

## АППАРАТ И ПРИЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКОСТЬЮ И ПАРАБОЛОИДОМ ВРАЩЕНИЯ

*Построены новые базисные решения уравнений равновесия трансверсально-изотропного параболоида вращения и получены для них теоремы сложения, выражающие их через цилиндрические решения для полупространства и наоборот. Исследована задача о действии осевой сосредоточенной силы на упругое трансверсально-изотропное полупространство с неподвижным включением в форме параболоида вращения. Задача решена обобщенным методом Фурье и сведена к системе интегральных уравнений с оператором Фредгольма при условии отсутствия пересечения границ полупространства и включения. Рассмотрена зависимость напряжений от формы параболоидального включения и от расстояния между граничными поверхностями, проанализированы результаты счета.*

Исследование напряженно-деформированного состояния в пространственных канонических телах с усложненными физико-механическими свойствами, в частности, с трансверсальной изотропией материала тела – одно из важных направлений современной науки [12]. Точные решения уравнения Ламе для параболоида вращения разными подходами были построены в работах Ю. Н. Подильчука [7] и А. Ф. Улитко [10, 11]. В первом случае был использован метод, основанный на специальном выборе вспомогательных гармонических функций в общем представлении вектора перемещения в форме Папковича – Нейбера. Во втором – был использован метод собственных векторных функций. В работе А. Г. Николаева [2] точные решения уравнения Ламе для параболоида вращения построены в виде набора базисных векторных функций. Выбор вспомогательных гармонических функций осуществлен иначе, чем в [7]. Определение и доказательство базисности приведено в работе [3]. Предложенная форма решений наиболее удобна для реализации обобщенного метода Фурье (ОМФ) в пространственных многосвязных областях [5]. Некоторые приложения этого метода приведены в [9]. Точное решение системы уравнений равновесия в перемещениях для трансверсально-изотропного параболоида вращения дано в работе [8].

В настоящей статье приведено построение базисных перемещений трансверсально-изотропного параболоида вращения, аналогичных перемещениям [2]. Для построенных решений получены теоремы сложения «полупространство – параболоид». Они распространяют аппарат обобщенного метода Фурье, разработанный в [4] без учета решений для параболоида, на трансверсально-изотропные тела, ограниченные такими поверхностями.

Рассмотрим в исходной цилиндрической системе координат  $(\rho, z, \varphi)$  уравнение параболоида вращения

$$z = c_1 \rho^2 - c_2, \quad c_j > 0.$$

Введем три параболоидальные системы координат  $(\beta_j, \alpha_j, \varphi)$ ,  $j = 1 \div 3$ , которые связаны с соответствующими декартовыми системами координат  $(x_j, y_j, z_j)$  стандартными формулами:

$$z_j = \frac{a_j}{2} (\alpha_j^2 - \beta_j^2), \quad \rho_j = a_j \alpha_j \beta_j, \quad (1)$$

где  $\alpha_j, \beta_j \geq 0$ ;  $a_j > 0$  – параметры параболоидальных систем координат.

Свяжем три введенные декартовы системы координат с исходной основной декартовой системой такими соотношениями:

$$\rho = \rho_j, \quad z = \sqrt{v_j} (z_j + \gamma_j), \quad (2)$$

где  $\sqrt{v_j} > 0$ ,  $\gamma_j$  – параметры, которые будут подобраны далее.

Зададим поверхность параболоида  $z = c_1 \rho^2 - c_2$  в параболоидальных координатах в виде  $\beta_j = \beta_{j0}$ ,  $j = 1 \div 3$ . Уравнение исходной поверхности в  $j$ -й декартовой системе координат принимает вид

$$z_j = \frac{\rho_j^2}{2a_j\beta_{j0}^2} - \frac{a_j\beta_{j0}^2}{2}. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) получим

$$z = \rho^2 \frac{\sqrt{v_j}}{2a_j\beta_{j0}^2} - \sqrt{v_j} \left( \frac{a_j\beta_{j0}^2}{2} - \gamma_j \right).$$

Последнее равенство задает поверхность исходного параболоида, если

$$a_j\beta_{j0}^2 = \frac{\sqrt{v_j}}{2c_1}, \quad \gamma_j = \frac{\sqrt{v_j}}{4c_1} - \frac{c_2}{\sqrt{v_j}}.$$

Заметим, что на этой поверхности определенным образом связаны координаты  $\alpha_j$ ,  $j = 1 \div 3$ . А именно, на поверхности  $\beta_j = \beta_{j0}$  при условии  $\sqrt{v_j} a_j = 1$  справедливо соотношение  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ .

