

ПОДВІЙНИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД У ПРОБЛЕМІ ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ КІЛЬЦЕВИХ РЕБЕР ТРАПЕЦЕЇДАЛЬНОЇ ФОРМИ

Пропонується метод подвійного асимптотичного розкладу наближеного аналітичного розв'язку задачі про тепловипромінювання кільцевих пластин радіатора трапецеїдального перетину, яка зводиться до нелінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Спосіб базується на застосуванні методу малого параметра Пуанкаре та методу фазових інтегралів.

Будь-які дослідження, що проводяться фахівцями з прикладної математики та механіки, мають справу з моделями реальних процесів, які дають опис явищ лише у деякому наближенні. Але, незважаючи на це, розв'язування навіть таких рівнянь дуже часто є складною з математичної точки зору задачею. Тому для їх розв'язання застосовують різні наближені аналітичні та чисельні методи або їх комбінації [9]. Серед наближених аналітичних методів достатньо ефективними є асимптотичні методи, які дозволяють виявити прихований зв'язок між різними, на перший погляд, задачами [5, 12].

1. Опис методу. Розглянемо нелінійне сингулярне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$\varepsilon^2 U''(r) + a(r, \varepsilon)U'(r) - \beta b(r, \varepsilon)U^4(r) = 0, \quad (1)$$

де ε, β – малі параметри; $a(r, \varepsilon), b(r, \varepsilon)$ – деякі неперервно диференційовні функції.

Для отримання розв'язку рівняння (1) використаємо метод подвійного асимптотичного розкладу. Для цього на першому етапі застосуємо метод малого параметра Пуанкаре і подамо функцію U у вигляді ряду за степенями параметра β (зовнішня асимптотика):

$$U(r) = U_0(r) + \beta U_1(r) + \beta^2 U_2(r) + \dots \quad (2)$$

Алгоритм подвійного зовнішнього розкладу із застосуванням методу ВКБ (Wentzel–Kramer–Brillouin) докладно викладений у роботі [2]. Доведення існування, єдиності та стійкості розв'язків, отриманих за допомогою підходу Пуанкаре, наведено в роботах [1, 5]. Підставляючи (2) в (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра β , у результаті зовнішнього розкладу одержимо систему лінійних сингулярних диференціальних рівнянь

для коефіцієнтів при β^0 :

$$\varepsilon^2 U_0'' + a(r)U_0' = 0; \quad (3)$$

для коефіцієнтів при β^1 :

$$\varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = b(r)U_0^4; \quad (4)$$

для коефіцієнтів при β^2 :

$$\varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = 4b(r)(U_0 U_1^3 + U_0^3 U_1).$$

Ці рівняння дозволяють визначити невідомі функції $U_0(r), U_1(r), U_2(r), \dots$

Обмежимося у розкладі (2) двома членами.

Щоб позбутися першої похідної у рівнянні (3), застосуємо метод Бернуллі, згідно з яким шукану функцію подамо у вигляді

$$U_0(r) = Z(r) \cdot Y(r), \quad (5)$$

де $Y(r) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^r a(x) dx\right)$. Тоді рівняння (3) набуде такого вигляду:

$$\varepsilon^2 Z'' + g(r)Z = 0, \quad \text{де} \quad g(r) = -\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2} - \frac{a'(r)}{2}. \quad (6)$$

Однорідне лінійне диференціальне рівняння (6) містить малий параметр ε^2 , тому його загальний розв'язок будемо шукати за допомогою методу фазових інтегралів або методу ВКБ. Згідно з цим методом розв'язок рівняння (6) описується таким аналітичним виразом (внутрішня асимптотика):

$$Z_{\text{ВКБ}}(r, \varepsilon) = \exp\left(\int_0^r (\varepsilon^{-1}\varphi_0 + \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \dots) dx\right). \quad (7)$$

