УДК 517.95

П. І. Каленюк[1,2], І. В. Когут[1], З. М. Нитребич[1]

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ З ОДНОРІДНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Описано множину розв'язків однорідної системи рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними, що задовольняють однорідні локальні двоточкові за часом умови. Досліджено випадок існування лише тривіального розв'язку двоточкової задачі, а також випадок існування нетривіальних квазіполіномного вигляду розв'язків задачі та запропоновано метод їх побудови.

Вступ. Задачі з локальними та нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними є, взагалі кажучи, некоректними. Їх розв'язність пов'язана з існуванням нетривіального ядра задачі, що зумовлюється наявністю знаменників, які можуть перетворюватись в нуль, у зображенні розв'язків задач. Дослідженню коректності задач у певних шкалах функціональних просторів з локальними та нелокальними багатоточковими умовами (у тому числі двоточковими) для диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними на основі метричного підходу оцінки малих знаменників присвячені численні праці (див. [2, 5] і бібліографію в них).

Класи коректності задач у шарах і смугах з локальними та нелокальними двоточковими умовами за виділеною (часовою) змінною та умовами зростання на нескінченності за іншими (просторовими) координатами для систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами встановлено у працях [1, 7, 9, 10].

Дослідженню початкових і крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними за допомогою диференціально-символьного методу присвячені праці [3, 4, 8].

Метою цієї роботи є:

– встановити умови, за яких однорідна двоточкова задача для системи рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом і в загальному випадку нескінченного порядку за просторовими змінними має лише тривіальний (нульовий) розв'язок;

– з'ясувати умови існування нетривіального розв'язку однорідної двоточкової задачі;

– вказати конструктивний спосіб побудови нетривіальних розв'язків задачі для випадку їх існування у класі квазіполіномів. Ці розв'язки зобразити як результати дій диференціальних виразів, символами яких є деякі квазіполіноми, на розв'язки класично відокремленого вигляду системи.

1. Постановка задачі. В області змінних $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^s$ ($s \in \mathbb{N}$) вивчається задача

$$L(\partial_t, \partial_x)U(t,x) \equiv \left[E_n \partial_t^2 - A(\partial_x)\partial_t - B(\partial_x)\right]U(t,x) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$U(0,x) = \mathbf{0}, \qquad U(h,x) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

де $A(\partial_x)$, $B(\partial_x)$ – оператор-матриці розміру $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, елементами яких є довільні диференціальні вирази $a_{ij}(\partial_x)$, $b_{ij}(\partial_x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, зі сталими комплексними коефіцієнтами та цілими аналітичними символами $a_{ij}(\nu)$, $b_{ij}(\nu)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$; $\nu \in \mathbb{R}^s$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$; $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)^\tau$; $U(t,x) = (U_1(t,x), U_2(t,x), \ldots, U_n(t,x))^\tau$, τ – символ транспонування; E_n – одинична матриця порядку n.

Для $n, r \in \mathbb{Z}_+^s$, $x, \nu \in \mathbb{R}^s$ позначимо

$$r \le n \Leftrightarrow r_i \le n_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, s, \qquad x^r = \prod_{i=1}^{s} x_i^{r_i}, \qquad \nu \cdot x = \sum_{i=1}^{s} \nu_i x_i ,$$

$$r! = \prod_{i=1}^{s} r_i !, \quad C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad |r| = \sum_{i=1}^{s} r_i, \quad \partial_\nu^r = \frac{\partial^{|r|}}{\partial \nu_1^{r_1} \partial \nu_2^{r_2} \ldots \partial \nu_s^{r_s}} .$$

Для дослідження множини розв’язків задачі (1), (2) використовуватимемо спеціальні класи квазіполіномів:

K_M – клас квазіполіномів вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j(x) \exp[\alpha_j \cdot x],$$

де $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{js}) \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $\alpha_j \ne \alpha_k$, $j \ne k$, $k, j = 1, 2, \ldots, m$, $x \in \mathbb{R}^s$, $m \in \mathbb{N}$, $\tilde{Q}_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, – поліноми з комплексними коефіцієнтами.

$K_{\mathbb{C},M}$ – клас квазіполіномів вигляду

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t, x) \exp\left[\beta_j t + \alpha_j \cdot x\right],$$

де $\beta_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+s}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \ne \alpha_k$ або $\beta_j \ne \beta_k$ для $j \ne$ $\ne k$, $k, j = 1, 2, \ldots, m$; $Q_j(t, x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, – поліноми змінних t, x з комплексними коефіцієнтами.

