{vmatrix}. \tag{27}$$

Додавши почленно рівності (26) та оцінивши зверху визначники (27), отримаємо нерівність

$$\left|W_\mu(\tau)\right|(1+|\operatorname{Re}z|)\le\|\mu\|_{C^1(I)}\max\left\{|f_1(\tau,z)|,\left|\frac{d}{d\tau}f_1(\tau,z)\right|\right\}, \tag{28}$$

звідки

$$0 < C_5(1+|\mathrm{Re}\, z|) \le \max\left\{ |f_1(\tau,z)|, \left| \frac{d}{d\tau} f_1(\tau,z) \right| \right\}. \tag{29}$$

Оскільки за умовами леми похідна $\left(\dfrac{\mu_1(\tau)}{\mu_2(\tau)}\right)' = \dfrac{W_\mu(\tau)}{\mu_2^2(\tau)}$ функції $\dfrac{\mu_1(\tau)}{\mu_2(\tau)}$ відмінна від нуля у кожній точці відрізка I, то функція $\dfrac{\mu_1(\tau)}{\mu_2(\tau)}$ – монотонна на I, а, отже, для будь-якого фіксованого параметра z функція $\dfrac{\mu_1(\tau)}{\mu_2(\tau)} + \mathrm{Re}\, z$ має на I не більше одного кореня. Тому кількість нулів функції $f_1(\tau,z)$ не перевищує одиниці.

На завершальному етапі доведення леми 1 використаємо таке твердження з роботи [8].

Лема 2 [8, с. 33]. *Нехай функція* $f \in C^1([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ *і нехай* f *має на інтервалі* (α,β) *не більше ніж* r *нулів. Якщо для всіх* $\tau \in (\alpha,\beta)$ *виконується нерівність*

$$\max\{|f(\tau)|, |f'(\tau)|\} > \delta_1 > 0,$$

то для довільного $\delta_2 < \delta_1/2$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \{\tau \in [\alpha,\beta] : |f(\tau)| < \delta_2\} \le 2(r+2)\delta_2/\delta_1.$$

Оскільки функція $f_1(\tau,z)$ задовольняє умови леми 2 при $\delta_1 = C_5(1+|\mathrm{Re}\, z|)$, $\delta_2 = C_5(1+|\mathrm{Re}\, z|)\varepsilon$, $r = 1$, то для довільного ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, отримаємо оцінку $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A_1 \le 6\varepsilon$, звідки $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A_3 \le 6\varepsilon$, що й треба було довести. ◊

Лему 1 узагальнимо на випадок наявності нулів функції μ_2 на відрізку I.

Лема 3. *Нехай* $f(\tau,z) = \mu_1(\tau) + z\mu_2(\tau)$, $\mu_1,\mu_2 \in C^1(I,\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $W_\mu(\tau) \ne 0$ *для* $\forall \tau \in I$. *Якщо функція* $\mu_2(\tau)$ *має на відрізку* I *рівно* N *нулів, то для довільного* ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, *виконується оцінка*

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \{\tau \in I : |f(\tau,z)| < C_4(1+|z|)\varepsilon\} \le 2(N+3)\varepsilon.$$

Доведення проводимо за схемою доведення леми 1 з урахуванням додатної кількості нулів функції $f_1(\tau,z)$.

Розіб'ємо відрізок I нулями функції $\mu_2(\tau)$ на проміжки. Таких проміжків буде не більше $N+1$. На кожному з цих проміжків рівняння $\dfrac{\mu_1(\tau)}{\mu_2(\tau)} = -\mathrm{Re}\, z$ має не більше одного кореня, а тому кількість нулів функції $f_1(\tau,z)$ не перевищує числа $N+1$.

Функція $f_1(\tau,z)$ задовольняє умови леми 2 при $\delta_1 = C_5(1+|\mathrm{Re}\, z|)$, $\delta_2 = C_5(1+|\mathrm{Re}\, z|)\varepsilon$ та $r = N+1$. Тоді для довільного ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, отримаємо оцінку $\mathrm{mes}\, A_1 \le 2(N+3)\varepsilon$, звідки випливає, що $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A_3 \le 2(N+3)\varepsilon$. ◊

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

(***i***) $\mu_1,\mu_2 \in C^1(I,\mathbb{R})$,

(***ii***) $W_\mu(\tau) \ne 0$ *та* $\mu_2(\tau) \ne 0$ *для будь-якого* τ *із відрізка* I.