В параболоидальных системах координат введем базисные гармонические функции

$$u_{\lambda, m, j}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = \begin{cases} K_m(\lambda\beta_j) \\ I_m(\lambda\beta_j) \end{cases} J_m(\lambda\alpha_j) e^{im\varphi}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

регулярные в областях  $\Omega_9^{\pm} = \{(\alpha_j, \beta_j, \varphi) : \beta_j \gtrless \beta_{j0}\}$ . В (4) приняты стандартные обозначения:  $J_m(x)$ ,  $I_m(x)$  и  $K_m(x)$  – обычная и модифицированная функции Бесселя первого рода и функция Макдональда.

Для определения комбинаций гармонических функций, которые обеспечивают точность решений на граничной поверхности  $\partial\Omega_9^{\pm}$ , воспользуемся интегральным представлением [1]

$$\begin{aligned} u_{\lambda, m, j}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mt} \left\{ e^{-im\frac{\pi}{2}} H_0^{(1)} \left( \lambda \sqrt{2(z_j + ip \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{im\frac{\pi}{2}} H_0^{(2)} \left( \lambda \sqrt{2(z_j - ip \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}} \right) \right\} dt, \\ \lambda &> 0, \quad \alpha_j > 0, \quad \beta_j > 0, \quad \varphi \in (-\pi/2, \pi/2), \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $H_0^{(1)}(x)$ ,  $H_0^{(2)}(x)$  – функции Ханкеля первого и второго рода.

Дифференцирование под знаком интеграла в (5) приводит к тождеству

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} u_{\lambda, m, j}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) &= \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mt} \left\{ e^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda H_1^{(1)} \left( \lambda \sqrt{2(z_j + ip \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}} \right)}{a \sqrt{2(z_j + ip \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}}} - \right. \end{aligned}$$

$$- e^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda H_1^{(2)} \left( \lambda \sqrt{2(z_j - i\rho \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}} \right)}{a \sqrt{2(z_j - i\rho \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}}} \Bigg\} dt. \quad (6)$$

Учитывая формулу дифференцирования функций Ханкеля

$$\frac{d}{dp} [pH_1^{(i)}(p)] = pH_0^{(i)}(p),$$

из представления (6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial z_j} u_{\lambda, m, j}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) &= \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mt} \left\{ e^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{a_j} H_0^{(1)} \left( \lambda \sqrt{2(z_j + i\rho \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{a_j} H_0^{(2)} \left( \lambda \sqrt{2(z_j - i\rho \operatorname{ch}(t - i\varphi)) \frac{1}{a_j}} \right) \right\} dt = \\ &= -\frac{\lambda}{a_j} u_{\lambda, m, j}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi). \end{aligned}$$

Таким же способом преобразуются дифференциальные выражения

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\pm i\varphi} D^{\pm} u_{\lambda, m, j}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = \pm u_{\lambda, m \pm 1, j}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi),$$

где  $D^{\pm} = \frac{\partial}{\partial \rho} \pm \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

Аналогичные формулы можно записать для внутренних решений уравнения Лапласа:

$$a_j \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \frac{\partial}{\partial z_j} u_{\lambda, m, j}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = -u_{\lambda, m, j}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi),$$

$$a_j \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} e^{-i\varphi} D^- u_{\lambda, m, j}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = u_{\lambda, m-1, j}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi),$$

$$a_j \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} e^{i\varphi} D^+ u_{\lambda, m, j}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = -u_{\lambda, m+1}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi).$$

Теперь рассмотрим выражение

$$\frac{a_j}{2} \left[ \alpha_j^2 + \beta_j^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \right) \right] \left[ e^{-i\varphi} D^- \mathbf{e}_{-1} + e^{i\varphi} D^+ \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial z_j} \mathbf{e}_0 \right] u_{\lambda, m, j}^{\pm(9)},$$

в котором  $\mathbf{e}_{\mp 1} = \frac{\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y}{2}$ ,  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$ .