Обмежимося в підінтегральному виразі (7) одним членом. Підставляючи вираз (7) у рівняння (6) і прирівнюючи коефіцієнти при ε^0 , одержуємо рівняння для знаходження φ_0 :

$$\varphi_0^2 + g(r) = 0,$$

звідки

$$\varphi_{0,1,2} = \pm ig^{1/2}(r). \quad (8)$$

Підставляючи вираз (8) у формулу (7) і зважаючи на заміну (5), отримуємо загальний розв'язок однорідного рівняння (3):

$$U_0(r) = C_{1,2} \exp\left(\int_0^r \left(\pm i\varepsilon^{-1}g^{1/2}(x) - \frac{1}{2\varepsilon^2} a(x)\right) dx\right),$$

який запишемо у тригонометричній формі

$$U_0(r) = c_1 \frac{G_1(r)}{e(r)} + c_2 \frac{G_2(r)}{e(r)}, \quad (9)$$

де

$$G_1(r) = \cos\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^r g^{1/2}(x) dx\right), \quad G_2(r) = \sin\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^r g^{1/2}(x) dx\right),$$

$$e(r) = \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^r a(x) dx\right), \quad c_1 = C_1 + C_2, \quad c_2 = i(C_1 - C_2).$$

Доведення асимптотичності аналітичного розв'язку (9) наведено в [5].

Оскільки розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (4) є сума загального розв'язку однорідного рівняння $U_1^{\text{c.s.}}(r)$ і часткового розв'язку неоднорідного рівняння $U_1^{\text{p.s.}}(r)$, то $U_0(r) = U_1^{\text{c.s.}}(r)$.

Для розв'язання неоднорідного диференціального рівняння (4) також застосуємо метод фазових інтегралів:

$$U_1(r) = U_{0_1}(r) \int_0^r \frac{-b(x)U_0^4(x)U_{0_2}(x)}{\varepsilon^2(U_{0_1}(x)U_{0_2}'(x) - U_{0_2}(x)U_{0_1}'(x))} dx + \\ + U_{0_2}(r) \int_0^r \frac{b(x)U_0^4(x)U_{0_1}(x)}{\varepsilon^2(U_{0_1}(x)U_{0_2}'(x) - U_{0_2}(x)U_{0_1}'(x))} dx,$$

$$\text{де} \quad U_{0_1}(r) = \frac{G_1(r)}{e(r)}, \quad U_{0_2}(r) = \frac{G_2(r)}{e(r)},$$

або в іншій формі

$$U_1(r) = \frac{G_1(r)}{e(r)} \int_0^r -\frac{b(x)e(x)U_0^4(x)}{\varepsilon g^{1/2}(x)} G_2(x) dx + \\ + \frac{G_2(r)}{e(r)} \int_0^r \frac{b(x)e(x)U_0^4(x)}{\varepsilon g^{1/2}(x)} G_1(x) dx.$$

Отже, визначивши функції $U_0(r)$, $U_1(r)$ і підставивши їх у ряд (2), одержимо наближений аналітичний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$U(r) = c_1 \frac{G_1(r)}{e(r)} + c_2 \frac{G_2(r)}{e(r)} + \beta \left\{ -\frac{G_1(r)}{\varepsilon e(r)} \int_0^r \frac{b(x)e(x)U_0^4(x)}{g^{1/2}(x)} G_2(x) dx + \right. \\ \left. + \frac{G_2(r)}{\varepsilon e(r)} \int_0^r \frac{b(x)e(x)U_0^4(x)}{g^{1/2}(x)} G_1(x) dx \right\}. \quad (10)$$

Підставляючи у формулі (10) вираз (9) для U_0 , одержимо

$$U(r) = c_1 \frac{G_1(r)}{e(r)} + c_2 \frac{G_2(r)}{e(r)} + \\ + \beta \left\{ -\frac{G_1(r)}{\varepsilon e(r)} \int_0^r \frac{b(x)}{g^{1/2}(x)e^3(x)} (c_1^4 G_1^4(x) G_2(x) + 4c_1^3 c_2 G_1^3(x) G_2^2(x) + \right. \\ + 6c_1^2 c_2^2 G_1^2(x) G_2^3(x) + 4c_1 c_2^3 G_1(x) G_2^4(x) + c_2^4 G_2^5(x)) dx + \\ + \frac{G_2(r)}{\varepsilon e(r)} \int_0^r \frac{b(x)}{g^{1/2}(x)e^3(x)} (c_1^4 G_1^5(x) + 4c_1^3 c_2 G_1^4(x) G_2(x) + \\ \left. + 6c_1^2 c_2^2 G_1^3(x) G_2^2(x) + 4c_1 c_2^3 G_1^2(x) G_2^3(x) + c_2^4 G_1(x) G_2^4(x)) dx \right\}.$$