Тоді для довільних чисел $\gamma > p$, $0 < \varepsilon < \min\{\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} I, 3nC_6\}$ *і фіксованого вектора* $a \in V$ *нерівності*

$$\left|\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau)e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right| \ge \frac{C_4}{6nC_6}\varepsilon\tilde{k}^{-\gamma}\left(1+e^{\operatorname{Re}\lambda_\ell(a,k)T}\right), \qquad \ell=1,\dots,n, \qquad (30)$$

виконуються для всіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ *і для всіх* $\tau\in I\setminus B_\varepsilon$, *де* B_ε *– залежна від* a *підмножина відрізка* I *з мірою Лебеґа* $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_\varepsilon\le\varepsilon$, C_4 *– стала з леми* 1, $C_6=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{-\gamma}$.

Д о в е д е н н я. Введемо множину B_ε таким чином:

$$B_\varepsilon=B_\varepsilon(a)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\bigcup_{\ell=1}^{n}B_\ell(a,k),$$

де $B_\ell(a,k)$ – множина тих $\tau\in I$, для яких при фіксованих ℓ, a та k виконується нерівність, обернена до нерівності (30).

Оскільки функція $f\left(\tau,e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right)$ як функція від τ задовольняє умови леми 1, то

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_\ell(a,k)\le\varepsilon\tilde{k}^{-\gamma}/(nC_6).$$

Із сигма-адитивності міри Лебеґа випливає оцінка для міри множини B_ε:

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_\varepsilon\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{\ell=1}^{n}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_\ell(a,k)=\frac{\varepsilon}{C_6}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{-\gamma}=\varepsilon,$$

тобто $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_\varepsilon\le\varepsilon$.

Якщо $\tau\in I\setminus B_\varepsilon$, то $\tau\notin B_\ell(a,k)$ для будь-якого $k\in\mathbb{Z}^p$ та $\ell\in\{1,\dots,n\}$, а тому справджується нерівність (30). Теорему доведено. ◊

Доведення оцінок (30) для функції μ_2, що має скінченну кількість нулів на відрізку I, проводиться аналогічно з використанням леми 3 замість леми 1.

5.1.2 *Неявно задана крива.* Розглянемо випадок неявно заданої кривої

$$\mathcal{K}=\{\mu\in U: F(\mu)=0\},$$

де $F(\mu)$ – задана функція в околі U точки μ^0 кривої $\mathcal{K}$.

Далі будемо використовувати теорему про неявну функцію.

Теорема 5 [3, с. 474]. *Якщо*

$$F\in C^1(U;\mathbb{R}), \qquad F'_{\mu_2}(\mu^0)\ne 0,$$

то існує прямокутний окіл $\tilde{I}_{\mu^0}=\tilde{I}_{\mu_1^0}\times\tilde{I}_{\mu_2^0}$ *точки* μ^0, $\mu^0\in\tilde{I}_{\mu^0}\subset U$, *і така функція* $f\in C^1(\tilde{I}_{\mu_1^0};\tilde{I}_{\mu_2^0})$, *що для будь-якої точки* $\mu\in\tilde{I}_{\mu^0}$

$$F(\mu)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu_2=f(\mu_1),$$

причому похідна функції $f(\mu_1)$ *у точці* $\mu_1\in I_{\mu_1^0}$ *обчислюється за формулою*

$$f'(\mu_1)=-\left.F'_{\mu_1}/F'_{\mu_2}\right|_{\mu_2=f(\mu_1)},$$

де $F'_{\mu_1}=\dfrac{\partial F(\mu)}{\partial\mu_1}$, $F'_{\mu_2}=\dfrac{\partial F(\mu)}{\partial\mu_2}$.

При виконанні умов теореми 5 рівняння $F(\mu)=0$ однозначно задає криву $\mathcal{K}$ у деякому околі I_{μ^0} точки μ^0. Отже, випадок неявного задання кривої локально зводиться до параметричного випадку.

