

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ МЕТОДОМ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

*Застосовано безсітковий метод для знаходження наближеного розв'язку крайової задачі, якою описується математична модель процесу фільтраційної консолідації у тривимірній області. Він базується на методі колокацій з використанням радіальних базисних функцій. Проведені чисельні експерименти засвідчили ефективність запропонованого підходу.*

**Вступ.** Серед методів відшукування наближених розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) великої популярності набули проекційні методи. З проекційного методу Бубнова – Гальоркіна при заданні базисних і пробних функцій у вигляді поліномів з компактним носієм отримуємо метод скінченних елементів (МСЕ) [15]. Одним із недоліків проекційно-сіткових методів (до яких відноситься МСЕ) є необхідність покриття розрахункової області, в якій шукається розв'язок задачі, так званою сіткою – множиною вузлів, які пов'язані між собою встановленими зв'язками.

Однією із альтернатив проекційно-сітковим методам виступають проекційно-безсіткові [16, 19, 29]. Наприклад, при заданні в проекційному методі Петрова – Гальоркіна дельта-функції Дірака як пробної функції отримуємо так званий метод колокацій (метод колокацій в підобластях або в точках) [2]. За базисні функції у цьому методі можна використати радіальні базисні функції (РБФ). Уперше цей метод для розв'язування крайових задач для ДРЧП описаний в роботах [26, 27] і отримав назву «метод РБФ».

Радіальні базисні функції знайшли своє застосування в методах наближення функцій [21], а також в методі дуальної взаємності («dual reciprocity method») відшукування часткового розв'язку ДРЧП в методі граничних елементів і в методі фундаментального розв'язку [25].

У роботі [28] застосовано метод РБФ до відшукування наближених чисельних розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца. Також на основі чисельних експериментів наведено обґрунтування переваг цього методу порівняно із сітковими методами, зокрема методом скінченних різниць (МСР) та МСЕ.

У роботі [19] проведено порівняння методу РБФ та МСР на прикладі задач адвекції-дифузії (масопереносу) з домінуючим конвективним членом. Як відомо, в сіткових методах (зокрема в МСР та МСЕ) при розв'язуванні таких задач виникають значні проблеми, пов'язані зі стійкістю чисельних розв'язків. Тому в МСР виникає необхідність застосування монотонних різницевих схем, а в МСЕ – стабілізаційних та адаптивних схем. Як зазначають автори, результати роботи [19] показують, що метод РБФ навіть в найпростішій його реалізації для задач вказаного типу дає прийнятні результати і в тих випадках, де схеми МСР втрачають стійкість. Відмітимо, що автори статті це доводять на основі чисельних експериментів без теоретичного обґрунтування.

Також значного розвитку отримали й адаптивні методи РБФ [30]. Досить часто в цих методах використовують РБФ з компактним носієм [20].

У роботах [3–9, 11, 12] запропоновано новий підхід до математичного моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтів. Він полягає в урахуванні впливу тепло- та масопереносу через явища хімічного та термічного осмосів, а також через залежності параметрів фільтрації від теплового та сольового режимів порової рідини. Для чисельного розв'язання відповідних одновимірних і двовимірних крайових задач використовувались

МСП та МСЕ. Застосування МСЕ до тривимірних задач такого типу пов'язане зі значними обчислювальними та ресурсними затратами. Наприклад, виникає потреба в створенні генератора скінченно-елементного розбиття тривимірних областей, що складає приблизно 70% від затрат усіх ресурсів на розв'язування задачі [29]. Застосування МСП з використанням регулярної (прямокутної) сітки обмежує форму області, в якій шукається розв'язок задачі, а застосування МСП на нерегулярних сітках [1] еквівалентне вимогам скінченно-елементного розбиття області.

Тому метою даної роботи є знаходження наближеного розв'язку нелінійної тривимірної крайової задачі, якою описується математична модель процесу фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу тепло-масопереносу, з використанням безсіткового методу радіальних базисних функцій.

**Математична модель задачі.** Розглянемо таку крайову задачу, якою описується математична модель процесу фільтраційної консолідації масиву ґрунту в тривимірній області  $\Omega$  з межею  $\Gamma$  з урахуванням впливу тепло-масопереносу [4]:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \bar{\epsilon})(1 + 2\xi)}{3\gamma a_1} \nabla \cdot (\mathbf{K}(c, T) \nabla h - \mathbf{v}(c, T) \nabla c - \boldsymbol{\mu}(c, T) \nabla T) + \\ & + \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{3\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c + \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c) - \gamma_m (c - C_m) = n \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}(c, T) \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{v}(c, T) \nabla c + \boldsymbol{\mu}(c, T) \nabla T,$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T) \nabla c - \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T, \quad \mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} \cdot T - \boldsymbol{\lambda}(c, T) \nabla T, \quad (4)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, \quad h|_{\Gamma_2} = H_1, \quad (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0,$$

$$c|_{\Gamma_4} = C_1, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \quad T|_{\Gamma_6} = T_1, \quad (5)$$

$$h(X, 0) = h_0(X), \quad c(X, 0) = c_0(X),$$

$$T(X, 0) = T_0(X), \quad X = (x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

