УДК 539.3

М. О. Моргунов[1], В. І. Острик[2], А. Ф. Улітко[1]

КОНТАКТ З ВІДРИВОМ ПРИ ЗГИНІ ПРУЖНОЇ СМУГИ ЖОРСТКИМ ДИСКОМ

Розглянуто задачу теорії пружності про контактну взаємодію жорсткого кругового диска і пружної смуги, яка опирається на дві опори, з порушенням контакту в середній частині області контакту. На підставі методу Вінера – Гопфа інтегральне рівняння задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Визначено розмір зони відриву границі смуги від диска та розподіл контактних напружень.

При контактній взаємодії пружних тіл (пружного та жорсткого тіла) область контакту частіше за все або залишається незмінною, як, наприклад, у задачі про вдавлювання штампа з прямолінійною основою в пружну півплощину, або збільшується зі зростанням навантаження. Останнє має місце у випадку взаємодії пружних тіл з гладкою опуклою межею. Разом з тим, в окремих випадках поверхні тіл, що знаходяться в контакті, можуть відходити одна від одної. Таке явище носить назву контакту з відривом [2] і досліджено у випадку дії нормальної зосередженої сили [3] або круглого диска [7] на пружну смугу, яка лежить на пружній півплощині. Під навантаженням на загальній межі смуги і півплощини утворюється скінченна область контакту, а з обох боків від неї – дві напівнескінченні зони відриву. Осесиметричну задачу про контакт з відривом пружного шару та півпростору розглянуто в роботі [3].

Виникнення відриву поверхонь тіл при їх контактній взаємодії може бути виявлено при розв'язанні відповідної задачі за припущення відсутності відриву. Якщо при цьому нормальні контактні напруження на деякій частині області контакту стають додатними, тобто напруженнями розтягу, це означає, що поверхні тіл у виявленому місці повинні вийти з контакту. Так, при стисканні пружної смуги нормальними зосередженими силами, прикладеними у точках протилежних граней, нормальні напруження на лінії симетрії смуги є від'ємними тільки на скінченному інтервалі, через середину якого проходить лінія дії зосереджених сил [6]. Довжина цього інтервалу складає 1.34 ширини смуги. Поза вказаним інтервалом нормальні напруження на лінії симетрії смуги є додатними. З огляду на симетрію ця задача еквівалентна задачі про дію нормальної зосередженої сили на пружну смугу, одна грань якої знаходиться в умовах гладкого контакту з жорсткою основою. Отриманий у [6] розв'язок вказує на те, що дія зосередженої сили веде до відриву смуги від основи поза певним відрізком поблизу лінії прикладання сили. Розв'язання задачі в уточненій постановці при наявності відриву [3] показує, що розмір області контакту приблизно у півтора рази менший від його оціночного значення, отриманого в [6].

Інші задачі про контакт з відривом у літературі не розглядалися. Однак до вказаного класу задач слід віднести також і задачу про згин жорстким круглим диском пружної смуги, яка опирається на дві опори. За умови безвідривного контакту ця задача розв'язана в роботі [5]. Аналіз нормальних контактних напружень за отриманим розв'язком показує, що, коли відношення розміру області контакту до ширини смуги перевищує 5, межа смуги відривається від межі диска у середній частині області контакту. Нижче з використанням методу Вінера – Гопфа і підходу роботи [1] наведено аналітичний розв'язок цієї задачі за умови контакту з відривом.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо пружну смугу $-\infty < x < \infty$, $-h \le y \le h$, яка опирається нижньою гранню $y = -h$ на дві точкові опори $x = -L$, $x = L + \ell$, а у верхню її грань $y = h$ вдавлюється нормальною силою P жорсткий круглий диск радіуса R. Припускаємо, що область контакту смуги та диска розділяється на дві частини: $0 \le x \le \ell_1$ і $\ell - \ell_1 \le x \le \ell$, $\ell \ll R$, між якими утворюється зона відриву $\ell_1 < x < \ell - \ell_1$ (рис. 1). Сили тертя в області контакту не враховуємо.