Теорема 6. *Нехай*

$$F \in C^1(U;\mathbb{R}), \qquad F'_{\mu_2}(\mu^0) \neq 0\,, \tag{31}$$

$$\mu_1^0 F'_{\mu_1}(\mu^0) + \mu_2^0 F'_{\mu_2}(\mu^0) \neq 0, \qquad \mu_2^0 \neq 0\,. \tag{32}$$

Тоді існує такий прямокутник I_{μ^0}, *що* $I_{\mu^0} \subset U$, *і для довільних чисел* $\gamma > p$, $0 < \varepsilon < 3nC_6C_8$ *та фіксованого* $a \in V$ *нерівності*

$$\left|\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right| \geq \frac{C_7}{6nC_6C_8}\varepsilon\tilde{k}^{-\gamma}\left(1 + e^{\operatorname{Re}\lambda_\ell(a,k)T}\right), \qquad \ell = 1,\ldots,n\,, \tag{33}$$

виконуються для всіх $\mu \in \mathcal{K}_1 \backslash B_\varepsilon$ *і для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *де* $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \bigcap I_{\mu^0}$, $B_\varepsilon = B_\varepsilon(a)$ *– деяка множина з мірою Лебеґа на кривій* $\operatorname{mes}_{\mathcal{K}} B_\varepsilon \leq \varepsilon$, C_6 *– стала з теореми 4, а додатні сталі* C_7 *і* C_8 *визначаються за формулами*

$$C_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}\min\left\{C_9, \inf_{\mathcal{K}_1}|\mu_2|\right\},$$

$$C_8 = \sup_{\mathcal{K}_1}\left(1 + \left(\left|F'_{\mu_1}\right| / \left|F'_{\mu_2}\right|\right)^2\right)^{1/2},$$

$$C_9 = \frac{\inf_{\mathcal{K}_1}\left|\mu_1 F'_{\mu_1} + \mu_2 F'_{\mu_2}\right| / \left|F'_{\mu_2}\right|}{1 + \sup_{\mathcal{K}_1}\left(|\mu_1| + |\mu_2| + \left|F'_{\mu_1}\right| / \left|F'_{\mu_2}\right|\right)}.$$

Д о в е д е н н я. З умов (31), (32) і теореми 5 випливає, що існує прямокутник $I_{\mu^0} = I_{\mu_1^0} \times I_{\mu_2^0}$, $I_{\mu^0} \subset \tilde{I}_{\mu^0} \subset U$, і така функція $f \in C^1\left(I_{\mu_1^0}; I_{\mu_2^0}\right)$, що для будь-якої точки $\mu_1 \in I_{\mu_1^0}$ існує єдине $\mu \in \mathcal{K}_1$, причому

$$\mu_2 = f(\mu_1) \neq 0, \quad \mu_2' = -\left.F'_{\mu_1}/F'_{\mu_2}\right|_{\mu_2 = f(\mu_1)}, \quad \mu_1 F'_{\mu_1}(\mu) + \mu_2 F'_{\mu_2}(\mu) \neq 0\,. \tag{34}$$

Тому $\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T} = \mu_1 - f(\mu_1)e^{\lambda_\ell(a,k)T}$. Тепер оцінимо знизу на відрізку $I_{\mu_1^0}$ функцію $R_\ell(\mu_1,k)$, де $R_\ell(\mu_1,k) = \mu_1 - f(\mu_1)e^{\lambda_\ell(a,k)T}$.

Розглянемо $W_\mu(\mu_1) = \mu_1 f'(\mu_1) - f(\mu_1)$ – вронскіан системи функцій $\{\mu_1, f(\mu_1)\}$. Враховуючи формули (34), отримаємо

$$W_\mu(\mu_1) = -\left.(\mu_1 F'_{\mu_1} + \mu_2 F'_{\mu_2})/F'_{\mu_2}\right|_{\mu_2 = f(\mu_1)}. \tag{35}$$

Зауважимо, що з умов теореми та формул (34), (35) випливає, що для будь-якої точки μ_1 із відрізка $I_{\mu_1^0}$ справджуються нерівності

$$W_\mu(\mu_1) \neq 0, \qquad f(\mu_1) \neq 0\,. \tag{36}$$

Введемо множини

$$\tilde{B}_\ell(a,k) = \left\{\mu_1 \in I_{\mu_1^0} : \left|R_\ell(\mu_1,k)\right| < \varepsilon C_7(1 + e^{\operatorname{Re}\lambda_\ell(a,k)T})\tilde{k}^{-\gamma}/(6nC_6C_8)\right\},$$

$$B_\ell(a,k) = \left\{\mu \in \mathcal{K}_1 : \left|\mu_1 - \mu_2 e^{\lambda_\ell(a,k)T}\right| < \varepsilon C_7(1 + e^{\operatorname{Re}\lambda_\ell(a,k)T})\tilde{k}^{-\gamma}/(6nC_6C_8)\right\},$$

$$B_\varepsilon = B_\varepsilon(a) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p}\bigcup_{\ell=1}^{n} B_\ell(a,k).$$