де  $t \in (0; t_0]$ ;  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ ,  $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$ ;  $C_1(X, t)$ ,  $T_1(X, t)$ ,  $H_1(X, t)$ ,  $h_0(X)$ ,  $c_0(X)$ ,  $T_0(X)$  – задані функції. Тут використано позначення:  $h(X, t)$  – надлишковий напір;  $c(X, t)$  – концентрація порового сольового розчину;  $T(X, t)$  – температура пористого середовища;  $\mathbf{K}(c, T) = \{k_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{v}(c, T) = \{v_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{D}(c, T) = \{D_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{D}_T(c, T) = \{D_{Tij}(c, T)\}$ ,  $\boldsymbol{\mu}(c, T) = \{\mu_{ij}(c, T)\}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}(c, T) = \{\lambda_{ij}(c, T)\}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$ , – тензори відповідно коефіцієнтів фільтрації, хімічного осмосу, конвективної дифузії, термодифузії, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту, компоненти яких є неперервними в  $\bar{\Omega}$  і неперервно диференційовними в  $\Omega$  функціями, а також обмежені знизу та зверху додатними константами;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{q}_c$ ,  $\mathbf{q}_T$  – вектори швидкості фільтрації сольового розчину, потоків розчинених солей і тепла відповідно;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області фільтраційної

консолідації;  $\rho$ ,  $c_p$  – густина та питома теплоємність порового розчину;  $c_T$  – об’ємна теплоємність ґрунту;  $t$  – час;  $\bar{e}$  – середнє значення коефіцієнта пористості;  $\gamma$  – питома вага сольового розчину;  $n$  – пористість ґрунту;  $\xi$ ,  $a_1$  – коефіцієнти бічного тиску та стисливості ґрунту;  $\gamma_m$  – константа швидкості масообміну;  $C_m$  – концентрація граничного насичення;  $\Theta^*$ ,  $h^*$  – сума головних напружень у скелеті ґрунту та надлишковий напір у стані повної стабілізації, які є принаймні один раз неперервно диференційовними функціями своїх аргументів. Зважаючи на фізичний зміст, величини  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $c_T$ ,  $\bar{e}$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $\xi$ ,  $a_1$ ,  $C_m$  є додатними, а  $\gamma_m \geq 0$ .

Перший із законів (4) є узагальненим законом Дарсі – Герсеванова на випадок руху сольових розчинів у неізотермічних умовах [3–9, 11, 12]. У ньому враховується вплив на швидкість фільтрації осмотичних явищ, які мають місце в нерівномірно засолених ґрунтах при наявності градієнта температури, а також вплив на фільтраційні властивості ґрунту неізотермічного режиму та наявності в поровій рідині розчинених солей. Оскільки величина швидкості руху твердих частинок ґрунту є відносно малою порівняно зі швидкістю фільтрації, в цьому законі нею знехтувано.

**Проекційний метод і метод РБФ.** Нагадаємо схему загального проекційного методу [15], якою скористаємось у подальших викладах стосовно методу РБФ.

У гільбертовому просторі  $H$  розглянемо операторне рівняння [15]

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (7)$$

де  $A$  – лінійний оператор в  $H$  з областю визначення  $D(A)$ . Вимагаємо виконання умови щільності  $D(A)$  в  $H$ .

Задамо набір так званих базисних функцій

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

кожна з яких належить  $D(A)$ . Позначимо через  $H_n$  лінійну оболонку функцій (8), тобто множину, яка складається із усіх можливих комбінацій  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ , де  $\alpha_i = \text{const}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Вимагаємо виконання таких умов:

1°. Система функцій (8) є лінійно незалежною.

2°. Послідовність підпросторів  $\{H_n\}$  гранично щільна в  $H$ . Тобто довільну функцію  $u_0$  з простору  $H$  можна апроксимувати лінійною комбінацією функцій (8) із наперед заданою точністю в сенсі метрики простору  $H$ . Цю умову ще називають умовою повноти системи функцій (8).

Введемо в розгляд деякий оператор  $\mathcal{K}$  з областю визначення  $D(\mathcal{K}) \supseteq D(A)$  і розглянемо набір функцій  $\{\psi_i\}_{i=1}^n \in D(\mathcal{K})$ , які називаються пробними. Згідно з проекційним методом [15] наближений розв’язок  $u_n$  рівняння

(7) шукають у вигляді  $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ , де невідомі константи  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

знаходять із системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$(Au_n - f, \mathcal{K}\psi_i)_H = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

де  $(u, v)_H$  – скалярний добуток у просторі  $H$ .

Залежно від властивостей операторів  $A$ ,  $\mathcal{K}$ , базисних  $\varphi_i$  і пробних функцій  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , виокремлюють такі види проекційного методу: метод Рітца, метод Бубнова – Гальоркіна, метод Петрова – Гальоркіна, метод

найменших квадратів. У проекційному методі Петрова – Гальоркіна оператор  $\mathcal{K}$  – тотожний оператор;  $\varphi_i \neq \psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\varphi_i \in D(A)$ ,  $\psi_i \in H$ .