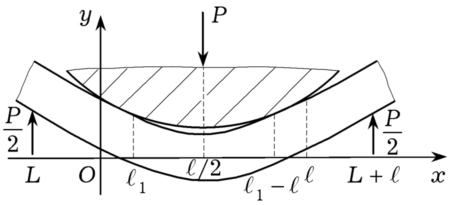

Рис. 1

Крайові умови задачі є такими:

$$u_y\Big|_{y=h} = \frac{1}{2R}\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2, \qquad 0 \le x \le \ell_1, \qquad \ell - \ell_1 \le x \le \ell,$$

$$\sigma_y\Big|_{y=h} = 0, \qquad x < 0, \qquad \ell_1 < x < \ell - \ell_1, \qquad x > \ell,$$

$$\sigma_y\Big|_{y=-h} = -\frac{P}{2}\left[\delta(x+L) + \delta(x - L - \ell)\right], \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$\tau_{yx}\Big|_{y=\pm h} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

де $\delta(x)$ − дельта-функція Дірака. Довжину ℓ відрізка, на краях якого встановлюються області контакту, вважаємо заданою. Вона зв'язана з силою P умовою рівноваги

$$2\int_0^{\ell_1} \sigma_y\Big|_{y=h} dx = -P. \tag{2}$$

Розмір ℓ_1 кожної із областей контакту, а разом з цим і розмір $\ell - 2\ell_1$ зони відриву підлягають визначенню.

Інтегральне рівняння задачі. Для побудови інтегрального рівняння розглянемо основну змішану задачу для смуги з такими крайовими умовами:

$$u_y\Big|_{y=h} = s(x), \qquad \frac{1}{2G}\sigma_y\Big|_{y=-h} = p(x),$$

$$\tau_{yx}\Big|_{y=\pm h} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{3}$$

де G − модуль зсуву; $s(x)$ і $p(x)$ − задані функції. Розв'язавши її методом інтегрального перетворення Фур'є за координатою x, отримуємо

$$\frac{\sigma_y}{2G}\Bigg|_{y=h} = \frac{1}{1-\nu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\lambda(2\mu h)\tilde{s}(\mu) + 2(1-\nu)\lambda_1(2\mu h)\tilde{p}(\mu)}{\Delta(2\mu h)} e^{-i\mu x}\, d\mu,$$

$$\tilde{p}(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\mu x}\, dx, \qquad \tilde{s}(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{i\mu x}\, dx,$$

$$\lambda(\tau) = \operatorname{sh}^2\tau - \tau^2, \qquad \lambda_1(\tau) = \operatorname{sh}\tau + \tau\operatorname{ch}\tau, \qquad \Delta(\tau) = \operatorname{sh}2\tau + 2\tau, \tag{4}$$

де ν − коефіцієнт Пуассона.

Використаємо розв'язок (4) основної змішаної задачі (3) як розв'язок розглядуваної контактної задачі. Згідно з крайовими умовами (1) покладемо

$$p(x) = -\frac{P}{4G}\left[\delta(x+L) + \delta(x - L - \ell)\right], \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$s(x) = \frac{1}{2R}\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2, \qquad 0 \le x \le \ell_1, \qquad \ell - \ell_1 \le x \le \ell, \tag{5}$$

і введемо невідому функцію $s''(x)$, $x < 0$, $\ell_1 < x < \ell - \ell_1$, $x > \ell$, нормальних переміщень точок вільної частини верхньої грані смуги. Тоді

$$\tilde{p}(\mu) = -\frac{P}{8\pi G}\left(e^{-i\mu L} + e^{i\mu(L+\ell)}\right),$$

$$\mu^2\tilde{s}(\mu) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s''(r)e^{i\mu r}\,dr = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i\mu R}(e^{i\mu\ell_1} - 1)(1 + e^{i\mu(\ell-\ell_1)}) + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{\ell_1}^{\ell-\ell_1} + \int\limits_{\ell}^{\infty}\right)s''(r)e^{i\mu r}\,dr\right]. \qquad (6)$$

Подання розв'язку (4), (6) забезпечує виконання усіх крайових умов (1), окрім другої.

Задовольнивши виразами (4), (6) другу з крайових умов (1) і виконавши заміни

$$\mu = \frac{\tau}{2h}, \quad x = 2h\xi, \quad r = 2h\eta, \quad a = \frac{\ell}{2h}, \quad c = \frac{\ell_1}{2h}, \quad \xi_0 = \frac{L}{2h}, \qquad (7)$$