2. Основні результати. Розглянемо матричне звичайне диференціальне рівняння

$$L(d_t, \nu) T(t, \nu) = 0_n , \tag{3}$$

де 0_n – нульова матриця порядку n, а $L(d_t, \nu)$ одержується з $L(\partial_t, \partial_x)$ заміною ∂_t на d_t і ∂_x на ν, причому вважаємо, що $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{C}^s$.

Нехай $T_0(t, \nu)$, $T_1(t, \nu)$ – матричні розв’язки рівняння (3), які задовольняють початкові умови

$$T_0(0, \nu) = E_n, \qquad d_t T_0\big|_{t=0} = 0_n , \tag{4}$$

$$T_1(0, \nu) = 0_n, \qquad d_t T_1\big|_{t=0} = E_n . \tag{5}$$

Розв’язки $T_0(t, \nu)$ задачі Коші (3), (4) і $T_1(t, \nu)$ задачі Коші (3), (5) подамо у вигляді (див. [3])

$$T_1(t, \nu) = \tilde{L}(d_t, \nu)\big(W(t, \nu) E_n\big),$$

$$T_0(t, \nu) = d_t T_1(t, \nu) - T_1(t, \nu) A(\nu),$$

де $\tilde{L}(d_t, \nu)$ – приєднана матриця для $L(d_t, \nu)$, а $W(t, \nu)$ – розв’язок такої задачі Коші:

$$\left[\det L(d_t, \nu)\right] W = 0,$$

$$d_t^j W\big|_{t=0} = \delta_{j,2n-1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{6}$$

де $\delta_{j,2n-j}$ – символ Кронекера.

За теоремою Пуанкаре про аналітичну залежність розв’язку задачі Коші від параметрів [6] елементи матриць $T_0(t, \nu)$ і $T_1(t, \nu)$ як розв’язки задач

Коші (3), (4) та (3), (5) відповідно є цілими функціями стосовно ν_1, $\nu_2, \ldots, \nu_s$, оскільки за припущенням стосовно рівняння (1) елементи матриць $A(\nu)$ та $B(\nu)$ відповідно є цілими функціями $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$.

Побудуємо тепер матричні розв'язки $\hat{T}_0(t,\nu)$ та $\hat{T}_1(t,\nu)$ рівняння (3), які задовольняють такі двоточкові умови:

$$\hat{T}_0(0,\nu) = E_n, \qquad \hat{T}_0(h,\nu) = 0_n,$$

$$\hat{T}_0(0,\nu) = 0_n, \qquad \hat{T}_0(h,\nu) = E_n. \tag{7}$$

Оскільки $\{T_0(t,\nu),\ T_1(t,\nu)\}$ – нормальна фундаментальна система матричних розв'язків рівняння (3), то розв'язки $\hat{T}_0(t,\nu)$, $\hat{T}_1(t,\nu)$ шукаємо у вигляді

$$\hat{T}_0(t,\nu) = T_0(t,\nu)C_1(\nu) + T_1(t,\nu)C_2(\nu),$$

$$\hat{T}_1(t,\nu) = T_0(t,\nu)C_3(\nu) + T_1(t,\nu)C_4(\nu), \tag{8}$$

де $C_1(\nu)$, $C_2(\nu)$, $C_3(\nu)$, $C_4(\nu)$ – невідомі матриці порядку n, залежні від вектор-параметра $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Задовольняючи умови (7), одержимо

$$C_1(\nu) = E_n, \qquad T_0(h,\nu) + T_1(h,\nu)C_2(\nu) = 0_n,$$

$$C_3(\nu) = 0_n, \qquad T_1(h,\nu)C_4(\nu) = E_n. \tag{9}$$

За умови існування матриці $T_1^{-1}(h,\nu)$ зі співвідношень (9) знаходимо

$$C_1(\nu) = E_n, \qquad C_2(\nu) = -T_1^{-1}(h,\nu)T_0(h,\nu),$$

$$C_3(\nu) = 0_n, \qquad C_4(\nu) = T_1^{-1}(h,\nu). \tag{10}$$

Матриця $T_1^{-1}(h,\nu)$, очевидно, існує, якщо $\det T_1(h,\nu) \neq 0$. Введемо у розгляд множину

$$M = \{\nu \in \mathbb{C}^s : \det T_1(h,\nu) = 0\}. \tag{11}$$

У загальному $M \subseteq \mathbb{C}^s$, причому можливими є такі випадки:

1°. $M = \varnothing$;

2°. $M \neq \varnothing$ і $M \neq \mathbb{C}^s$;

3°. $M = \mathbb{C}^s$.