Прийmemo позначення

$$P_{11112} = \int_0^r f(x) G_1^4(x) G_2(x) dx, \quad P_{11122} = \int_0^r f(x) G_1^3(x) G_2^2(x) dx, \\ P_{11222} = \int_0^r f(x) G_1^2(x) G_2^3(x) dx, \quad P_{12222} = \int_0^r f(x) G_1(x) G_2^4(x) dx, \\ P_{22222} = \int_0^r f(x) G_2^5(x) dx, \quad P_{11111} = \int_0^r f(x) G_1^5(x) dx, \quad (11)$$

$$\text{де } f(x) = \frac{b(x)}{e^3(x)g^{1/2}(x)}.$$

Остаточno асимптотичний розв'язок рівняння (1) буде мати вигляд

$$U(r) = c_1 \frac{G_1(r)}{e(r)} + c_2 \frac{G_2(r)}{e(r)} + \beta \left\{ -\frac{G_1(r)}{\varepsilon e(r)} \cdot (c_1^4 P_{11112} + 4c_1^3 c_2 P_{11122} + \right. \\ + 6c_1^2 c_2^2 P_{11222} + 4c_1 c_2^3 P_{12222} + c_2^4 P_{22222}) + \frac{G_2(r)}{\varepsilon e(r)} (c_1^4 P_{11111} + \\ \left. + 4c_1^3 c_2 P_{11112} + 6c_1^2 c_2^2 P_{11122} + 4c_1 c_2^3 P_{11222} + c_2^4 P_{12222}) \right\}. \quad (12)$$

У розв'язок (12) входять інтеграли (11), які в загальному виді точно не беруться. Тому для знаходження їх наближених значень можна використати чисельне інтегрування або встановлення їхньої аналітичної оцінки.

Оскільки інтеграли (11) містять тригонометричні функції $G_1(r)$, $G_2(r)$, то за допомогою тригонометричних перетворень вирази для цих інтегралів можна подати у формі:

$$\begin{aligned}
 P_{11112} &= \frac{1}{8} \int_0^r f(x) G_2(x) dx + \frac{3}{16} \int_0^r f(x) G_2(3x) dx + \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_2(5x) dx, \\
 P_{11122} &= \frac{1}{8} \int_0^r f(x) G_1(x) dx - \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_1(3x) dx - \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_1(5x) dx, \\
 P_{11222} &= \frac{1}{8} \int_0^r f(x) G_2(x) dx + \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_2(3x) dx - \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_2(5x) dx, \\
 P_{12222} &= \frac{1}{8} \int_0^r f(x) G_1(x) dx - \frac{3}{16} \int_0^r f(x) G_1(3x) dx + \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_1(5x) dx, \\
 P_{22222} &= \frac{5}{8} \int_0^r f(x) G_2(x) dx - \frac{5}{16} \int_0^r f(x) G_2(3x) dx + \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_2(5x) dx, \\
 P_{11111} &= \frac{5}{8} \int_0^r f(x) G_1(x) dx + \frac{5}{16} \int_0^r f(x) G_1(3x) dx + \frac{1}{16} \int_0^r f(x) G_1(5x) dx, \quad (13)
 \end{aligned}$$

де $G_1(kr) = \cos\left(k \frac{1}{\varepsilon} \int_0^r g^{1/2}(x) dx\right)$, $G_2(kr) = \sin\left(k \frac{1}{\varepsilon} \int_0^r g^{1/2}(x) dx\right)$, $k = 3, 5$.

Отримані інтеграли у правих частинах формул (13) теж в загальному випадку можуть не виражатися в елементарних функціях. Але для оцінки цих інтегралів використовуємо наближений метод [2], який базується на методі інтегрування частинами.