відносно нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = s''(2h\eta), \quad -\infty < \eta < 0, \quad c < \eta < a - c, \quad a < \eta < \infty, \qquad (8)$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{c}^{a-c} + \int\limits_{a}^{\infty}\right)\boldsymbol{k}(\xi - \eta)\varphi(\eta)\,d\eta = f(\xi),$$

$$-\infty < \xi < 0, \quad c < \xi < a - c, \quad a < \xi < \infty, \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{k}(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}\,d\tau, \qquad \mathcal{K}(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\tau\Delta(\tau)},$$

$$f(\xi) = -\frac{(1-\nu)P}{4Gh}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_1(\tau)}{\Delta(\tau)}\left(e^{-i\tau\xi_0} + e^{i\tau(\xi_0+a)}\right)e^{-i\tau\xi}\,d\tau -$$

$$-\frac{2h}{R}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{K}(\tau)}{\tau}(e^{i\tau c} - 1)\left(1 + e^{i\tau(a-c)}\right)e^{-i\tau\xi}\,d\tau.$$

Після перетворення інтегралів за теорією лишків права частина інтегрального рівняння (9) набуває вигляду

$$f(\xi) = \frac{(1-\nu)P}{4Gh}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(is_k)}{i\Delta'(is_k)}\left(e^{-s_k|\xi+\xi_0|} + e^{-s_k|\xi-\xi_0-a|}\right) -$$

$$-\frac{2h}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{s_k^2\Delta'(is_k)}\left(\operatorname{sgn}(\xi - c)e^{-s_k|\xi-c|} - \operatorname{sgn}\xi\cdot e^{-s_k|\xi|} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sgn}(\xi - a)e^{-s_k|\xi-a|} - \operatorname{sgn}(\xi - a + c)e^{-s_k|\xi-a+c|}\right), \qquad (10)$$

де s_k, $k = 1, 2, \ldots$, – корені рівняння $\Delta(is) = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$.

Розв'язання інтегрального рівняння. Зведемо інтегральне рівняння (9) до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Приймаючи, що $\varphi(\eta) = 0$ для $0 < \eta < c$ і $a - c < \eta < a$, продовжимо інтегральне рівняння (9) на всю числову вісь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{k}(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta - \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \eta < 0,\ c < \eta < a - c,\ \eta > a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{k}(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta, & 0 < \eta < c,\ a - c < \eta < a, \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} f(\xi), & \eta < 0,\ c < \eta < a - c,\ \eta > a, \\ 0, & 0 < \eta < c,\ a - c < \eta < a, \end{array} \right\} \qquad (11)$$

і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Відносно невідомих функцій

$$\Phi_1^+(z) = \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi}\,d\xi, \qquad \Phi_1^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \varphi(\xi) e^{iz\xi}\,d\xi\,,$$

$$\Phi_2^+(z) = \frac{e^{-izc}}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{a-c} \varphi(\xi) e^{iz\xi}\,d\xi, \qquad \Phi_2^-(z) = \frac{e^{-iz(a-c)}}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{a-c} \varphi(\xi) e^{iz\xi}\,d\xi\,,$$

$$\Psi_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{c} e^{iz\xi}\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{k}(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = e^{izc}\Psi_1^-(z)\,,$$

$$\Psi_2^+(z) = \frac{e^{-iz(a-c)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-c}^{a} e^{iz\xi}\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{k}(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = e^{izc}\Psi_2^-(z)\,, \qquad (12)$$

аналітичних відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$, $\operatorname{Im} z < c^-$, $c^+ < 0$, $c^- > 0$, комплексної площини, отримаємо систему функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [4]

$$\mathcal{K}(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z) + e^{izc}\Phi_2^+(z) + \Phi_1^-(z)\right] - \Psi_1^+(z) - e^{iz(a-c)}\Psi_2^+(z) = F(z)\,,$$

$$\Phi_2^+(z) = e^{iz(a-2c)}\Phi_2^-(z)\,,$$

$$\Psi_{1,2}^+(z) = e^{izc}\Psi_{1,2}^-(z), \qquad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-. \qquad (13)$$

Права частина системи рівнянь (13) має вигляд

$$F(z) = e^{iza}F_1^+(z) + F_1^-(z) + e^{izc}F_2^+(z), \qquad F_1^-(z) \equiv F_1^+(-z)\,,$$

$$F_2^+(z) = F_{21}(z) + e^{iz(a-2c)}F_{22}(z), \qquad F_{22}(z) \equiv F_{21}(-z)\,,$$

$$F_1^+(z) = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{i\Delta'(is_k)} e^{-s_k\xi_0} \left(\frac{e^{-s_k a}}{s_k - iz} - \frac{1}{s_k + iz} \right) - e^{iz\xi_0} \frac{\lambda_1(z)}{\Delta(z)} \right] -$$

$$- \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} \frac{(1 - e^{-s_k c})(1 + e^{-s_k(a-c)})}{s_k - iz}\,,$$

$$F_{21}(z) = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{i\Delta'(is_k)} e^{-s_k(\xi_0 + c)} \left(\frac{1}{s_k - iz} - \frac{e^{-s_k(a-2c)}}{s_k + iz} \right) -$$

$$- \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} (1 - e^{-s_k c}) \left(\frac{1}{s_k - iz} - \frac{e^{-s_k(a-2c)}}{s_k + iz} \right).$$