Нехай  $H = L_2(\Omega)$ , де  $\Omega$  – область  $m$ -вимірного евклідового простору. Тоді  $(u, v)_H = \int_{\Omega} uv d\mathbf{X}$ , де  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Розіб'ємо область  $\Omega$  на  $n$  під-

областей  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  так, щоб  $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega$ ,  $\Omega_j \cap \Omega_i = \emptyset$  при  $i \neq j$ . У кожній підобласті  $\Omega_i$  виберемо вузлову точку (або просто вузол)  $\mathbf{X}_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}) \in \Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , у кожній з яких розглянемо дельта-

функцію Дірака [2]  $\delta_i(\mathbf{X}) = \delta(r_i)$ ,  $r_i = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - x_j^{(i)})^2}$ . Тоді

$\int_{\Omega} f(\mathbf{X}) \delta_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = f(\mathbf{X}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . За пробні виберемо функції  $\psi_i(\mathbf{X}) = \delta_i(\mathbf{X})$ ,

$i = 1, \dots, n$ . Тоді в просторі  $L_2(\Omega)$  для знаходження наближеного розв'язку

операторного рівняння (7) у вигляді  $u_n(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(\mathbf{X})$  згідно з проекцій-

ним методом Петрова – Гальоркіна отримуємо СЛАР

$$\int_{\Omega} \left( A \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}) \right) \cdot \delta_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n c_j A \varphi_j(\mathbf{X}_i) = f(\mathbf{X}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Розв'язавши систему (10), знайдемо невідомі коефіцієнти  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , а звідси і наближений розв'язок  $u_n(\mathbf{X})$  рівняння (7) у просторі  $L_2(\Omega)$ .

Описаний метод названо методом колокації в точці [2]. Це є варіант проекційного методу Петрова – Гальоркіна, де за пробні функції вибирають дельта-функції Дірака, аргументами яких є відстані до вузлів  $\mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . У цьому методі вимагається задання в області, в якій шукається розв'язок задачі, лише множини вузлів. Тому метод колокації в точці відноситься до безсіткових.

Однією із основних проблем проекційного методу взагалі і методу колокації зокрема є задання системи базисних функцій  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ , яка задовольняє умови 1<sup>о</sup>, 2<sup>о</sup> – лінійної незалежності та повноти.

У безсіткових методах широкого застосування набули радіальні базисні функції – функції, які залежать від відстані  $r$ . Найбільше вживаними РБФ є такі [21–28]: мультікватрична  $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ , обернена мультікват-

ратична  $\varphi(r, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}}$ , обернена квадратична  $\varphi(r, \varepsilon) = \frac{1}{1 + (r\varepsilon)^2}$  та га-

уссівська  $\varphi(r, \varepsilon) = e^{-(r\varepsilon)^2}$ . Тут  $\varepsilon > 0$  – константа, яку називають параметром форми.

Дослідження якісних характеристик методу РБФ стосовно розв'язування крайових задач знаходиться на початковому етапі. Чи не перша спроба оцінки похибок методу висвітлена в роботі [23]. Зокрема, для задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$u(\mathbf{X})|_{\Gamma} = g(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

така оцінка має вигляд

$$\|u - u_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|g - u_n\|_{L_\infty(\Gamma)} + C\sqrt{\text{vol}(\Omega)}\|f - \Delta u_n\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Тут  $u_n$  – наближений розв’язок згідно з методом РБФ;  $C > 0$  – константа;  $\|\cdot\|_{L_\infty}$  – норма в сенсі метрики простору  $L_\infty$ ;  $\text{vol}(\Omega)$  – «об’єм» області  $\Omega$  («об’єм» – це умовна назва, наприклад, у двовимірному випадку це буде площа).

Найбільш повні результати досліджень похибок методу РБФ наведено в роботі [24]. Зокрема, розглянуто крайову задачу

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega, \\ u(\mathbf{X})|_\Gamma &= g(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Gamma, \end{aligned}$$

де  $Lu(\mathbf{X})$  – лінійний еліптичний оператор другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Якщо  $u(\mathbf{X}) \in W_2^m(\Omega)$ , де  $[m] > 2 + \frac{n}{2}$ , то для похибки між точним розв’язком  $u(\mathbf{X})$  та наближеним розв’язком  $u_n(\mathbf{X})$  згідно з методом РБФ справджується оцінка

$$\|u - u_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C(h_{X,\Omega}^{m-2-n/2} + h_{X,\Gamma}^{m-n/2})\|u\|_{W_2^m(\Omega)},$$

де  $C > 0$  – константа;  $h_{X,\Omega} = \sup_{\mathbf{X} \in \Omega} \min_{j \in \omega} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|_2$ ,  $h_{X,\Gamma} = \sup_{\mathbf{X} \in \Gamma} \min_{j \in \omega^\Gamma} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|_2$ ;  $\omega$  – множина номерів вузлів, які належать області  $\Omega$ ;  $\omega^\Gamma$  – множина номерів вузлів, які належать межі  $\Gamma$ ;  $W_2^m(\Omega)$  – простір Соболева.

Аналогічна оцінка для першої крайової задачі для еліптичних рівнянь зі сталими коефіцієнтами наведена в роботі [22].