2.1. Випадок $M = \varnothing$. Підставляючи (10) у (8), отримуємо

$$\hat{T}_0(t,\nu) = T_0(t,\nu) - T_1(t,\nu)T_1^{-1}(h,\nu)T_0(h,\nu),$$

$$\hat{T}_1(t,\nu) = T_1(t,\nu)T_1^{-1}(h,\nu). \tag{12}$$

Умова $\forall \nu \in \mathbb{C}^s \ \det T_1(h,\nu) \neq 0$ забезпечує однозначну розв'язність задачі (1), (2). Розв'язком цієї задачі є лише тривіальний розв'язок $U(t,x) = \mathbf{0}$.

2.2. Випадок $M \neq \varnothing$ ***і*** $M \neq \mathbb{C}^s$. Розв'язок задачі (1), (2) існує, але не є єдиним – окрім тривіального розв'язку, існують нетривіальні розв'язки, які відповідно до диференціально-символьного методу [3] шукаємо у вигляді

$$U(t,x) = \left\{H^\tau(\partial_\nu)\left(\exp[\nu\cdot x]T_0{}^\tau(t,\nu)\right)\right\}^\tau\Big|_{\nu=\mathbf{0}^\tau} +$$

$$+\left\{G^\tau(\partial_\nu)\left(\exp[\nu\cdot x]T_1{}^\tau(t,\nu)\right)\right\}^\tau\Big|_{\nu=\mathbf{0}^\tau},$$

де $H(\partial_\nu)$, $G(\partial_\nu)$ − невідомі оператор-матриці розміру $n \times 1$, елементами яких є диференціальні квазіполіноми.

Задовольняючи умову $U(0,x) = \mathbf{0}$ і враховуючи (4), (5), одержимо, що $H(x) \equiv \mathbf{0}$, тому розв'язки задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$U(t,x) = \left\{G^\tau(\partial_\nu)\left(\exp[\nu \cdot x]T_1^{\,\tau}(t,\nu)\right)\right\}^\tau\Big|_{\nu=\mathbf{0}^\tau}. \tag{13}$$

Теорема 1. *Нехай вектор-функція* $G(x)$ *(компоненти якої належать до* $K_{\mathbb{C}^s}$*) має квазіполіномний вигляд*

$$G(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j \cdot x] \sum_{|r| \le n_j} q_{jr} x^r, \tag{14}$$

де

$$q_{jr} = \begin{pmatrix} q_{jr1} \\ q_{jr2} \\ \dots \\ q_{jrn} \end{pmatrix}, \quad q_{jr1}, q_{jr2}, \dots, q_{jrn} \in \mathbb{C}, \quad n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z}_+, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

причому вектор-стовпці (15) *задовольняють для кожного* $j = 1, 2, \dots, n$ *систему рівнянь*

$$\sum_{|r| \le n_j} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^s, \gamma \le r} C_r^\gamma \left\{\partial_\nu^\gamma T_1(h,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha_j} q_{jr} x^{r-\gamma} \equiv \mathbf{0}. \tag{16}$$

Тоді вектор-функція (13) *є розв'язком задачі* (1), (2).

Д о в е д е н н я. Позначимо $D^{(\gamma)}(\alpha_j) = \left\{\partial_\nu^\gamma T_1(h,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha_j}$. Як було зауважено вище, вектор-функція (13) для довільної квазіполіномної вектор-функції $G(x)$ є розв'язком системи рівнянь (1) і задовольняє умову $U(0,x) = \mathbf{0}$. Підставляючи (14) в (13), одержуємо

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j \cdot x] \sum_{|r| \le n_j} \sum_{\gamma \in Z_+^s, \gamma \le r} C_r^\gamma \left\{\partial_\nu^\gamma T_1(t,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha_j} q_{jr} x^{r-\gamma}.$$

Покладаючи $t = h$, маємо

$$U(h,x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j \cdot x] \sum_{|r| \le n_j} \sum_{\gamma \in Z_+^s, \gamma \le r} C_r^\gamma D^{(\gamma)}(\alpha_j) q_{jr} x^{r-\gamma}.$$

Оскільки стовпці (15) задовольняють систему (16), то $U(h,x) = \mathbf{0}$, що й треба було довести. ◊

Зауваження. *З теореми 1 випливає такий факт. Якщо* $G(x)$ *має вигляд* $G(x) = \exp[\alpha \cdot x]A$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}, \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{C},$$

і стовпець A *задовольняє матричне рівняння* $\left\{D^{(\mathbf{0}^\tau)}(\alpha)\right\}A = \mathbf{0}$, *тобто* $T_1(h,\alpha)A = \mathbf{0}$, *то вектор-функція* (13) *є розв'язком задачі* (1), (2).