Умови симетрії задачі відносно прямої $x = \ell/2$ приводять до тотожностей

$$\varphi(a-\xi) \equiv \varphi(\xi), \qquad \Phi_1^-(-z) \equiv \Phi_1^+(z), \qquad \Phi_2^-(-z) \equiv \Phi_2^+(z)\,,$$

$$\Psi_1^-(-z) \equiv \Psi_2^+(z), \qquad \Psi_2^-(-z) \equiv \Psi_1^+(z). \qquad (14)$$

Коефіцієнт $\mathcal{K}(z)$ системи функціональних рівнянь (13) факторизуємо у нескінченні добутки

$$\mathcal{K}(z) = \frac{z^2}{12}\mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z), \qquad \mathcal{K}^+(z) \equiv \mathcal{K}^-(-z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{iz}{\zeta_n}\right)\left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \quad (15)$$

де $\mathcal{K}^{\pm}(z)$ – відмінні від нуля функції, аналітичні у верхній ($\operatorname{Im} z > c^+$) та нижній ($\operatorname{Im} z < c^-$) півплощинах відповідно; ζ_n, $n = 1, 2, \ldots$, – корені рівняння $\lambda(is) = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$.

З урахуванням (15) із першого і передостаннього рівнянь (13) маємо

$$\frac{z^2}{12}\mathcal{K}^-(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z) + e^{izc}\Phi_2^+(z) + \Phi_1^-(z)\right] - \frac{\Psi_1^+(z) + e^{iz(a-c)}\Psi_2^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)} =$$

$$= \frac{e^{iza}F_1^+(z) + e^{izc}F_2^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)} + \frac{F_1^-(z)}{\mathcal{K}^+(z)},$$

$$\frac{z^2}{12}\mathcal{K}^+(z)\left[e^{iz(a-c)}\Phi_1^+(z) + \Phi_2^+(z) + e^{-izc}\Phi_1^-(z)\right] - \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} -$$

$$- e^{iz(a-c)}\frac{\Psi_2^+(z)e^{-izc} + F_1^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = e^{-izc}\frac{F_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} + \frac{F_2^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)}. \qquad (16)$$

Доданки із рівнянь (16), які не є аналітичними функціями у верхній або нижній півплощині, подамо у вигляді різниць аналітичних у верхній та нижній півплощинах функцій:

$$\frac{z^2}{12}\mathcal{K}^-(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z) + e^{izc}\Phi_2^+(z)\right] = \chi^+(z) - \chi^-(z),$$

$$-\frac{z^2}{12}e^{-izc}\mathcal{K}^+(z)\Phi_1^-(z) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),$$

$$e^{iz(a-c)}\frac{\Psi_2^+(z)e^{-izc} + F_1^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z),$$

$$\frac{F_1^-(z)}{\mathcal{K}^+(z)} = f^+(z) - f^-(z), \qquad -\frac{F_2^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = f_1^+(z) - f_1^-(z).$$

Розвиваючи відповідні інтеграли типу Коші [4] в ряд за теорією лишків, отримуємо

$$\chi^-(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2\left[\alpha_k\Phi_1^+(is_k) + \beta_k\Phi_2^+(is_k)\right]\frac{1}{s_k + iz},$$

$$\chi_1^+(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k^2\beta_k\Phi_1^-(-is_k)}{s_k - iz},$$

$$\chi_2^-(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\gamma_k\left[\Psi_2^+(i\zeta_k) + F_1^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k c}\right]\frac{1}{\zeta_k + iz},$$

$$f^-(z) = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\lambda_1(z)}{\Delta(z)\mathcal{K}^+(z)}e^{-iz\xi_0} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k^3\lambda_1(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)}\mathcal{K}^-(-i\zeta_k)\frac{e^{-\zeta_k\xi_0}}{\zeta_k - iz} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(is_k)}{i\Delta'(is_k)\mathcal{K}^+(is_k)}\frac{e^{-s_k(a+\xi_0)}}{s_k + iz}\right] +$$