Набагато більше оцінок точності методу РБФ стосовно розв’язання крайових задач зроблено на основі чисельних експериментів [19, 27, 28, 30]. Висновки з таких чисельних експериментів однотипні: метод РБФ має точність, не нижчу, а в деяких випадках набагато вищу, ніж точність відомих сіткових методів – МСР та МСЕ.

**Чисельне розв’язання крайової задачі (1)–(6) методом РБФ.** Покриємо замикання області  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  вузловими точками  $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , де  $N^\Omega$  – множина номерів вузлів, які лежать в області  $\Omega$ ;  $N^{\Gamma_j}$  – множина номерів вузлів, які лежать на відповідних частинах  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , межі  $\Gamma$ ;  $N = \bigcup_{j=1}^6 N^{\Gamma_j} \cup N^\Omega$ .

Наближений розв’язок крайової задачі (1)–(6) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(X, t) &\approx \sum_{i=1}^N a_i(t)\varphi_i(r_i, \varepsilon), & c(X, t) &\approx \sum_{i=1}^N b_i(t)\varphi_i(r_i, \varepsilon), \\ T(X, t) &\approx \sum_{i=1}^N s_i(t)\varphi_i(r_i, \varepsilon), \end{aligned}$$

де  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $s_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;  $\varphi_i(r_i, \varepsilon)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – деякі відомі РБФ, причому  $r_i = \|X - X_i\|_2 = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ . Тоді з рівнянь (1)–(3), граничних і початкових умов (5), (6), використовуючи метод РБФ, отримаємо таку задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих  $\mathbf{A}(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^N$ ,  $\mathbf{B}(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^N$ ,  $\mathbf{S}(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^N$ :

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (11)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{G}'^{(1)} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F}^{(1)}, \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{S}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad (14)$$

де

$$\mathbf{A}^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^N, \quad \mathbf{B}^{(0)} = \{b_i(0)\}_{i=1}^N, \quad \mathbf{S}^{(0)} = \{s_i(0)\}_{i=1}^N,$$

$$\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{L}^{(k)} = \{\ell_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^N,$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^N, \quad k = 1, \dots, 3,$$

$$\mathbf{G}^{(1)} = \{g_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{G}^{(2)} = \{g_{ij}^{(2)}\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{G}'^{(1)} = \{g_{ij}'^{(1)}\}_{i,j=1}^N,$$

$$m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i \in N^\Omega, \\ 0, & i \notin N^\Omega, \end{cases} \quad m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} n\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i \in N^\Omega, \\ 0, & i \notin N^\Omega, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i \in N^\Omega, \\ 0, & i \notin N^\Omega, \end{cases}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} \left. \frac{\partial h^*}{\partial t} \right|_{X=X_i} + \frac{1}{3\gamma} \left. \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right|_{X=X_i}, & i \in N^\Omega, \\ 0, & i \in N^{\Gamma_1}, \\ H_1(X_i, t), & i \in N^{\Gamma_2}, \end{cases}$$

$$f_i^{(2)} = \begin{cases} \gamma_m C_m|_{X=X_i}, & i \in N^\Omega, \\ 0, & i \in N^{\Gamma_3}, \\ C_1(X_i, t), & i \in N^{\Gamma_4}, \end{cases} \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in N^\Omega, \\ 0, & i \in N^{\Gamma_5}, \\ T_1(X_i, t), & i \in N^{\Gamma_6}, \end{cases}$$

$$\ell_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{(1+\bar{e})(1+2\xi)}{3\gamma\alpha_1} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)), & i \in N^\Omega, \\ (-\mathbf{K} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), & i \in N^{\Gamma_1}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i \in N^{\Gamma_2}, \end{cases}$$

$$\ell_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) + (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) + \gamma_m \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i \in N^\Omega, \\ (-\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), & i \in N^{\Gamma_3}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i \in N^{\Gamma_4}, \end{cases}$$

$$\ell_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) + \rho c_\rho (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)), & i \in N^\Omega, \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), & i \in N^{\Gamma_5}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i \in N^{\Gamma_6}, \end{cases}$$

$$g_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{(1+\bar{e})(1+2\xi)}{3\gamma\alpha_1} \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)), & i \in N^\Omega, \\ (\mathbf{v} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), & i \in N^{\Gamma_1}, \\ 0, & i \in N^{\Gamma_2}, \end{cases}$$

$$g_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)), & i \in N^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), & i \in N^{\Gamma_3}, \\ 0, & i \in N^{\Gamma_4}, \end{cases}$$

$$g_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{(1+\bar{e})(1+2\xi)}{3\gamma a_1} \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)), & i \in N^\Omega, \\ (\boldsymbol{\mu} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), & i \in N^{\Gamma_1}, \\ 0, & i \in N^{\Gamma_2}, \end{cases}$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = h_0(X_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\tilde{f}_i^2 = c_0(X_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(X_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$r_{ij} = \|X_j - X_i\|_2 = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Для доведення існування та єдності розв'язку задачі Коші (11)–(14) наведемо міркування, аналогічні, як у роботі [17, розд. 6, §3]. Для цього, поперше, задачу Коші (11)–(14) запишемо у вигляді

$$\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{F}(\mathbf{C}), \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (16)$$