Теорема 2. *Якщо розв'язок* $U(t,x)$ *(компоненти якого належать до* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$*) задачі* (1), (2) *має квазіполіномний вигляд*

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \exp\left[\beta_j t + \alpha_j \cdot x\right] Q_j(t,x), \tag{17}$$

де

$$Q_j(t,x)=\begin{pmatrix} Q_{j1}(t,x)\\ Q_{j2}(t,x)\\ \dots\\ Q_{jn}(t,x)\end{pmatrix},\quad Q_{j1}(t,x),\ Q_{j2}(t,x),\dots,Q_{jn}(t,x)\ -\ \textit{поліноми,}$$

то для довільного $j=1,2,\dots,m$ *виконується умова* $\alpha_j\in M$, *де* M *– множина* (11).

Д о в е д е н н я. Нехай вектор-функція $U(t,x)$ вигляду (17) є розв'язком задачі (1), (2) ($U_k(t,x)\in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$, $k=1,2,\dots,n$). Тоді

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\sum_{j=1}^{m}\exp[\alpha_j\cdot x]P_j(x),$$

де $P_j(x)=\beta_jQ_j(0,x)+\dfrac{\partial Q_j}{\partial t}(0,x)$. Отже, $U(t,x)$ є розв'язком задачі Коші для системи (1) з початковими умовами

$$U(0,x)=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\sum_{j=1}^{m}\exp[\alpha_j\cdot x]P_j(x).$$

Цей розв'язок задачі Коші з огляду на єдиність розв'язку задачі Коші можна подати у вигляді (13), де

$$G(x)=\sum_{j=1}^{m}\exp[\alpha_j\cdot x]P_j(x).$$

Очевидно, що $G_k(x)\in K_{\mathbb{C}^s}$, $k=1,2,\dots,n$. Нехай $P_j(x)=\sum\limits_{|r|\le n_j}q_{jr}x^r$. Тоді за теоремою 1 маємо рівність (16). Враховуючи те, що $\alpha_j\ne\alpha_\ell$ для $j\ne\ell$, де $j,\ \ell=1,2,\dots,m$, для довільного $j=1,2,\dots,m$ матимемо

$$\sum_{|r|\le n_j}\ \sum_{\gamma\in Z_+^s,\gamma\le r}C_r^\gamma D^{(\gamma)}(\alpha_j)q_{jr}x^{r-\gamma}\equiv\mathbf{0}. \tag{18}$$

Функції x^γ, $\gamma\in Z_+^s$, є лінійно незалежними, тому при перегрупуванні останньої суми вирази, що стоять при цих функціях, повинні дорівнювати нулю. Зокрема, очевидно, що при x^{r_0}, де $|r_0|=n_j$, матимемо $D^{(0^\tau)}(\alpha_j)q_{jr_0}=$ $=\mathbf{0}$. Рівність (18) є однорідним матричним рівнянням і може мати ненульові розв'язки лише тоді, коли $\det D^{(\mathbf{0}^\tau)}(\alpha_j)=0$, тобто $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\in M$. Отже, $U_k(t,x)\in K_{\mathbb{C},M}$, $k=1,2,\dots,n$. Теорему доведено. ◊

2.3. Випадок $M=\mathbb{C}^s$. Для цього випадку матричне рівняння

$$T_1(h,\nu)C_4(\nu)=E_n$$

не можна розв'язати для жодного значення ν. На підставі рівності (13) запишемо таку формулу для відшукання нетривіальних розв'язків задачі (1), (2):

$$U(t,x)=\left\{G^\tau(\partial_\nu)\left(\exp[\nu\cdot x]C^\tau(h,\nu)T_1^{\ \tau}(t,\nu)\right)\right\}^\tau\Big|_{\nu=\mathbf{0}^\tau}, \tag{19}$$

де $C(h,\nu)$ – довільний ненульовий розв'язок матричного рівняння

$$T_1(h,\nu)C(h,\nu)=\mathbf{0}_n. \tag{20}$$

Оскільки $\det T_1(h,\nu)=0$, то ненульові розв'язки рівняння (20) існують. Зауважимо, що вектор-функція вигляду (19) задовольняє систему рівнянь (1), умову $U(0,x)=\mathbf{0}$ за рахунок $T_1(0,\nu)=\mathbf{0}_n$ та умову $U(h,x)=\mathbf{0}$ за рахунок підбору матриці $C(h,\nu)$ як розв'язку матричного рівняння (20).

У випадку $M=\mathbb{C}^s$ множина нетривіальних розв'язків задачі (1), (2) є «найширшою» і знаходиться з точністю до довільної вектор-функції $G(x)$.

3. Приклади дослідження розв'язності деяких задач.