$$+ \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\left[\frac{iz}{12}\mathcal{K}^-(z) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k\alpha_k}{s_k + iz}\left(1 - e^{s_k c} + e^{s_k(a-c)}\right)\right],$$

$$f_1^-(z) = \frac{F_{21}(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}} \frac{iz}{12} \mathcal{K}^+(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{s_k^3 \beta_k A_k}{s_k - iz} - \frac{\zeta_k \gamma_k F_{21}(-i\zeta_k)}{\zeta_k + iz} \right),$$

$$\alpha_k = \frac{\lambda(is_k) e^{-s_k a}}{s_k^3 \Delta'(is_k) \mathcal{K}^+(is_k)}, \qquad \beta_k = \alpha_k e^{s_k(a-c)},$$

$$\gamma_k = -\frac{\zeta_k^2 \Delta(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)} \mathcal{K}^+(i\zeta_k) e^{-\zeta_k(a-2c)},$$

$$A_k = i \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda_1(is_k)}{\lambda(is_k)} e^{-s_k \xi_0} - \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s_k^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Після цього рівняння (16) набувають вигляду

$$\frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} \left[\Psi_1^+(z) + e^{iz(a-c)} \Psi_2^+(z) + e^{iza} F_1^+(z) + e^{izc} F_2^+(z) \right] -$$

$$- \chi^+(z) + f^+(z) = \frac{z^2}{12} \mathcal{K}^-(z) \Phi_1^-(z) - \chi^-(z) + f^-(z),$$

$$\frac{z^2}{12} \mathcal{K}^+(z) \left[e^{iz(a-c)} \Phi_1^+(z) + \Phi_2^+(z) \right] - \chi_1^+(z) - \chi_2^+(z) + f_1^+(z) =$$

$$= \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} + e^{-izc} \frac{F_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - \chi_1^-(z) - \chi_2^-(z) + f_1^-(z). \tag{17}$$

Обидві частини кожного із рівнянь (17) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є поданнями довільної цілої функції. З умов на нескінченності

$$\mathcal{K}^{\pm}(z) = O(z^{-3/2}), \qquad \Phi_1^-(z) = o(1), \qquad \Phi_2^+(z) = o(1),$$

$$\chi^-(z) = O(z^{-1}), \qquad f^-(z) = O(z^{-1}), \qquad \chi_{1,2}^+(z) = O(z^{-1}),$$

$$f_1^+(z) = O(z^{-1}), \qquad |z| \to \infty,$$

випливає, що обидві частини першого і другого рівнянь (17) є довільними сталими C і C_1 відповідно. Отже, отримуємо

$$\Psi_1^+(z) + e^{iz(a-c)} \Psi_2^+(z) = \mathcal{K}^+(z) \left[\chi^+(z) - f^+(z) + C \right] - e^{iza} F_1^+(z) - e^{izc} F_2^+(z),$$

$$\Phi_1^-(z) = \frac{12}{z^2 \mathcal{K}^-(z)} \left[\chi^-(z) - f^-(z) + C \right],$$

$$\Phi_2^+(z) + e^{iz(a-c)} \Phi_1^+(z) = \frac{12}{z^2 \mathcal{K}^+(z)} \left[\chi_1^+(z) + \chi_2^+(z) - f_1^+(z) + C_1 \right],$$

$$\Psi_1^-(z) = \mathcal{K}^-(z) \left[\chi_1^-(z) + \chi_2^-(z) - f_1^-(z) + C_1 \right] - e^{-izc} F_1^-(z). \tag{18}$$

Вимагаючи, щоб функції $\Phi_1^-(z)$ і $\Phi_2^+(z) + e^{iz(a-c)} \Phi_1^+(z)$ були аналітичними у точці $z = 0$, знаходимо, що

$$C = f^-(0) - \chi^-(0), \qquad C_1 = f_1^+(0) - \chi_1^+(0) - \chi_2^+(0), \tag{19}$$

і приходимо до додаткових умов

$$\frac{d}{dz} [f^-(z) - \chi^-(z)] \Big|_{z=0} = 0$$

$$\frac{d}{dz} [\chi_1^+(z) + \chi_2^+(z) - f_1^+(z)] \Big|_{z=0} = 0. \tag{20}$$