де  $\mathbf{C} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S})^\top$ , а матриця  $\mathbf{M}$  має блочну структуру і своїми складовими містить матриці  $\mathbf{M}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Аналогічну структуру мають матриці  $\mathbf{L}(\mathbf{C})$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}$  і вектор-стовпці  $\mathbf{F}(\mathbf{C})$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}$ . По-друге, для спрощення будемо вважати, що серед граничних умов (5) є умови лише першого роду. Припустимо, що на межі  $\Gamma \in N^\Gamma$  вузлів. Тоді в системі (15) буде  $3N^\Gamma$  рівнянь, які відповідають граничним умовам першого роду і які утворюють СЛАР. Зважаючи на лінійну незалежність РБФ [21], з цієї системи можна виразити  $3N^\Gamma$  невідомих через інші  $3(N - N^\Gamma)$  невідомих вектори  $\mathbf{C}$ , причому таке подання єдине. Отже, насправді система (15) буде містити  $3(N - N^\Gamma)$  диференціальних рівнянь на  $3(N - N^\Gamma)$  невідомих. Матриця  $\mathbf{M}$  системи (15), з якої викреслено рівняння вказаної СЛАР і відповідні їм стовпці, є симетричною та додатно визначеною [21]. Тоді існує  $\mathbf{M}^{-1}$ . Отже, систему (15) можна подати у вигляді

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{P}(\mathbf{C}, t),$$

де  $\mathbf{P}(\mathbf{C}, t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{C})$ . При виконанні припущень, зроблених щодо коефіцієнтів рівнянь крайової задачі (1)–(6), функції  $\mathbf{P}(\mathbf{C}, t)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{C}}$  є неперервними [17]. Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (15), (16) [18], а, отже, і задачі Коші (11)–(14). Таким чином, при виконанні вказаних припущень існує єдиний наближений розв'язок крайової задачі (1)–(6) згідно з методом РБФ.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (11)–(14) поділимо часовий відрізок  $[0, t_0]$  на  $m$  однакових частин з кроком  $\tau = \frac{t_0}{m}$ . Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (11)–(13) можна знайти за допомогою схеми Кранка – Ніколсона [17]. Однак за цією схемою

на кожному часовому шарі необхідно розв'язувати систему нелінійних рівнянь. Щоб уникнути цього, для знаходження наближених розв'язків задачі Коші використаємо схему предиктор-коректор [17], яка, наприклад, для системи нелінійних диференціальних рівнянь (15) має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{W}^{(j+1)} - \mathbf{C}^{(j)}}{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{C}^{(j)}) \cdot (\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{C}^{(j)}) &= \mathbf{F}(\mathbf{C}^{(j)}), \\ \mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{C}^{(j+1)} - \mathbf{C}^{(j)}}{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{L} \left( \frac{1}{2} [\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{C}^{(j)}] \right) \cdot (\mathbf{C}^{(j+1)} + \mathbf{C}^{(j)}) &= \\ &= \mathbf{F} \left( \frac{1}{2} [\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{C}^{(j)}] \right), \end{aligned}$$

де  $\mathbf{W}$  – допоміжна вектор-функція. Верхнім індексом ( $j$ ) позначено відповідні функції при  $t = j\tau$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ .

**Результати чисельних експериментів.** Вияснення оцінки впливу тепломасопереносу на процес фільтраційної консолідації ґрунту для тривимірної задачі проведено на тестовому прикладі. Розглянуто задачу фільтраційної консолідації масиву двофазного глинистого ґрунту форми куба з довжиною ребра 10 м (рис. 1) під впливом миттєво прикладеного зовнішнього навантаження в області  $L_1L_2L_3L_4$  інтенсивністю  $q = 10^6$  Па з такими вихідними даними:

$$\begin{aligned} v_{11} = v_{22} = v_{33} &= 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, \\ v_{12} = v_{13} = v_{21} = v_{23} = v_{31} = v_{32} &= 0 \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, \\ \bar{e} = 0.55, \quad \xi = 0.75, \quad a_1 &= 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{Н}, \\ D_{11} = D_{22} = D_{33} &= 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}, \\ D_{12} = D_{13} = D_{21} = D_{23} = D_{31} = D_{32} &= 0 \text{ м}^2/\text{доба}, \\ k_{11} = k_{22} = k_{33} = k(C, T), \quad k_{12} = k_{13} = k_{21} = k_{23} = k_{31} = k_{32} &= 0 \text{ м}/\text{доба}, \\ \gamma_m = 0 \text{ доба}^{-1}, \quad C_m = 350 \text{ г}/\text{літр}, \quad \gamma = 10^4 \text{ Па}/\text{м}^3, \quad \rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3, \\ \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} &= 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/(\text{град} \cdot \text{доба}), \\ \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{23} = \mu_{31} = \mu_{32} &= 0 \text{ м}^2/(\text{град} \cdot \text{доба}), \\ c_p = 4.2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{град}), \quad c_T = 2137 \text{ кДж}/(\text{м}^3 \cdot \text{град}), \\ \lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} &= 108 \text{ кДж}/(\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), \\ \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{21} = \lambda_{23} = \lambda_{31} = \lambda_{32} &= 0 \text{ кДж}/(\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), \\ T_1 &= 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right). \end{aligned}$$