Із (36) випливає, що функція $R_\ell(\mu_1,k)$ на відрізку $I_{\mu_1^0}$ задовольняє умови леми 1, тому для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ отримаємо оцінку зверху для міри множин $\tilde{B}_\ell(a,k)$, $\ell = 1,\dots,n$:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, \tilde{B}_\ell(a,k) \le \varepsilon \tilde{k}^{-\gamma}/(nC_6C_8).$$

Для кожного цілочисельного вектора k також маємо оцінку

$$\mathrm{mes}_{\mathcal{K}}\, B_\ell(a,k) = \int\limits_{\tilde{B}_\ell(a,k)} \sqrt{1+[f'(\mu_1)]^2}\, d\mu_1 \le C_8\, \mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, \tilde{B}_\ell(k) \le \varepsilon \tilde{k}^{-\gamma}/(nC_6),$$

звідки випливає нерівність

$$\mathrm{mes}_{\mathcal{K}}\, B_\varepsilon \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{mes}_{\mathcal{K}}\, B_\ell(a,k) = \frac{\varepsilon}{C_6} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-\gamma} = \varepsilon,$$

тобто $\mathrm{mes}_{\mathcal{K}}\, B_\varepsilon \le \varepsilon$.

Якщо $\mu \in \mathcal{K}_1 \setminus B_\varepsilon$, то для будь-якого $k \in \mathbb{Z}^p$ і $\ell \in \{1,\dots,n\}$ виконується нерівність (33), оскільки $\mu \notin B_\ell(a,k)$. Теорему доведено. ◊

Умова (31) теореми 6 означає, що μ^0 − некритична точка кривої $\mathcal{K}$, а умова (32) геометрично означає, що пряма $\dfrac{\mu_1}{\mu_1^0} = \dfrac{\mu_2}{\mu_2^0}$ не є дотичною до кривої $\mathcal{K}$ у точці μ^0.

Приклад 1. Нехай рівняння

$$F(\mu) \equiv \alpha_{11}\mu_1^2 - 2\alpha_{12}\mu_1\mu_2 + \alpha_{22}\mu_2^2 + 2\alpha_1\mu_1 + 2\alpha_2\mu_2 + \alpha_0 = 0$$

задає алгебраїчну криву 2-го порядку. Тоді умови теореми 6 на функцію F мають вигляд

$$\alpha_{22}\mu_2^0 - \alpha_{12}\mu_1^0 + \alpha_2 \ne 0, \qquad 2\alpha_1\mu_1^0 + 2\alpha_2\mu_2^0 + \alpha_0 \ne 0.$$

Приклад 2. Для будь-якого однорідного многочлена

$$F(\mu) \equiv \sum_{s_1+s_2=N} \alpha_{s_1s_2}\mu_1^{s_1}\mu_2^{s_2}, \qquad \alpha_{s_1s_2} \in \mathbb{R},$$

степеня N умова (32) теореми 6 не виконується, оскільки

$$\mu_1^0 F'_{\mu_1}(\mu^0) + \mu_2^0 F'_{\mu_2}(\mu^0) = NF(\mu^0) = 0.$$

5.2. Коефіцієнти $a_1,\dots,a_p$ рівняння (1) лежать на гладкій кривій. Враховуючи, що $\left|\lambda_j(k)\right| \le C_1\tilde{k}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, де стала $C_1 > 0$ не залежить від k, а також зображення для дискримінанта $D(a,k)$ многочлена $\mathcal{L}(a,\lambda,ik)$:

$$D(a,k) = \prod_{1\le\alpha<\beta\le n} (\lambda_\beta(a,k) - \lambda_\alpha(a,k))^2,$$

одержимо нерівність

$$\left|\mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)\right| \ge \frac{|D(a,k)|^{1/2}}{2(C_1\tilde{k})^{(n-1)(n-2)/2}}. \tag{37}$$

Тому для отримання оцінки знизу малого знаменника $\mathcal{L}'_\lambda(a,\lambda_\ell(a,k),ik)$ достатньо оцінити знизу дискримінант $D(a,k)$.

5.2.1. Параметрично задана крива. Нехай коефіцієнти $a_1,\dots,a_p$ рівняння (1) лежать на гладкій кривій $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} = \{a(\tau) = (a_1(\tau),\dots,a_p(\tau)) : \tau \in I\},$$

де τ − параметр параметризації, I − відрізок параметризації.