Преобразуем каждый из операторов, входящий в последнее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{a_j}{2} \left[ \alpha_j^2 + \beta_j^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \right) \right] \frac{\partial}{\partial z_j} u_{\lambda, m, j}^{\pm(9)1} &= \\ &= \frac{e^{im\varphi}}{2} \left\{ \left[ p_j u_m^{\pm} \frac{d}{dp_j} J_m - q_j \frac{d}{dq_j} u_m^{\pm} J_m \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ p_j u_m^{\pm} \frac{d}{dp_j} J_m + q_j \frac{d}{dq_j} u_m^{\pm} J_m \right] \right\} = -q_j \frac{d}{dq_j} u_m^{\pm} J_m e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a_j}{2} \left[ \alpha_j^2 + \beta_j^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \right) \right] \cdot [e^{-i\varphi} D^-] \cdot u_{\lambda, m, j}^{\pm(9)1} = \\
& = \frac{e^{i(m-1)\varphi}}{2} \left\{ q_j u_m^\pm \frac{d}{dp_j} J_m + p_j \frac{d}{dq_j} u_m^\pm J_m + m \frac{q_j^2 + p_j^2}{q_j p_j} u_m^\pm J_m \mp \right. \\
& \left. \mp \left[ p_j u_{m-1}^\pm \frac{d}{dp_j} J_{m-1} + q_j \frac{d}{dq_j} u_{m-1}^\pm J_{m-1} \right] \right\} = \\
& = \mp q_j \frac{d}{dq_j} u_{m-1}^\pm J_{m-1} e^{i(m-1)\varphi},
\end{aligned}$$

где  $q_j = \lambda \beta_j$ ,  $p_j = \lambda \alpha_j$ ,  $u_m^\pm(q_j) = \begin{Bmatrix} K_m(q_j) \\ I_m(q_j) \end{Bmatrix}$ .

Переходя в тождестве с  $D^-$  к комплексно сопряженным величинам с заменой  $m$  на  $-m$ , получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{a_j}{2} \left[ \alpha_j^2 + \beta_j^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \right) \right] \cdot [e^{-i\varphi} D^+] \cdot u_{\lambda, m, j}^{\pm(9)} = \\
& = \mp q_j \frac{d}{dq_j} u_{m+1}^\pm J_{m+1} e^{i(m+1)\varphi}.
\end{aligned}$$

На основании полученных формул строим базисные перемещения для трансверсально-изотропного параболоида в виде

$$\mathbf{U}_{s, \lambda, m}^{\pm(9)}(\alpha_s, \beta_s, \varphi) = a_s \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \mathbf{D}_s u_{\lambda, m, s}^{\pm(9)}(\alpha_s, \beta_s, \varphi), \quad (7)$$

где

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} \frac{\partial}{\partial z_s}, \quad s = 1, 2, \quad \mathbf{D}_3 u = \text{rot}(u \mathbf{e}_z),$$

а  $v_s$  – положительные корни уравнения

$$C_{11} C_{44} v^2 - (C_{33} C_{11} - 2C_{13} C_{44} - C_{13}^2) v + C_{33} C_{44} = 0,$$

где, в свою очередь,  $C_{ij}$  – упругие постоянные, а  $k_s$  определяются формулами

$$k_s = \frac{C_{11} \sqrt{v_s} - C_{44}}{C_{13} + C_{44}}.$$

Приведем координатную форму записи частных решений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{j, \lambda, m}^{\pm(9)} &= \mp u_{\lambda, m-1, j}^{\pm(9)} \mathbf{e}_{-1} \pm u_{\lambda, m+1, j}^{\pm(9)} \mathbf{e}_1 - \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} u_{\lambda, m, j}^{\pm(9)} \mathbf{e}_0, \quad j = 1, 2, \\
\mathbf{U}_{3, \lambda, m}^{\pm(9)} &= \pm u_{\lambda, m-1, 3}^{\pm(9)} \mathbf{e}_{-1} \pm u_{\lambda, m+1, 3}^{\pm(9)} \mathbf{e}_1.
\end{aligned} \quad (8)$$

**Теоремы сложения базисных решений уравнений равновесия трансверсально-изотропных полупространства и параболоида.** Базисные перемещения для трансверсально-изотропного полупространства введены в работе [9]

$$\mathbf{U}_{j, \lambda, m}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_j u_{\lambda, m, j}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi), \quad (9)$$

где  $u_{\lambda, m, j}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = e^{\pm \lambda z_j} J_m(\lambda \rho) e^{im\varphi}$ .