2. Застосування методу. 2.1 Постановка задачі. Розглянемо задачу про передачу тепла у кільцевому ребрі трапецеїдальної форми, схема якого наведена на рис. 1 (1 – ізоляція; 2 – теплопровідна опорна частина ребра; 3 – кільцеве ребро трапецеїдального профілю).

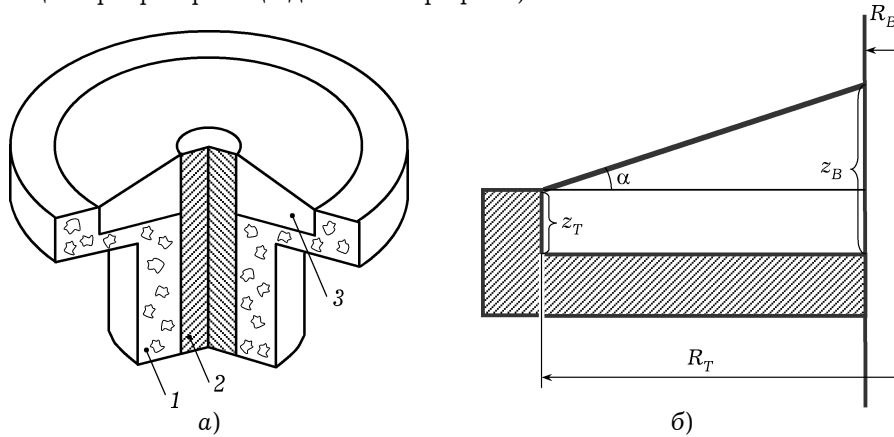


Рис. 1

Приймаємо, що передача тепла теплопровідністю відбувається в радіальному напрямі. Тепловий потік і розподіл температури в ребрі не залежить від часу, у ребрі відсутні джерела та стоки тепла. Температура основи ребра постійна. Ребро є сірим тілом, а матеріал його є однорідним з властивостями, що не залежать від температури. Поверхня ребра не опромінюється енергією ззовні. Передача тепла від вершини ребра відсутня.

Ці припущення дозволяють записати задачу теплопровідності у такій безрозмірній формі:

$$\operatorname{tg} \alpha U''(r) + \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{r + \rho} - \frac{1}{1 - r + \theta \operatorname{tg}^{-1} \alpha} \right) U'(r) - \frac{\beta U^4(r)}{1 - r + \theta \operatorname{tg}^{-1} \alpha} = 0, \quad (14)$$

$$U(0) = 1, \quad U'(1) = 0.$$

Тут $U = \frac{T}{T_B}$; T – температура; T_B – температура основи ребра;

$r = \frac{R - R_B}{R_T - R_B}$; $\rho = \frac{R_B}{R_T - R_B}$; R – поточний радіус; R_B – радіус основи реб-

ра; R_T – радіус вершини ребра; α – кут звуження ребра; $\theta = \frac{z_T}{R_T - R_B}$;

$\beta = (R_T - R_B) \frac{e\sigma T_B^3}{k \cos \alpha}$; σ – стала Стефана – Больцмана; e – ступінь чорноти; k – коефіцієнт теплопровідності; z_B – товщина ребра в основі; z_T – товщина ребра біля вершини.

Якщо ввести позначення

$$\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon^2, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{r + \rho} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - r + \theta \operatorname{tg}^{-1} \alpha} = a(r, \varepsilon), \quad \frac{1}{1 - r + \theta \operatorname{tg}^{-1} \alpha} = b(r, \varepsilon),$$

тоді структура рівняння (14) точно співпадає зі структурою рівняння (1).

Проектування систем тепловідведення у космічних кораблях, як правило, передбачає використання декількох типів радіаторних пластин [8]. Теплові режими прямих випромінюючих ребер прямокутної форми були вивчені у [6] з використанням чисельних методів. В [11] одержано точний розв'язок задачі для прямих випромінюючих ребер прямокутної форми. За допомогою чисельних методів проведено аналіз для прямого ребра трапецеїдальної форми в [4, 10]. Кільцеві ребра з прямокутним профілем досліджено у роботі [7]. Розв'язки для цих геометричних форм, крім прямокутного профілю, можуть бути отримані як окремі випадки загальної задачі, розглянутої в цій роботі.