Скористаємось поняттям δ-нормальності кривої $\mathcal{M}$ щодо дискримінанта многочлена $\mathcal{L}(a,\lambda,ik)$.

Означення 3. Вектор $a = (a_1, \ldots, a_p)$ із $\mathbb{R}^p$ називають δ*-нормальним,* якщо для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|D(a,k)| \geq \tilde{k}^{-\delta}, \tag{38}$$

де $D(a,k)$ – дискримінант многочлена $\mathcal{L}(a,\lambda,ik)$ за змінною λ, $\delta \in \mathbb{R}$.

Будемо говорити, що деяка властивість виконана майже всюди на кривій $\mathcal{M}$, якщо вона виконана для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) точок τ із відрізка I.

Означення 4. Криву $\mathcal{M}$ називають δ*-нормальною*, якщо властивість δ-нормальності вектора $a(\tau)$ виконується майже скрізь на кривій $\mathcal{M}$.

Нехай $W_a(\tau)$ – вронскіан системи функцій $\{1, a_1(\tau), \ldots, a_p(\tau)\}$.

Із результів робіт [4, 9] випливає

Теорема 7. *Нехай* $a_1, \ldots, a_p \in C^{p+1}(I;\mathbb{R})$, $a = (a_1, \ldots, a_p)$. *Тоді, якщо*

$$\forall \tau \in I \qquad W_a(\tau) \neq 0,$$

то крива $\mathcal{M}$ *є* δ*-нормальною при* $\delta > (p^2 - n)(n-1)$.

5.2.2. *Неявно задана крива.* Для неявно заданої кривої встановлено результати про її локальну δ-нормальність, тобто δ-нормальність відповідних околів некритичних точок кривої.

Розглянемо спочатку випадок двох просторових змінних ($p = 2$), тобто розглянемо плоску криву $\mathcal{M}$.

Нехай a^0 – некритична точка кривої $\mathcal{M}$, тобто $G'_{a_2}(a^0) \neq 0$, а V – окіл в $\mathbb{R}^2$ точки a^0 і функція $G : V \to \mathbb{R}$ такі, що крива $\mathcal{M}$ зображується в цьому околі формулою

$$G(a) = 0. \tag{39}$$

Отже, коефіцієнти a_1, a_2 рівняння (1) пов'язані неявно рівністю (39).

Теорема 8. *Якщо функція* $G = G(a)$ *задовольняє умови*

$$G \in C^3(V;\mathbb{R}), \qquad G'_{a_2}(a^0) \neq 0, \tag{40}$$

$$\left(G''_{a_1a_1}[G'_{a_2}]^2 - 2G''_{a_1a_2}G'_{a_1}G'_{a_2} + G''_{a_2a_2}[G'_{a_1}]^2\right)\Big|_{a=a^0} \neq 0, \tag{41}$$

то існує прямокутник I_{a^0}, $I_{a^0} \subset V$, *у якому крива* $\mathcal{M}$ *є* δ*-нормальною при* $\delta > (4-n)(n-1)$, *іншими словами, окіл* $\mathcal{M} \cap I_{a^0}$ *точки* a^0 *на кривій* $\mathcal{M}$ *є* δ*-нормальним при* $\delta > (4-n)(n-1)$.

Д о в е д е н н я. З теореми про неявну функцію та умов (40), (41) випливає, що існує прямокутник $I_{a^0} = I_{a_1^0} \times I_{a_2^0}$, $a^0 \in I_{a^0} \subset U$, і така функція $f \in C^3(I_{a_1^0}; I_{a_2^0})$, що для будь-якої точки $a \in \mathcal{M} \cap I_a$

$$a_2 = f(a_1), \quad G'_{a_2} \neq 0, \quad G''_{a_1a_1}[G'_{a_2}]^2 - 2G''_{a_1a_2}G'_{a_1}G'_{a_2} + G''_{a_2a_2}[G'_{a_1}]^2 \neq 0. \tag{42}$$

Таким чином, криву $\mathcal{M}$ в околі I_{a^0} можна задати параметрично

$$\mathcal{M} \cap I_a = \{(\tau, f(\tau)) : \tau \in I_{a_1^0}\}.$$

Розглянемо вронскіан $W_a(\tau)$ системи функцій $\{1, \tau, f(\tau)\}$, який має вигляд

$$W_a(\tau) = f''(\tau) = -\left.\frac{G''_{a_1a_1}[G'_{a_2}]^2 - 2G''_{a_1a_2}G'_{a_1}G'_{a_2} + G''_{a_2a_2}[G'_{a_1}]^2}{[G'_{a_2}]^3}\right|_{a=(\tau,f(\tau))}.$$