Приклад 1. Розглянемо двоточкову задачу

$$\partial_t^2 U_1 - 2\partial_t\partial_x U_1 - \partial_x^2 U_1 + 2\partial_t\partial_x^2 U_2 - 5\partial_x^3 U_2 = 0,$$

$$-4\partial_t U_1 + 10\partial_x U_1 + \partial_t^2 U_2 - 8\partial_t\partial_x U_2 + 14\partial_x^2 U_2 = 0, \qquad (21)$$

$$U_1(0,x)=U_2(0,x)=U_1(h,x)=U_2(h,x)=0, \qquad x\in\mathbb{R}. \qquad (22)$$

▼ Маємо $n=2,\ s=1$,

$$L(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2-2\lambda\nu-\nu^2 & 2\lambda\nu^2-5\nu^3\\ -4\lambda+10\nu & \lambda^2-8\lambda\nu+14\nu^2\end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2-8\lambda\nu+14\nu^2 & -2\lambda\nu^2+5\nu^3\\ 4\lambda-10\nu & \lambda^2-2\lambda\nu-\nu^2\end{pmatrix},$$

$$\varphi(\lambda,\nu)=\det L(\lambda,\nu)=(\lambda^2-5\lambda\nu+6\nu^2)^2.$$

Розв'язком задачі Коші

$$\varphi(d_t,\nu)W(t,\nu)=0,$$

$$W\big|_{t=0}=d_tW\big|_{t=0}=d_t^2W\big|_{t=0}=0, \qquad d_t^3W\big|_{t=0}=1$$

є така функція:

$$W(t,\nu)=\frac{(2+t\nu)\exp[2t\nu]+(-2+t\nu)\exp[3t\nu]}{\nu^3}.$$

Далі знаходимо:

$$T_1(t,\nu)=\tilde{L}(d_t,\nu)\big(W(t,\nu)E_2\big)=$$

$$=\begin{pmatrix}t(2\exp[2t\nu]-\exp[3t\nu]) & \nu t(\exp[2t\nu]-\exp[3t\nu])\\ \dfrac{2t}{\nu}(\exp[3t\nu]-\exp[2t\nu]) & t(2\exp[3t\nu]-\exp[2t\nu])\end{pmatrix},$$

$$\det T_1(h,\nu)=h^2\exp[5h\nu], \qquad M=\{\nu\in\mathbb{C}: h^2\exp[5h\nu]=0\}=\varnothing.$$

Відповідно до *випадку 2.1*, розв'язком задачі (21), (22) є лише тривіальний розв'язок. ▲

Приклад 2. Дослідимо множину розв'язків двоточкової задачі для диференціально-функціональної системи рівнянь

$$\partial_t^2 U_1(t,x) - 2\partial_t U_1(t,x+1) - 2\partial_t U_2(t,x+2) = 0,$$

$$2\partial_t U_1(t,x) + \partial_t^2 U_2(t,x) + 2\partial_t U_2(t,x+1) = 0, \qquad (23)$$

$$U_1(0,x)=U_2(0,x)=U_1(h,x)=U_2(h,x)=0, \qquad x\in\mathbb{R}. \qquad (24)$$

▼ Маємо $n=2$, $s=1$,

$$L(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2-2\lambda\exp[\nu] & -2\lambda\exp[2\nu]\\ 2\lambda & \lambda^2+2\lambda\exp[\nu]\end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2+2\lambda\exp[\nu] & 2\lambda\exp[2\nu]\\ -2\lambda & \lambda^2-2\lambda\exp[\nu]\end{pmatrix},$$

$$\varphi(\lambda,\nu)=\det L(\lambda,\nu)=\lambda^4.$$

Розв'язком задачі Коші

$$\varphi(d_t, \nu)W(t, \nu) = 0 ,$$

$$W|_{t=0} = d_t W|_{t=0} = d_t^2 W\Big|_{t=0} = 0, \qquad d_t^3 W\Big|_{t=0} = 1$$

є функція

$$W(t, \nu) = \frac{t^3}{6} .$$

Далі знаходимо:

$$T_1(t, \nu) = \tilde{L}(d_t, \nu)\left(W(t, \nu)E_2\right) = \begin{pmatrix} t + t^2 \exp[\nu] & t^2 \exp[2\nu] \\ -t^2 & t - t^2 \exp[\nu] \end{pmatrix},$$

$$\det T_1(h, \nu) = h^2 ,$$

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C} : h^2 = 0\right\} = \varnothing .$$