З урахуванням рівностей (19) і першої з умов (20) вирази для функцій $\Phi_1^-(z)$, $\Phi_2^+(z)$ набувають вигляду

$$\Phi_1^-(z) = \frac{12}{\mathcal{K}^-(z)}\left[\tilde{\chi}^-(z) - \tilde{f}^-(z)\right],$$

$$\Phi_2^+(z) = \frac{12}{z^2} e^{iz(a/2-c)}\Phi_*(z),$$

$$\tilde{\chi}^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \Phi_1^+(is_k) + \beta_k \Phi_2^+(is_k)}{s_k + iz},$$

$$\tilde{f}^-(z) = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z\lambda_1(z)}{12\lambda(z)}\mathcal{K}^-(z)e^{-iz\xi_0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k \lambda_1(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)}\mathcal{K}^-(-i\zeta_k)\frac{e^{-\zeta_k\xi_0}}{\zeta_k - iz} + \frac{1}{2(iz)^2} + \frac{b_1 - \xi_0}{2iz}\right) -$$

$$- \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\mathcal{K}^-(z) - 1}{12iz} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k (e^{s_k c} - e^{s_k(a-c)})}{s_k(s_k + iz)}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \alpha_k A_k}{s_k + iz},$$

$$\Phi_*(z) = e^{-iz(a/2-c)} \frac{1}{\mathcal{K}^+(z)}\left[\chi_1^+(z) + \chi_2^+(z) - f_1^+(z) - \chi_1^+(0) - \chi_2^+(0) + f_1^+(0)\right] +$$

$$+ e^{iz(a/2-c)} \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)}\left[\chi_1^+(-z) + \chi_2^+(-z) - f_1^+(-z) - \chi_1^+(0) - \right.$$

$$\left. - \chi_2^+(0) + f_1^+(0)\right] + e^{-iz(a/2-c)} \frac{F_2^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z)} -$$

$$- \frac{F_2^+(0)}{2}\left(\frac{e^{-iz(a/2-c)}}{\mathcal{K}^+(z)} + \frac{e^{iz(a/2-c)}}{\mathcal{K}^-(z)}\right), \tag{21}$$

де b_1 − коефіцієнт розвинення

$$\frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} = 1 + b_1 iz + O((iz)^2), \qquad z \to 0, \qquad b_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta_n} - \frac{1}{s_n}\right).$$

Зі співвідношень $\Phi_*(0) = 0$ і $\Phi_*(-z) \equiv \Phi_*(z)$ випливає, що $\Phi_*(z) = O(z^2)$, $\Phi_2^+(z) = O(1)$, $z \to 0$. Звідси з урахуванням оцінки $\Phi_1^+(z) = \Phi_1^-(-z) = O(1)$, $z \to 0$, і третього зі співвідношень (18) приходимо до висновку, що друга додаткова умова (20) виконується автоматично. Використовуючи цю умову, вираз для функції $\Phi_2^+(z)$ із (21) зводимо до вигляду

$$\Phi_2^+(z) = \frac{12}{z}\left(\frac{\tilde{\chi}_1^+(z) + \tilde{\chi}_2^-(z) - \tilde{f}_1^-(z)}{\mathcal{K}^+(z)} - \right.$$

$$\left. - e^{iz(a-2c)} \frac{\tilde{\chi}_1^+(-z) + \tilde{\chi}_2^-(-z) - \tilde{f}_1^-(-z)}{\mathcal{K}^+(z)}\right) +$$

$$+ \frac{F_2^+(z)}{\mathcal{K}(z)} - \frac{6F_2^+(0)}{z^2}\left(\frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} + \frac{e^{-iz(a-2c)}}{\mathcal{K}^-(z)}\right), \tag{22}$$

$$\tilde{\chi}_1^+(z) = -i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \beta_k \Phi_1^-(-is_k)}{s_k - iz},$$

$$\tilde{\chi}_2^-(z) = i\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\left[\Psi_2^+(i\zeta_k) + F_1^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k c}\right]\frac{1}{\zeta_k + iz},$$

$$\tilde{f}_1^-(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{F_{21}(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - F_{21}(0)\right) - \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\frac{i}{12}\mathcal{K}^+(z) +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{s_k^2\beta_k A_k}{s_k - iz} + \frac{\gamma_k F_{21}(-i\zeta_k)}{\zeta_k + iz}\right).$$