2.2. Чисельна реалізація. Виконано порівняння розв'язків задачі (14), отриманих за запропонованою методикою подвійного асимптотичного розкладу, і чисельними результатами, отриманими з використанням методу Рунге – Кутта четвертого порядку, для конкретних параметрів досліджуваної системи. Розрахунки проведено в середовищі програмного пакету «Mathcad».

Величини параметрів α , θ і ρ , які характеризують геометрію ребра, вибрано з роботи [3]: $\alpha = 6^\circ$ (тоді $\varepsilon = 0.324$), $\theta = 0.1$, $\rho = 0.5$.

Значення параметра $\alpha = 0$ означає прямокутний профіль. Значення $\theta = 0$ відповідає трикутному профілю. Нерівність нулеві α і θ вказує на трапецеїдальний профіль ребра. Прямі ребра з кожним із цих трьох профілів можна отримати, якщо вибрати $\rho \geq 10$.

Простежимо, як впливає малий параметр $\beta = (R_T - R_B) \frac{e\sigma T_B^3}{k \cos \alpha}$ на співвідношення результатів, отриманих за допомогою методу подвійного асимптотичного розкладу та методу Рунге – Кутта. На наступних рисунках наведено зіставлення асимптотичного розв'язку $U(r)$ (ВКБ-розв'язку) рівняння (14) із чисельним розв'язком $W(r)$, отриманим методом Рунге – Кутта, при значеннях параметра $\beta = 0.025, 0.05, 0.1$ для $\rho = 0.5$ (рис. 2) і при $\beta = 0.06, 0.1, 0.14$ для $\rho = 1$ (рис. 2).

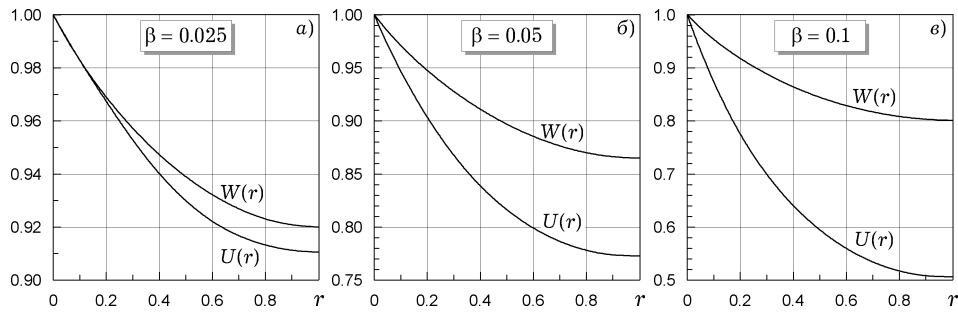


Рис. 2

На рис. 2 при значеннях $\beta = 0.025$ і $\beta = 0.05$ відповідно бачимо відставання асимптотичних результатів від чисельних. При збільшенні параметра β до 0.1 (рис. 2в) розбіжність результатів, отриманих асимптотичним і чисельним методами, збільшується.

Коли замість $\rho = 0.5$ візьмемо $\rho = 1$ (залишаючи ті самі значення параметрів α і θ), отримані результати (див. рис. 3) також свідчать про збільшення розбіжності між чисельним методом та методом подвійного асимптотичного розкладу при збільшенні параметра β .