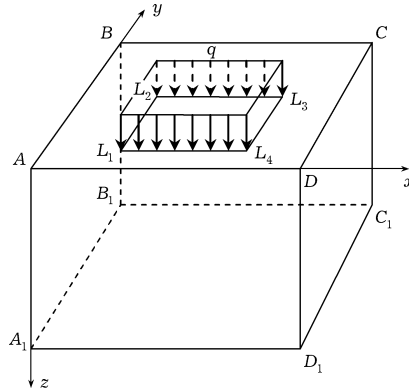


Рис. 1

Область  $L_1L_2L_3L_4$  – квадрат зі сторонами, паралельними відповідним осям координат при  $x \in [2, 8]$ ,  $y \in [2, 8]$ .

У рівнянні (1) покладаємо  $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0$ , оскільки зовнішнє навантаження вважається миттєво прикладеним і незмінним у часі [13]. Функцію  $T_1$  визначали з умов сезонних коливань температури, причому  $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_{\min} = 4^\circ\text{C}$ . Межі  $L_1L_2L_3L_4$  та  $A_1B_1C_1D_1$  непроникні, а межі  $ABB_1A_1$ ,  $DCC_1D_1$ ,  $AA_1D_1D$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $ABCD/L_1L_2L_3L_4$  – дренавані. На ме-



жах  $L_1L_2L_3L_4$  і  $A_1B_1C_1D_1$  для шуканих функцій задаємо умови непроникності. Для концентрації солей на  $ABB_1A_1$ ,  $DCC_1D_1$ ,  $AA_1D_1D$ ,  $BCC_1B_1$  задаємо граничні умови швидкого виносу солей, а для температури – умови теплоізоляції. На  $ABCD/L_1L_2L_3L_4$  задано граничні умови першого роду.

Початковий розподіл надлишкових напорів  $h_0(X)$  залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай маємо довільний закон розподілу навантаження  $q(x, y, t)$  в області  $\Phi$  його прикладення, яка лежить у площині  $z = 0$ . Початкове значення надлишкового напору для точки, що лежить в області  $\Phi$  прикладення навантаження, визначаємо за формулою [13]

$$h_0(x, y, z)|_{z=0} = \frac{q(x, y, 0)}{\gamma} + h_p, \quad (x, y) \in \Phi,$$

де  $\gamma$  – питома вага порового розчину;  $h_p$  – значення напору в точці  $(x, y) \in \Phi$  до прикладення навантаження.

Для довільної точки  $X = (x, y, z)$  області консолідації  $\Omega$ , що не належить до області  $\Phi$  прикладення навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначаємо за формулою [13]

$$h_0(X) = \frac{\Theta(X)}{3\gamma}, \quad (17)$$

де  $\Theta(X) = \iint_{\Phi} \frac{q(\xi, \eta, 0)}{\pi} (1 - \nu) \frac{z}{r^3} d\xi d\eta$  – сума головних напружень у точці  $X$ ;

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Для обчислення інтеграла і для визначення  $\Theta(X)$  у (17), коли, наприклад, область  $\Phi$  прикладення навантаження є прямокутником  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$ , використовували квадратурну формулу 9-го порядку точності [14, с. 141]. Для застосування цієї формули попередньо прямокутник  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$  відображали на квадрат  $\xi \in [-1, 1]$ ,  $\eta \in [-1, 1]$ .

Для коефіцієнта фільтрації використовували залежність від концентрації солей і температури порової рідини, наведену в [10], яку апроксимували методом радіальних базисних функцій. Нехай у замиканні області  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  є  $n$  вузлових точок  $\mathbf{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . При цьому в кожному вузлі відоме значення  $f^{(i)} = f(\mathbf{X}^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , деякої, взагалі кажучи, невідомої функції  $f(\mathbf{X})$ . Метод радіальних базисних функцій полягає в наближенні функції  $f(\mathbf{X})$  за допомогою ряду [21]

$$f_n(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad (18)$$

де  $c_j$  – невідомі коефіцієнти;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – деякі відомі РБФ;  $r_j = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|_2$ .

Припускаючи, що значення функцій  $f(\mathbf{X})$  та  $f_n(\mathbf{X})$  у кожній вузловій точці  $\mathbf{X}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , співпадають, з (18) отримуємо СЛАР з  $n$  рівнянь на  $n$  невідомих

$$\Phi \cdot \mathbf{C} = \mathbf{F}, \quad (19)$$

де  $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ ,  $\Phi = \{\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon)\}_{i,j=1}^n$ ,  $\mathbf{F} = \{f^{(i)}\}_{i=1}^n$ ,  $r_{ij} = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2$ . Матриця  $\Phi$  симетрична та додатно визначена, отже, для неї завжди існує обернена, і СЛАР (19) завжди має розв'язок.

Для чисельних експериментів використовували мультিকвадратичну РБФ  $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ . Процес консолідації досліджували протягом одного року з кроком  $\tau = 30$  діб. Розрахункову область покривали вузловою сіткою з кроками 1 м за кожною змінною.