Поклавши $z = -is_n$ у першій з рівностей (21), $z = is_n$ – у першій з рівностей (22), а в останній з рівностей (18) – $z = -i\zeta_n$, $n = 1,2,\ldots$, з урахуванням тотожностей (14) отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь:

$$x_n + \delta_{1n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k x_k + \beta_k y_k}{s_k + s_n} = g_n,$$

$$y_n + x_n e^{-s_n(a-c)} + \delta_{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_k x_k}{s_k + s_n} + \frac{\gamma_k z_k}{\zeta_k - s_n}\right) = 0,$$

$$z_n + \delta_{3n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_k x_k}{s_k - \zeta_n} + \frac{\gamma_k z_k}{\zeta_k - \zeta_n}\right) = 0, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{23}$$

відносно невідомих

$$x_k = \Phi_1^+(is_k) + s_k A_k, \qquad y_k = \Phi_2^+(is_k) - \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\frac{1}{s_k}\left(1 - e^{-s_k(a-2c)}\right),$$

$$z_k = \Psi_2^+(i\zeta_k) + F_1^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k c} + F_{21}(-i\zeta_k), \qquad k = 1,2,\ldots,$$

у якій

$$\delta_{1n} = -\frac{12}{\mathcal{K}^+(is_n)}, \qquad \delta_{2n} = -\frac{\delta_{1n}}{s_n}, \qquad \delta_{3n} = \zeta_n\mathcal{K}^+(i\zeta_n),$$

$$g_n = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\tilde{g}_n + \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\hat{g}_n, \qquad \hat{g}_n = \frac{\delta_{1n}}{12 s_n},$$

$$\tilde{g}_n = \delta_{1n}\left(\frac{1}{2s_n^2} + \frac{b_1 - \xi_0}{2s_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k\lambda_1(i\zeta_k)\mathcal{K}^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k\xi_0}}{12\lambda'(i\zeta_k)(\zeta_k - s_n)}\right), \quad n = 1,2,\ldots.$$

Регулярна нескінченна система алгебричних рівнянь (23) має експоненціально спадні за k коефіцієнти ($s_k \sim \pi k/2$, $k \to \infty$) і відноситься до типу Пуанкаре – Коха. Тому для її розв'язування ефективним є застосування методу редукції.

Подавши невідомі x_k, y_k, z_k у вигляді

$$x_k = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\tilde{x}_k + \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\hat{x}_k, \qquad y_k = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\tilde{y}_k + \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\hat{y}_k,$$

$$z_k = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\tilde{z}_k + \frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\hat{z}_k, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

де $\tilde{x}_k$, $\tilde{y}_k$, $\tilde{z}_k$ – розв'язок системи рівнянь (23) з правою частиною $\tilde{g}_n$, а $\hat{x}_k$, $\hat{y}_k$, $\hat{z}_k$ – розв'язок цієї ж системи з правою частиною $\hat{g}_n$, $k,n = 1,2,\ldots$, із умови рівноваги (2) знаходимо наступне співвідношення між параметрами $2h/(R\sqrt{2\pi})$ і $(1-\nu)P/(4Gh\sqrt{2\pi})$:

$$\frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{s_k^2\Delta'(is_k)}(1-e^{-s_kc})\left[(1-e^{-s_k(a-c)})\hat{x}_k-\hat{y}_k\right]=$$

$$=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{s_k^2\Delta'(is_k)}(1-e^{-s_kc})\times\right.$$

$$\left.\times\left[(1-e^{-s_k(a-c)})\tilde{x}_k-\tilde{y}_k\right]\right\}.$$

Для визначення параметра $c=\ell_1/(2h)$ служить перша додаткова умова (24), яка набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k x_k+\beta_k y_k)=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\left(\frac{b_1-\xi_0}{2}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k\lambda_1(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)}\mathcal{K}^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k\xi_0}\right)+\frac{2h}{R\sqrt{2\pi}}\frac{1}{12}.$$

Контактні напруження. Враховуючи співвідношення (5)–(12), вираз із (4) для нормальних напружень на верхній грані смуги подамо у вигляді

$$\left.\frac{\sigma_y}{2G}\right|_{y=h}=\frac{1}{1-\nu}\left[f(\xi)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\tau)\left(\Phi_1^-(\tau)+\Phi_2^+(\tau)e^{i\tau c}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Phi_1^+(\tau)e^{i\tau a}\right)e^{-i\tau\xi}\,d\tau\right]. \qquad (24)$$

Застосовуючи теорію лишків, із (24) отримуємо нормальні напруження в області контакту $0<x<\ell_1$:

$$\left.\frac{\sigma_y}{2G}\right|_{y=h}=-\frac{\sqrt{2\pi}}{1-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{s_k\Delta'(is_k)}\left[x_k\left(e^{-s_k\xi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-s_k(a-\xi)}\right)+y_k e^{-s_k(c-\xi)}\right],\qquad \xi=\frac{x}{2h}. \qquad (25)$$