Задача (23), (24), відповідно до випадку 2.1, має лише тривіальний розв'язок. ▲

Приклад 3. Знайти нетривіальні розв'язки двоточкової задач

$$\partial_t^2 U_1 - \partial_x^2 U_1 - \partial_x^3 U_2 - \partial_x U_2 = 0 ,$$

$$2\partial_x U_1 + \partial_t^2 U_2 + 2\partial_x^2 U_2 + U_2 = 0 , \tag{25}$$

$$U_1(0, x) = U_2(0, x) = U_1\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = U_2\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = 0, \qquad x \in \mathbb{R} . \tag{26}$$

▼ Для цієї задачі $n = 2$, $s = 1$,

$$L(\lambda, \nu) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \nu^2 & -\nu^3 - \nu \\ 2\nu & \lambda^2 + 2\nu^2 + 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}(\lambda, \nu) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\nu^2 + 1 & \nu^3 + \nu \\ -2\nu & \lambda^2 - \nu^2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\lambda, \nu) = \det L(\lambda, \nu) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + \nu^2) .$$

Розв'язком задачі Коші

$$\varphi(d_t, \nu)W(t, \nu) = 0 ,$$

$$W|_{t=0} = d_t W|_{t=0} = d_t^2 W\Big|_{t=0} = 0, \qquad d_t^3 W\Big|_{t=0} = 1$$

є така функція:

$$W(t, \nu) = \frac{\nu \sin[t] - \sin[\nu t]}{\nu(\nu^2 - 1)} .$$

Далі знаходимо

$$T_1(t, \nu) = \tilde{L}(d_t, \nu)\left(W(t, \nu)E_2\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2\nu^3 \sin[t] - (\nu^2 + 1)\sin[\nu t]}{\nu(\nu^2 - 1)} & \dfrac{(\nu^2 + 1)\left(\nu \sin[t] - \sin[\nu t]\right)}{\nu^2 - 1} \\ -2\dfrac{\nu \sin[t] - \sin[\nu t]}{\nu^2 - 1} & \dfrac{-(\nu^2 + 1)\sin[t] + 2\nu \sin[\nu t]}{\nu^2 - 1} \end{pmatrix},$$

$$\det T_1\left(\frac{\pi}{2}, \nu\right) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}\nu\right]}{\nu} ,$$

$$M=\left\{\nu\in\mathbb{C}:\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}\nu\right]}{\nu}=0\right\}=\{2k,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}.$$

Отже, маємо *випадок 2.2.*

Побудуємо один із розв'язків задачі (25), (26), узявши $\alpha=2$ та $G(x)$ вигляду

$$G(x)=\exp[2x]\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\qquad A_1,A_2\in\mathbb{R}.$$

Згідно із зауваженням, запишемо матричне рівняння $T_1(h,\alpha)A=\mathbf{0}$, яке матиме вигляд

$$\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & \frac{10}{3}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

звідки одержимо, що $-5A_2=4A_1$. За формулою (13) матимемо

$$U(t,x)=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}A_1 & -\frac{4}{5}A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\sin t-\frac{5}{6}\sin 2t & -\frac{4}{3}\sin t+\frac{2}{3}\sin 2t\\ \frac{10}{3}\sin t-\frac{5}{3}\sin 2t & -\frac{5}{3}\sin t+\frac{4}{3}\sin 2t\end{pmatrix}\exp[2x]\right\}^{\tau}=$$

$$=A_1\exp[2x]\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin 2t\\ -\frac{2}{5}\sin 2t\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Приклад 4. Знайти розв'язки двоточкової задачі

$$\partial_t^2U_1-\partial_x^2U_1-\partial_x^3U_2+\partial_x\partial_y^2U_2=0,$$

$$-\partial_xU_1+\partial_t^2U_2-\partial_x^2U_2-\partial_y^2U_2=0, \tag{27}$$

$$U_1(0,x,y)=U_2(0,x,y)=U_1(1,x,y)=U_2(1,x,y)=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{28}$$

▼ Маємо $n=2$, $s=2$,

$$L(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2-\nu_1^2 & -\nu_1^3+\nu_1\nu_2^2\\ -\nu_1 & \lambda^2-\nu_1^2-\nu_2^2\end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2-\nu_1^2-\nu_2^2 & \nu_1^3-\nu_1\nu_2^2\\ \nu_1 & \lambda^2-\nu_1^2\end{pmatrix},$$

$$\varphi(\lambda,\nu)=\det L(\lambda,\nu)=(\lambda^2-2\nu_1^2)(\lambda^2-\nu_2^2).$$