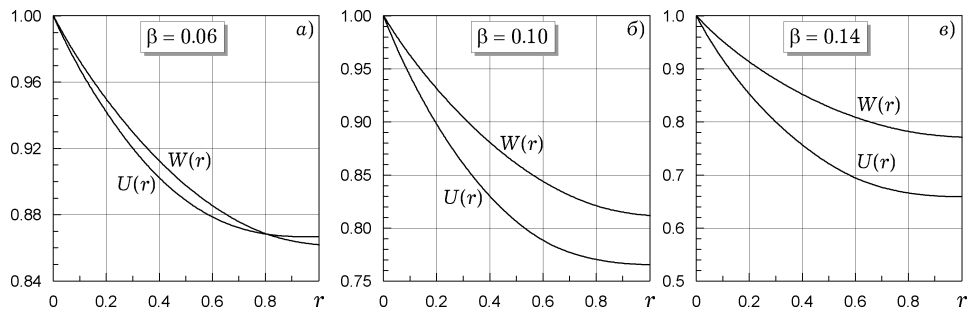


Рис. 3

На основі виконаних розрахунків можна зробити висновок, що запропонований вище асимптотичний підхід можна застосовувати для аналізу нелінійних систем, коли значення параметра β при нелінійних членах є малими. Отриманий в роботі розв'язок можна розглядати як загальний розв'язок для ребер, що мають плоскі поверхні.

1. *Вибрації в техніці*: Справочник в 6 т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана. Москва: Машиностроение, 1979. – 351 с.
2. Кабак В. Н. Метод двойного асимптотического разложения в задаче о вынужденных колебаниях прямоугольной пластины с параметрами, зависящими от времени // *Механіка та машинобудування*. – 1998. – № 1. – С. 56–62.
3. Келлер Г., Холдридж Э. Лучистый теплообмен кольцевых ребер трапецидальной формы // *Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. С. Теплопередача*. – 1970. – № 2. – С. 118–121.
4. Рейнольдс Расчетный метод подбора оптимальных по весу конфигураций (конструкционная оптимизация) простых заостренных радиаторных ребер // *Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. С. Теплопередача*. – 1963. – № 3. – С. 3–13.
5. Старун І. І., Шкіль М. І. Лінійні сингулярно збурені системи // *Укр. мат. журн.* – 2002. – 54, № 12. – С. 1688–1693.
Te same: Starun I. I., Shkil' M. I. Linear singularly perturbed systems // *Ukr. Math. J.* – 2002. – 54, No. 12. – С. 2047–2054.
6. Bartas J., Sellers W. H. Radiation fin effectiveness // *J. Heat Transfer*. – 1960. – 82. – P. 73.

7. *Chambers R. L., Somers E. V.* Radiation fin efficiency for one-dimensional heat flow in a circular fin // *J. Heat Transfer.* – 1959. – **81**. – P. 327–329.
8. *Couto P., Mantelli M.* Parametric analysis of heat transfer on multistage cryogenic radiator // *J. Thermophys. and Heat Transfer.* – 2002. – **16**, No. 3. – P. 313–321.
9. *Gristchak V. Z., Ganilova O. A.* Application of a hybrid WKB-Galerkin method in control of the dynamic instability of a piezolaminated imperfect column // *Technische Mechanik.* – 2006. – **26**, No. 2. – P. 106–116.
10. *Holstead R. D.* Radiation heat transfer for straight fins of trapezoidal profile: PhD dissertation, Texas A M University, Jan. 1967.
11. *Liu C. Y.* On minimum-weight rectangular radiating fins // *J. Aero Space Sci.* – 1960. – **27**. – P. 871–872.
12. *Samoilenko V. H., Samoilenko Yu. I.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients // *Ukr. Mat. J.* – 2007. – **59**, No. 1. – P. 126–139.
 Те саме: *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // *Укр. мат. журн.* – 2007. – **59**, № 1. – С. 122–132.

**ДВОЙНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ
 В ПРОБЛЕМЕ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА КОЛЬЦЕВЫХ
 РЕБЕР ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Предлагается метод двойного асимптотического разложения для приближенного аналитического решения задачи о теплоизлучении кольцевых пластин радиатора трапецеидального сечения, которая сводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Способ основан на методе малого параметра Пуанкаре и методе фазовых интегралов.

**DOUBLE ASYMPTOTIC DECOMPOSITION
 IN THE PROBLEM OF RADIANT HEAT EXCHANGE
 OF CIRCULAR EDGES OF TRAPEZOIDAL FORM**

In this paper the method of double asymptotic decomposition of approximate analytical solution of the problem about heat radiation of circular plates of radiator with trapezoidal cross-section that is reduced to the nonlinear second-order differential equation with variable coefficients is proposed. The technique is based on the method of Poincare small parameter of and the method of phase integrals.

Запорізьк. нац. ун-т, Запоріжжя

Одержано
 22.10.08