Обчислення безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma}=(2G\ell_1/P)\sigma_y\big|_{y=h}$ за формулою (25) показують, що при достатньо великих відстанях між опорами ($2L+\ell\ge 20h$) розподіл контактних напружень, якому відповідає суцільна крива на рис. 2, не залежить як від відстані між опорами, так і від довжини ℓ відрізка, на краях якого встановлюються області контакту, якщо кінці цього відрізку не підходять близько до опор (наприклад, якщо $\ell<0.9(2L+\ell)$ у випадку $2L+\ell=20h$, або $\ell<0.99(2L+\ell)$ у випадку $2L+\ell=32h$). При цьому розмір ℓ_1 областей контакту залишається незмінним і складає 2.506 від ширини смуги $2h$. Найменше значення відносної довжини $\ell/(2h)$, при якому має місце контакт з відривом, дорівнює 5. При $\ell/(2h)<5$ диск знаходиться зі смугою у безвідривному контакті, що співпадає з результатом роботи [5]. Для менших відстаней між опорами ($10h<2L+\ell<20h$) їх вплив на розподіл контактних напружень, особливо при наближенні країв областей контакту до опор, стає помітним. В одному з таких випадків – для відстані між опорами $12h$ і довжині $\ell=11h$ – розподіл безрозмірних напружень $\bar{\sigma}$ зображує пунктирна крива на рис. 2. При цьому $\ell_1/2h=2.520$.

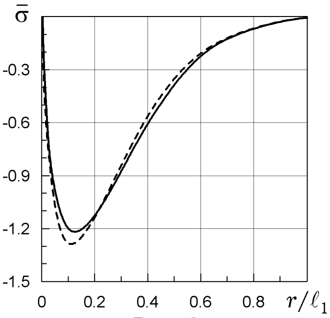

Рис. 2

Висновки. З використанням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок контактної задачі про згин пружної смуги, яка опирається на дві точкові опори, жорстким круглим диском. Показано, що при зростанні сили P, яка вдавлює жорсткий диск у пружну смугу, область контакту зростає до певного критичного стану, коли її розмір у 5 разів перевищує ширину смуги. При подальшому зростанні навантаження смуга згинається настільки, що область контакту розпадається на дві області, які, зберігаючи свій відносний розмір 2.5, віддаляються одна від одної, а між ними утворюється зона відриву диска від межі смуги, яка зростає. При цьому розподіл нормальних напружень у кожній з областей контакту не змінюється.

1. *Антипов Ю. А.* Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 7. – С. 29–33.
2. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
3. *Кир Л. М., Дандерс Дж., Цзай К. Ц.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве // Прикл. механика. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – Москва: Мир, 1972. – **39**, № 4. – С. 260–266.
4. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
5. *Улітко А. Ф., Моргунов М. О.* Контакт жорсткого диску з тонкою пружною смугою при згині // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 164–173.
6. *Filon L. N. G.* On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load // Trans. Roy. Soc. (London). Ser. A. – 1903. – **201**, No. 67.
7. *Ratwani M., Erdogan F.* On the plane contact problem for frictionless elastic layer // Int. J. Solids and Struct. – 1973. – **43**. – P. 921–936.

КОНТАКТ С ОТРЫВОМ ПРИ ИЗГИБЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ ЖЕСТКИМ ДИСКОМ

Рассмотрена задача теории упругости о контактном взаимодействии жесткого кругового диска и упругой полосы, опирающейся на две опоры, с нарушением контакта в средней части области контакта. На основе метода Винера – Хопфа интегральное уравнение задачи сведено к бесконечной системе алгебраических уравнений. Определены размер зоны отрыва границы полосы от диска и распределение контактных напряжений.

CONTACT WITH TEARING OFF UNDER BENDING OF ELASTIC STRIP BY RIGID DISK

The problem of elasticity theory concerning contact interaction between a rigid circular disk and an elastic strip, which is holded by two bearings and tearing off from the central part of contact domain, has been investigated. Based on Wiener – Hopf method the constructed integral equation for this problem has been transformed to an infinite system of algebraic equations. The relative dimension of zone where the strip is tearing off from the disk and the distribution of contact stresses depending on relative width of the disk are found.

[1] Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,
[2] Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано
23.10.08