Розв'язком задачі Коші

$$\varphi(d_t,\nu_1,\nu_2)W(t,\nu_1,\nu_2)=0,$$

$$W|_{t=0}=d_tW|_{t=0}=d_t^2W\big|_{t=0}=0,\qquad d_t^3W\big|_{t=0}=1$$

є така функція:

$$W(t,\nu)=\frac{2\nu_1\mathrm{sh}[\nu_2t]-\sqrt{2}\nu_2\mathrm{sh}\left[\sqrt{2}\nu_1t\right]}{2\nu_1\nu_2\left(\nu_2^2-2\nu_1^2\right)}.$$

Далі знаходимо

$$T_1(t,\nu_1,\nu_2) = \tilde{L}(d_t,\nu_1,\nu_2)\big(W(t,\nu_1,\nu_2)E_2\big) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-2\nu_1^3 \operatorname{sh}[\nu_2 t] + \sqrt{2}\nu_2(\nu_2^2-\nu_1^2)\operatorname{sh}\big[\sqrt{2}\nu_1 t\big]}{2\nu_1\nu_2(\nu_2^2-2\nu_1^2)} & \dfrac{-2\nu_1(\nu_2^2-\nu_1^2)\big(\operatorname{sh}[\nu_2 t]+\sqrt{2}\nu_2\operatorname{sh}\big[\sqrt{2}\nu_1 t\big]\big)}{2\nu_2(\nu_2^2-2\nu_1^2)} \\ \dfrac{2\nu_1\operatorname{sh}[\nu_2 t]-\sqrt{2}\nu_2\operatorname{sh}\big[\sqrt{2}\nu_1 t\big]}{2\nu_2(\nu_2^2-2\nu_1^2)} & \dfrac{2(\nu_2^2-\nu_1^2)\operatorname{sh}[\nu_2 t]-\sqrt{2}\nu_1\nu_2\operatorname{sh}\big[\sqrt{2}\nu_1 t\big]}{2\nu_2(\nu_2^2-2\nu_1^2)} \end{pmatrix},$$

$$\det T_1(1,\nu_1,\nu_2) = \frac{\operatorname{sh}\big[\sqrt{2}\nu_1\big]\operatorname{sh}[\nu_2]}{\sqrt{2}\nu_1\nu_2},$$

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^2 : \frac{\operatorname{sh}\big[\sqrt{2}\nu_1\big]\operatorname{sh}[\nu_2]}{\sqrt{2}\nu_1\nu_2} = 0\right\} =$$

$$= \{(\nu_1,\pi k i),\ \nu_1 \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \cup$$

$$\cup \left\{\left(\frac{\pi m i}{\sqrt{2}},\nu_2\right),\ \nu_2 \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}.$$

Маємо *випадок 2.2.*

Побудуємо розв'язок задачі (27), (28), узявши $\alpha_1 = (1,\pi i)$, $\alpha_2 = (1,-\pi i)$, а $G(x,y)$ у вигляді

$$G(x,y) = \exp[x]\sin[\pi y]\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\exp[x]\exp[\pi i y]\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\exp[x]\exp[-\pi i y]\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Згідно із зауваженням, запишемо матричне рівняння $T_1(1,\alpha_1)A = \mathbf{0}$:

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\pi^2+2)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \pi^2+1 & \pi^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки одержимо, що $A_2 = -A_1$. За формулою (13) після перетворень матимемо

$$U^{[\alpha_1]}(t,x,y) = \frac{A_1}{2\pi}\exp[x+\pi i y]\sin[\pi t]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно для α_2 одержимо $A_2 = -A_1$ і

$$U^{[\alpha_2]}(t,x,y) = \frac{A_1}{2\pi}\exp[x-\pi i y]\sin[\pi t]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно матимемо

$$U(t,x,y) = \frac{A_1}{2\pi}\exp[x+\pi i y]\sin[\pi t]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{A_1}{2\pi}\exp[x+\pi i y]\sin[\pi t]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{A_1}{\pi}\exp[x]\sin[\pi y]\sin[\pi t]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= B\exp[x]\sin[\pi y]\sin[\pi t]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

де $B \in \mathbb{R}$. ▲

Приклад 5. Дослідимо множину розв'язків доточкової задачі для системи (25) з умовами

$$U_1(0,x) = U_2(0,x) = U_1(\pi,x) = U_2(\pi,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

▼ Зауважимо, що $L(\lambda,\nu)$, $\tilde{L}(\lambda,\nu)$, $W(t,\nu)$ та $T_1(t,\nu)$ є такими ж, як і у *прикладі 3*. Однак, оскільки $h = \pi$, то

$$\det T_1(\pi,\nu) = \frac{\sin[\pi]\sin[\pi\nu]}{\nu} \equiv 0.$$

Отже, маємо *випадок 2.3*.