Із умов (42) випливає, що $W_a(\tau) \neq 0$ на $I_{a_1^0}$. Тоді за теоремою 7 для функцій $a_1(\tau) = \tau$ та $a_2(\tau) = f(\tau)$ на відрізку $I_{a_1^0}$ отримуємо твердження теореми. ◊

Приклад 3. Для алгебраїчної кривої 2-го порядку вигляду

$$G(a) \equiv \alpha_{11}a_1^2 + 2\alpha_{12}a_1a_2 + \alpha_{22}a_2^2 + 2\alpha_1a_1 + 2\alpha_2a_2 + \alpha_0 = 0$$

справджується тотожність

$$G''_{a_1a_1}[G'_{a_2}]^2 - 2G''_{a_1a_2}G'_{a_1}G'_{a_2} + G''_{a_2a_2}[G'_{a_1}]^2 \equiv -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{vmatrix}.$$

Нерівність $\alpha_{12}a_1^0 + \alpha_{22}a_2^0 \neq -\alpha_2$ є умовою некритичності точки a^0 на цій кривій, а умова

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{vmatrix} \neq 0$$

є умовою відмінності від нуля кривини заданої кривої.

Аналогічно розглянемо неплоску криву $\mathcal{M}$. Нехай у просторі $\mathbb{R}^p$ з координатами $a_1,\ldots,a_p$ система рівнянь

$$G(a) \equiv \left(G^1(a),\ldots,G^{p-1}(a)\right) = 0$$

задає цю криву, де $G \in C^{p+1}(V,\mathbb{R}^{p-1})$, V – окіл в $\mathbb{R}^p$ точки a^0 кривої $\mathcal{M}$.

Позначимо

$$G'_{a_1}(a) \equiv \left(\frac{\partial G^1(a)}{\partial a_1},\ldots,\frac{\partial G^{p-1}(a)}{\partial a_1}\right),$$

$$G'_{(a_2,\ldots,a_p)}(a) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G^1(a)}{\partial a_2} & \ldots & \dfrac{\partial G^{p-1}(a)}{\partial a_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial G^1(a)}{\partial a_p} & \ldots & \dfrac{\partial G^{p-1}(a)}{\partial a_p} \end{pmatrix},$$

$$W(a) \equiv \begin{pmatrix} -\dfrac{d}{da_1}(G'_{a_1}[G'_{(a_2,\ldots,a_p)}]^{-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\left(\dfrac{d}{da_1}\right)^{p-1}(G'_{a_1}[G'_{(a_2,\ldots,a_p)}]^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 2$

$$\det W(a) \equiv \det W(a_1,a_2) = -\frac{G''_{a_1a_1}[G'_{a_2}]^2 - 2G''_{a_1a_2}G'_{a_1}G'_{a_2} + G''_{a_2a_2}[G'_{a_1}]^2}{[G'_{a_2}]^3}.$$

Теорема 9. *Якщо вектор-функція* $G \in C^{p+1}(V;\mathbb{R}^{p-1})$ *задовольняє умови*

$$\det G'_{(a_2,\ldots,a_p)}(a^0) \neq 0, \tag{43}$$

$$\det W(a^0) \neq 0, \tag{44}$$

то існує паралелепіпед I_{a^0}, $I_{a^0} \subset V$, *у якому крива* $\mathcal{M}$ *є* δ*-нормальною при* $\delta > (p^2 - n)(n-1)$, *тобто окіл* $\mathcal{M} \cap I_{a^0}$ *точки* a^0 *на кривій* $\mathcal{M}$ *є* δ*-нормальним при* $\delta > (p^2 - n)(n-1)$.

Д о в е д е н н я. Існування паралелепіпеда I_{a^0} випливає із умов (43), (44) і теореми про неявну функцію [3, с. 481]. При цьому $I_{a^0} = I_{a_1^0} \times \ldots \times I_{a_p^0}$ і для будь-якої точки $a \in \mathcal{M} \cap I_{a^0}$

$$(a_2, \ldots, a_p) = f(a_1), \qquad \det W(a) \neq 0,$$

де $I_{a_j^0}$ – відрізки, $f \in C^{p+1}\big(I_{a_1^0}; I_{a_2^0} \times \ldots \times I_{a_p^0}\big)$.