При наведених вхідних даних у площині  $x = 5$  м обчислено значення надлишкового напору  $h(X, t)$  в ґрунті без урахування впливу тепломасопереносу при  $t = 180$  діб (рис. 2) і різниці  $\Delta h(X, t)$  між значеннями надлишкових напорів у ґрунті з урахуванням і без урахування впливу тепломасопереносу при  $t = 180$  діб (рис. 3), концентрації солей  $c(X, t)$  і температури  $T(X, t)$  при  $t = 330$  діб (відповідно рис. 4 і рис. 5).

Як видно з рис. 3, тепломасоперенос має суттєвий вплив на процес консолідації ґрунту. Так, з урахуванням впливу тепломасопереносу надлишкові напори розсіюються повільніше. Це може зашкодити стійкості споруд, зведених на цих ґрунтах.

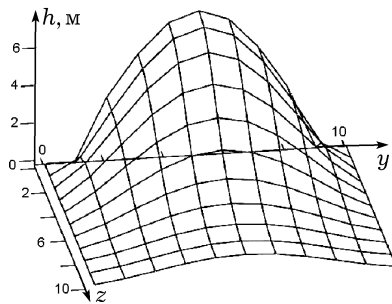


Рис. 2

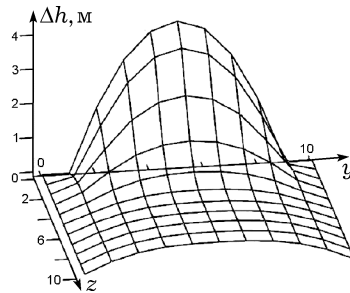


Рис. 3

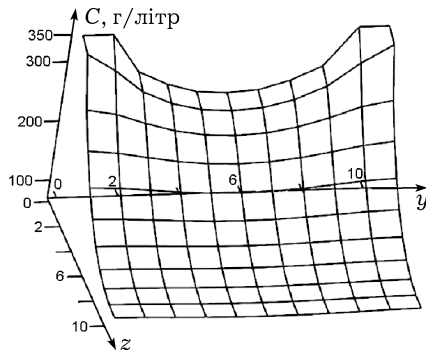


Рис. 4

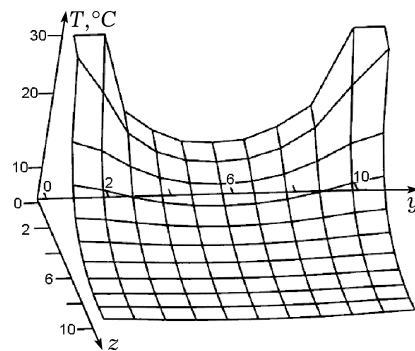


Рис. 5

З метою порівняння виконано розрахунки при таких самих вхідних даних для двовимірного випадку. Отримані результати для надлишкових напорів  $h(y, z, t)$  і різниці  $\Delta h(y, z, t)$  при  $t = 180$  діб наведено на рис. 6 і рис. 7.

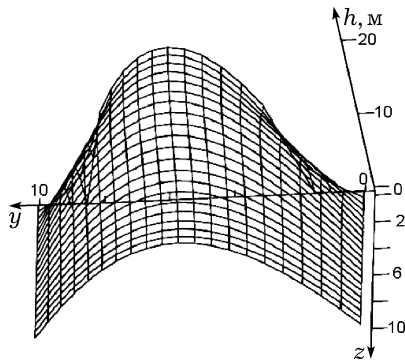


Рис. 6

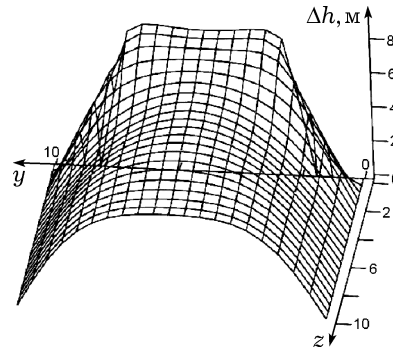


Рис. 7

Як бачимо на рис. 2 і рис. 6, самі надлишкові напори  $h(y, z, t)$  без урахування впливу тепломасопереносу у двовимірному випадку є у 2.5 рази більшими, ніж при розрахунках у тривимірному випадку. Це ж стосується і різниці  $\Delta h(y, z, t)$  між надлишковими напорами з урахуванням та без урахування тепломасопереносу (рис. 3 і рис. 7).

**Висновки.** Аналіз результатів проведених чисельних експериментів дозволяє зробити такі висновки:

– процеси тепломасопереносу мають суттєвий вплив на розподіл надлишкових напорів у ґрунті. Зокрема, з урахуванням цих процесів отримуємо в розрахунках сповільнення розсіювання надлишкових напорів. З точки зору механіки ґрунтів це є негативним явищем, оскільки підвищення значень надлишкових напорів веде до зменшення коефіцієнта стійкості ґрунтових основ [13];

– зменшуючи розмірність задачі, отримуємо завищені прогнози розподілу надлишкових напорів у ґрунті, що призводить до збільшення термінів проведення будівельних робіт на ґрунтових масивах, які консолідуються. Отже, доцільно розв'язувати саме просторові задачі фільтраційної консолідації.