**Теорема 1.** Справедливы следующие теоремы сложения, выражающие базисные перемещения для параболоида через базисные перемещения для полупространства:

$$\mathbf{U}_{j,t,m}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = - \int_0^{\infty} g_{t,j}^{(92)\lambda} \mathbf{U}_{j,\lambda,m}^{+(2)}(\rho, z_j, \varphi) d\lambda, \quad (10)$$

где  $g_{t,j}^{(92)\lambda} = \frac{1}{2\lambda} e^{-t^2/2\lambda a_j}$ ,  $z_j > 0$ ,  $j = 1 \div 3$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Теорема 2.** Справедливы следующие теоремы сложения, выражающие базисные перемещения для полупространства через базисные перемещения для параболоида:

$$\mathbf{U}_{j,\lambda,m}^{-(2)}(\rho, z_j, \varphi) = \int_0^{\infty} g_{\lambda,j}^{(29)t} \mathbf{U}_{j,t,m}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) dt, \quad (11)$$

где  $g_{\lambda,j}^{(29)t} = \frac{t}{\lambda a} e^{-t^2/2\lambda a_j}$ ,  $j = 1 \div 3$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .

Отдельно рассмотрим случай  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ . Первые два решения (7) становятся линейно зависимыми и второе из них нужно заменить на

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{2,\lambda,m}^{\pm(9)} &= (z_2 + a_2 \beta_{20}^2) \text{grad } u_{\lambda,m}^{\pm(9)} - \frac{C_{13} + 3C_{44}}{C_{13} + C_{44}} u_{\lambda,m}^{\pm(9)} e_z + \\ &+ \frac{a_2}{2} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{grad } u_{\lambda,m}^{\pm(9)} \right]. \end{aligned}$$

Теоремы сложения для него имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{2,t,m}^{+(9)}(\alpha_2, \beta_2, \varphi) &= \\ &= \int_0^{\infty} g_{t,2}^{(92)\lambda} \left[ \mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{+(2)}(\rho, z_2, \varphi) + \left( \frac{t^2}{\lambda} + a_2 \beta_{20}^2 \lambda \right) \mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{+(2)}(\rho, z_2, \varphi) \right] d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{2,\lambda,m}^{-(2)}(\rho, z_2, \varphi) &= \\ &= \int_0^{\infty} g_{\lambda,2}^{(29)t} \left[ \tilde{\mathbf{U}}_{2,t,m}^{-(9)}(\alpha_2, \beta_2, \varphi) + \left( 1 - \frac{t^2}{2\lambda a} - a_2 \beta_{20}^2 \lambda \right) \mathbf{U}_{1,t,m}^{-(9)}(\alpha_2, \beta_2, \varphi) \right] dt, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{U}}_{2,\lambda,m}^{\pm(2)}(\rho, z_2, \varphi) = \left[ z_2 \text{grad} - \frac{C_{13} + 3C_{44}}{C_{13} + C_{44}} e_z \right] u_{\lambda,m,2}^{\pm(2)}(\rho, z_2, \varphi)$ .

Полученный аппарат позволяет решать задачи теории упругости в трансверсально-изотропной среде, ограниченной поверхностью параболоида и плоскостью. Рассмотрим нормальное действие сосредоточенной силы  $P$  на трансверсально-изотропное полупространство с неподвижным включением в форме параболоида вращения (рис. 1). Предположим, что точка приложения силы находится на оси включения, а сама сила сонаправлена с осью  $Oz$  цилиндрической системы координат  $(\rho, z, \varphi)$ , рассмотренной выше. Уравнения  $z = -h$  и  $z = c_1 \rho^2 - c_2$ ,  $c_j > 0$ , задают границы полупространства и включения соответственно, ось анизотропии совпадает с осью симметрии рассматриваемого тела.