Задамо криву $\mathcal{M}$ в околі I_{a^0} параметрично:

$$\mathcal{M} \cap I_{a^0} = \{(\tau, f(\tau)) : \tau \in I_{a_1^0}\}$$

і розглянемо вронскіан $W_a(\tau)$ системи функцій $\{1, \tau, f(\tau)\}$ на відрізку $I_{a_1^0}$. Оскільки

$$f'_\tau(\tau) = -\, G'_{a_1} [G'_{(a_2, \ldots, a_p)}]^{-1} \Big|_{a=(\tau, f(\tau))},$$

то

$$W_a(\tau) = \det W(a)\big|_{a=(\tau, f(\tau))} \neq 0, \qquad \tau \in I_{a_1^0}.$$

Використовуючи теорему 7 для функцій τ та $f(\tau)$ на відрізку $I_{a_1^0}$, отримуємо твердження теореми. ◊

6. Теорема про існуванням розв'язку задачі (1), (2). Для множин задач, які параметризуються векторами a та μ із залежними компонентами, справджуються теореми про розв'язність задачі (1), (2) у просторах Соболєва, як і у випадку незалежних компонент.

Враховуючи тип зв'язку (явний чи неявний) між коефіцієнтами $a_1, \ldots, a_p$ і μ_1, μ_2, при доведенні теореми про розв'язність використовуємо відповідні метричні теореми із **п. 5**.

Для прикладу сформулюємо і доведемо теорему існування розв'язку задачі (1), (2) для випадку ***4***°) задання (неявного) плоских кривих $\mathcal{K}$ і $\mathcal{M}$.

Враховуючи позначення у теоремах 6 і 8, введемо множини

$$O_{(a^0, \mu^0)} = [\mathcal{M} \cap I_{a^0}] \times [\mathcal{K} \cap I_{\mu^0}],$$

$$\tilde{O}_{(a^0, \mu^0)}(\varepsilon) = ([B_0 \cup B_1] \times [\mathcal{K} \cap I_{\mu^0}]) \cup \Bigg(\bigcup_{a \in (\mathcal{M} \cap I_{a^0}) \setminus (B_0 \cup B_1)} [a \times B_\varepsilon(a)] \Bigg),$$

де B_0 – множина тих $a \in \mathcal{M} \cap I_{a^0}$, для яких крива $\mathcal{M} \cap I_{a^0}$ не є δ-нормальною, B_1 – множина точок $a \in \mathcal{M} \cap I_{a^0}$, для яких $D(a, k) = 0$ хоча б для одного $k \in \mathbb{Z}^p$.

Із результатів попередніх пунктів випливають формули:

$$\mathrm{mes}_{\mathcal{M}}\, B_0 = \mathrm{mes}_{\mathcal{M}}\, B_1 = 0, \qquad \mathrm{mes}_{\mathcal{K}}\, B_\varepsilon(a) \le \varepsilon.$$

Тоді для міри Лебеґа на многовиді O множини $\tilde{O}_{(a^0, \mu^0)}(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\mathrm{mes}_O\, \tilde{O}_{(a^0, \mu^0)}(\varepsilon) \le \mathrm{mes}_{\mathcal{M}}(B_0 \cup B_1) \times \mathrm{mes}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap I_{\mu^0}) + \\ + \int\limits_{(\mathcal{M} \cap I_{a^0}) \setminus (B_0 \cup B_1} \mathrm{mes}_{\mathcal{K}}\, B_\varepsilon(a)\, da,$$

звідки $\mathrm{mes}_O\, \tilde{O}_{(a^0, \mu^0)}(\varepsilon) \le \varepsilon\, \mathrm{mes}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M} \cap I_{a^0})$.

Теорема 10. *Нехай* $p = 2$, *а* a^0 *та* μ^0 – *точки на кривих* $\mathcal{M}$ *та* $\mathcal{K}$ *відповідно, для яких виконуються умови теорем 6 і 8,* $\varphi_j \in H_{q-j+\chi}(\Omega)$, $j = 1,\ldots,n$, $\chi > 2n(n-1)+3$. *Тоді для довільного як завгодно малого* $\varepsilon > 0$ *і для всіх векторів* $(a,\mu) \in O_{(a^0,\mu^0)} \setminus \tilde{O}_{(a^0,\mu^0)}(\varepsilon)$ *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1), (2) *з простору* $H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$.