Матричне рівняння (20) запишемо так:

$$\frac{\sin[\pi\nu]}{\nu(\nu^2-1)}\begin{pmatrix} -(\nu^2+1) & -\nu(\nu^2+1) \\ 2\nu & 2\nu^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(\nu) & C_3(\nu) \\ C_2(\nu) & C_4(\nu) \end{pmatrix} = \mathbf{O}_2.$$

Розв'язавши його, знаходимо

$$C_1(\nu) = -\nu C_2(\nu),\ C_3(\nu) = -\nu C_4(\nu),\ C_2(\nu),\ C_4(\nu) \text{ − довільні функції.}$$

Тоді маємо

$$T_1(t,\nu)C(\nu) = \sin[t]\begin{pmatrix} -\nu C_2(\nu) & -\nu C_4(\nu) \\ C_2(\nu) & C_4(\nu) \end{pmatrix}.$$

З формули (19) одержуємо

$$U(t,x) = \left\{ \left(\Phi_1(\partial_\nu)\Phi_2(\partial_\nu)\right)\left(\exp[\nu x]\sin[t]\begin{pmatrix} -\nu C_2(\nu) & C_2(\nu) \\ -\nu C_4(\nu) & C_4(\nu) \end{pmatrix}\right)\right\}^{\tau}\Bigg|_{\nu=0}.$$

Покладаючи $C_2(\nu) = 1$, $C_4(\nu) = 0$ і враховуючи, що для довільної аналітичної функції виконуються співвідношення

$$\left\{F(\partial_\nu)\exp[\nu x]\right\}\big|_{\nu=0} = F(x),$$

$$\left\{F(\partial_\nu)(\nu\exp[\nu x])\right\}\big|_{\nu=0} = F'(x),$$

одержуємо розв'язок задачі (25), (29) у вигляді

$$U_1(t,x) = -\Phi_1'(x)\sin[t], \qquad U_2(t,x) = \Phi_1(x)\sin[t],$$

де $\Phi_1(x)$ − довільна тричі неперервно диференційовна функція. ▲

Висновки. У необмеженій області $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^s$ для лінійної однорідної системи рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом і в загальному нескінченного порядку за просторовими змінними (1) з однорідними локальними двоточковими умовами (2):

- досліджено множину її квазіполіномних розв'язків;
- запропоновано диференціально-символьний метод побудови нетривіальних розв'язків двоточкової задачі (1), (2), що вимагає самих лише операцій диференціювання;
- наведено приклади застосування методу.

1. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // Докл. АН СССР. − 1968. − **183**, № 5. − С. 995−998.
2. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. − 2006. − **58**, № 12. − С. 1624−1650.
   Те саме: *Il'kiv V. S., Ptashnyk B. Yo.* Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators // Ukr. Math. J. − 2006. − **58**, No. 12. − P. 1847−1875.
3. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. − Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. − 292 с.

4. *Нитребич З. М.* Крайова задача в безмежній смузі // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 16–21.
   Те саме: *Nytrebych Z. M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sci. – 1996. – **79**, No. 6. – P. 1388–1392.
5. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
6. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1980. – 232 с.
7. *Фардигола Л. В.* Нелокальная краевая задача в слое для эволюционного уравнения второго порядка по временной переменной // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 4. – С. 662–671.
8. *Kalenyuk P., Kohut I., Nytrebych Z.* Differential-symbol method of solving the nonlocal boundary value problem in the class of non-uniqueness of its solution // Мат. студії. – 2003. – **20**, № 1. – P. 53–60.
9. *Kengne E.* Nonlocal boundary value problem for partial differential equations with variable coefficients // Focus on African Diaspora Math. – 2008. – P. 97–108.
10. *Kengne E., Pelap F. B.* Regularity of two-point boundary value problems // Afrika Mathematika. – 2001. – **3** (12). – P. 61–70.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ С ОДНОРОДНЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Описано множество решений однородной системы уравнений в частных производных второго порядка по времени и в общем бесконечного порядка по пространственным переменным, удовлетворяющих однородным локальным двухточечным по времени условиям. Исследован случай существования лишь тривиального решения двухточечной задачи, а также случай существования нетривиальных квазиполиномного вида решений задачи и предложен метод их построения.

INVESTIGATION OF PROBLEM WITH HOMOGENEOUS LOCAL TWO-POINT CONDITIONS FOR A HOMOGENEOUS SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

We specify a set of solutions to a homogeneous system of partial differential equations of the second order in time and in general infinite order in spatial variables, which satisfy the homogeneous two-point in time conditions. We study the case when the two-point problem has a trivial solution only as well as when it has the non-trivial quasi-polynomial solutions. We specify the method of constructing such solutions.

[1] Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів,
[2] Жешувський університет, Жешув, Польща

Одержано
07.09.09