Питання теоретичного встановлення оцінки точності отриманих чисельних розв'язків планується розглянути в подальших дослідженнях.

1. *Вабищевич П. Н., Самарский А. А.* Монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии на треугольных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – **42**, № 9. – С. 1368–1382.
2. *Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувьркин Г. Н.* Приближенные методы математической физики. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 700 с.
3. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Математичне моделювання впливу термічного розширення на надлишкові напори в насичених ґрунтах // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2007. – Вип. 12. – С. 68–77.
4. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
5. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Математичне моделювання фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту за наявності солепереносу в неізотермічних умовах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 157–166.
6. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Порівняльний аналіз чисельних розв'язків двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву при наявності переносу солей в неізотермічному режимі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. 3. – С. 165–176.
7. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Числове моделювання стабілізованими схемами МСЕ фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням тепломасопереносу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 59–70.
8. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Числове розв'язання двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву за наявності перенесення солей у неізотермічному режимі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2006. – Вип. 11. – С. 148–159.
9. *Власюк А. П., Мартинюк П. М., Каленик М.* Числове розв'язування двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву за наявності тепломасоперенесення в деформівній області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2007. – Вип. 13. – С. 78–89.
10. *Власюк А. П., Мартинюк П. М., Козюк О. В.* Експериментальні залежності характеристик ґрунтів від впливу техногенних факторів та їх обробка за методом найменших квадратів // Вісн. Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування. – 2007. – Вип. 1 (37). – С. 268–281.
11. *Власюк А. П., Мартинюк П. М., Федорчук Н. А.* Двовимірна задача фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням повзучості його скелету в умовах тепло-солепереносу // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 121–126.
12. *Власюк А. П., Мартинюк П. М., Фурсович О. Р.* Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засолених ґрунтів в неізотермічному режимі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 197–204.
13. *Иванов П. Л.* Ґрунты и основания гидротехнических сооружений. Механика ґрунтов. – Москва: Высш. шк., 1991. – 447 с.

14. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. – Москва: Наука, 1966. – 372 с.
15. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – Москва: Наука, 1981. – 416 с.
16. Савула Я. Г., Стягар А. О. Розв'язання задачі перенесення забруднень безсітковим методом Петрова-Гальоркіна // Відбір і обробка інформації. – 2007. – Вип. 27 (103). – С. 79–82.
17. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
18. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1968. – 468 с.
19. Boztosun I., Charafi A., Zerroukat M., Djidjeli K. Thin-plate spline radial basis function scheme for advection-diffusion problems // Electronic J. of Boundary Elements. – 2002. – 2. – P. 267–282.
20. Buhmann M. D. A new class of radial basis functions with compact support // Math. of Comput. – 2000. – 70, No. 233. – P. 307–318.
21. Buhmann M. D. Radial basis functions: Theory and implementations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 260 p.
22. Franke C., Schaback R. Convergence order estimates of meshless method using radial basis functions // Adv. Comput. Math. – 1998. – 8. – P. 381–399.
23. Franke C., Schaback R. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions // Appl. Math. and Comput. – 1998. – 93. – P. 73–82.
24. Giesl P., Wendland H. Meshless collocation: error estimates with application to dynamical systems: Preprint/Institut für Numerische und Angewandte Mathematik; 2006-12. – Göttingen, 2006. – 29 p.
25. Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H., Power H. Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method // Comput. Mech. – 1998. – 21. – P. 141–148.
26. Kansa E. J. Multiquadrics: A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics: I. Surface approximations and partial derivative estimates // Computers & Math. with Appl. – 1990. – 19. – P. 127–145.
27. Kansa E. J. Multiquadrics: A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics: II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // Computers & Math. with Appl. – 1990. – 19. – P. 147–161.
28. Kowalczyk P., Mrozowski M. Mesh-free approach to Helmholtz equation based on radial basis functions // J. Telecommunic. and Inform. Technology. – 2005. – 2. – P. 71–74.
29. Liu G. R. Mesh free methods: Moving beyond the finite element method. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 693 p.
30. Sarra S. A. Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations // Appl. Numer. Math. – 2005. – 54, No. 1. – P. 79–94.

#### **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕХНОГЕННЫХ ФАКТОРОВ МЕТОДОМ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ**

*Применен безсеточный метод для нахождения приближенного решения краевой задачи, описывающей математическую модель процесса фильтрационной консолидации в трёхмерной области. Он базируется на методе коллокаций с использованием радиальных базисных функций. Приведены результаты численных расчетов, которые свидетельствуют об эффективности предложенного подхода.*

#### **NUMERICAL SOLUTION OF 3-D SOIL FILTRATION CONSOLIDATION PROBLEMS TAKING INTO ACCOUNT SALT AND HEAT TRANSFER BY THE RADIAL BASIS FUNCTION METHOD**

*A meshless method is used to determine an approximate solution of the boundary-value problem of 3-D soil filtration consolidation taking into account salt and heat transfer. It is based on the collocation methods with use of radial basis functions. The numerical experiments are carried out. It has been shown that meshless methods can be alternative to the mesh ones for the corresponding boundary-value problems.*

Нац. ун-т водного госп-ва  
та природокористування, Рівне

Одержано  
12.09.08