Д о в е д е н н я. Із теорем 6 та 8 випливають нерівності (33), (38), які одночасно виконуються для довільних $\gamma > 2$ і $\delta > (4-n)(n-1)$ на множині $O_{(a^0,\mu^0)} \setminus \tilde{O}_{(a^0,\mu^0)}(\varepsilon)$.

Виберемо сталі γ та δ такими, щоб $\gamma + \delta/2 + n + (n-1)(n-2)/2 \le \chi$. Тоді з нерівностей (21), (37) отримуємо оцінку для квадрата норми розв'язку

$$\|u\|^2_{H_q^n(\bar{\mathcal{D}})} \le \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tilde{k}^{2(q-j)} \left|u_k^{(j)}(t)\right|^2 \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2(q-j+n+\gamma+\delta/2+(n-1)(n-2)/2)} \left|\varphi_{jk}\right|^2 \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j\right\|^2_{H_{q-j+\chi}(\Omega)}$$

для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ на множині $O_{(a^0,\mu^0)} \setminus \tilde{O}_{(a^0,\mu^0)}(\varepsilon)$, де додатна стала C не залежить від φ_j, $j = 1,\ldots,n$. Теорему доведено. ◊

Результати теореми 10 про існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H_q^n(\bar{\mathcal{D}})$ є подібними до результатів для випадку ***1°*** (незалежних параметрів a_1, a_2 і μ_1, μ_2), але у порівнянні з цим випадком отримуються при дещо сильніших умовах гладкості на праві частини φ_j, $j = 1,\ldots,n$ ($\chi > n(n-1)+3$ для випадку ***1°***)).

Аналогічно формулюються і доводяться теореми про розв'язність задачі (1), (2) для інших випадків їх задання у вигляді декартових добутків.

7. Висновки. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі (1), (2) для безтипних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами для різних типів зв'язків між коефіцієнтами та параметрами задачі.

Існування розв'язку пов'язано з проблемою малих знаменників двох типів, які розглядаються на гладких многовидах (гладких кривих). Подібна проблема оцінки малих знаменників виникає у метричній теорії чисел при дослідженні діофантових наближень лінійних форм на многовидах.

За допомогою метричного підходу встановлено оцінки знизу малих знаменників на гладких кривих.

Розглянуто випадки многовидів задач (1), (2) у просторі даних, які є декартовими добутками множин меншої розмірності.

Робота підтримана ДФФД України (проект № Ф 29.1/005).

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. – 1963. – **13**, № 6(144). – С. 91–192.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

3. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть I. – Москва: ФАЗИС, 1997. – 554 с.
4. *Ільків В. С.* Уточнення оцінок дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 28–35.
5. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763–766.
6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Симотюк М. М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Львів, 2005.
9. *Симотюк М. М.* Метричні оцінки дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Мат. вісн. НТШ. – 2006. – **3**. – С. 149–156.
10. *Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G.* Metric Diophantine approximation: the Khintchine–Groshev theorem for non-degenerate manifolds // Moscow Math. J. – 2002. – **2**, No. 2. – P. 203–235.
11. *Bernik V. I., Dodson M. M.* Metric Diophantine approximation on manifolds. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. – xi + 172 p. – (Cambridge tracts in mathematics. – Vol. **137**.)
12. *Bernik V., Kleinbock D., Margulis G.* Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // Int. Math. Res. Notices. – 2001. – No. 9. – P. 453–486.
13. *Bourghin D. G., Duffin R. J.* The dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**, No. 12. – P. 851–858.
14. *Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. – 1998. – **148**. – P. 339–360.
15. *Siegel C. L.* Iterations of analytic functions // Ann. Math. – 1942. – **43**, No. 4. – P. 607–612.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ПОСТОЯННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРОЙ ЛЕЖАТ НА ГЛАДКИХ КРИВЫХ

Робота посвящена исследованию нелокальной краевой задачи в цилиндрической области для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, которые принадлежат гладким кривым. Разрешимость этой задачи связана с проблемой малых знаменателей на гладких многообразиях, которые возникают при построении решения. Получены условия единственности и существования решения задачи. Установлены метрические оценки снизу малых знаменателей на гладких кривых.

NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS BELONGING TO SMOOTH CURVES

The paper is devoted to investigation of non-local boundary-value problem in a cylindrical domain for partial differential equations with constant coefficients belonging to smooth curves. Solvability of this problem is connected with the problem of small denominators on smooth manifolds which arise in construction of the solution. The conditions of uniqueness and existence of the solution to the problem are obtained. The lower metric estimates of small denominators on smooth curves are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.09.09