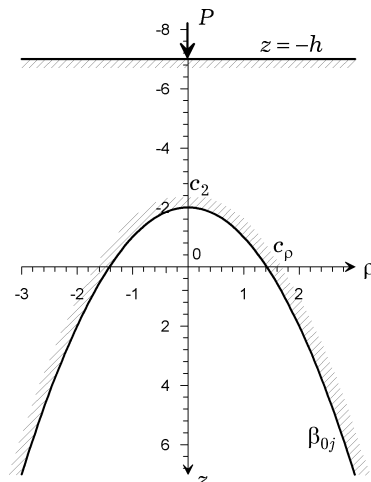


Рис. 1

Будем искать решение задачи в виде линейной комбинации решений (8) и (9):

$$U = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^{\infty} A_j(\lambda) U_{j,0,\lambda}^{-(2)}(\rho, z_j) d\lambda + \int_0^{\infty} B_j(t) U_{j,0,t}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j) dt \right\}. \quad (12)$$

Используя теоремы сложения (10), (11), преобразуем решение (12) отдельно к цилиндрическим и параболическим координатам:

$$U = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^{\infty} A_j(\lambda) U_{j,0,\lambda}^{-(2)}(\rho, z_j) d\lambda - U_{j,0,\lambda}^{+(2)}(\rho, z_j) \int_0^{\infty} B_j(t) g_{j,0,t}^{(92)\lambda} dt \right\}, \quad (13)$$

$$U = \sum_{j=1}^2 \left\{ U_{j,0,t}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j) \int_0^{\infty} A_j(\lambda) g_{j,0,\lambda}^{(29)t} d\lambda + \int_0^{\infty} B_j(t) U_{j,0,t}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j) dt \right\}. \quad (14)$$

Если  $v_j a_j = 2c_1$ , то на границе включения  $\alpha_j = \rho$ .

Сосредоточенную силу  $P$  на границе полупространства представим интегралом Ханкеля

$$\frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

понимая его в обобщенном смысле. Переходя в формуле (13) к напряжениям на границе полупространства и в (13), (14) к координатным представлениям после применения формул обращения интегрального преобразования Ханкеля, относительно неизвестных функций  $A_j(\lambda)$ ,  $B_j(t)$  получаем систему интегральных уравнений второго рода

$$\tilde{A}_s(\lambda) + \sum_{m=1}^2 \int_0^{\infty} \Omega_{sm}(\lambda, \mu) \tilde{A}_m(\mu) d\mu = \frac{(-1)^{s+1}}{\Delta_2} \frac{P}{2\pi c_{44} \sqrt{v_{3-s}}}, \quad (15)$$

$$B_j(t) = \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_1(t)} \sum_{p=1}^2 \chi_{3-p,3-j} K_{p-1}(t\beta_{3-j,0}) \times \\ \times \sum_{j=1}^2 \chi_{pj} I_{2-p}(t\beta_{j0}) \int_0^{\infty} A_j(\lambda) g_{0,\lambda,j}^{(29)t} d\lambda, \quad (16)$$

где

$$\Omega_{sm}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\Delta_2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{s+j} (1+k_j) \left( \frac{1}{\sqrt{v_j}} - \frac{1}{\sqrt{v_{3-s}}} \right) e^{-\lambda h_j} \sum_{p=1}^2 \chi_{3-p,3-j} \chi_{pm} e^{-\mu h_m} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1(t)} K_{p-1}(t\beta_{3-j,0}) I_{2-p}(t\beta_{m0}) g_{m,0,\mu}^{(29)t} g_{j,0,t}^{(92)\lambda} dt,$$

$$\chi_{sm} = \begin{cases} 1, & s=1, \\ \frac{k_m}{\sqrt{v_m}}, & s=2, \end{cases} \quad h_j = \frac{h}{\sqrt{v_j}} + \sqrt{v_j} \frac{1}{4c_1} - \frac{c_2}{\sqrt{v_j}},$$

$$\Delta_1(t) = \frac{k_2}{\sqrt{v_2}} K_0(t\beta_{20}) K_1(t\beta_{10}) - \frac{k_1}{\sqrt{v_1}} K_1(t\beta_{20}) K_0(t\beta_{10}),$$

$$\Delta_2 = (1+k_1)(1+k_2) \left( \frac{1}{\sqrt{v_1}} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \right).$$

Исследуя разрешимость интегрального уравнения (15) с ядром  $\Omega_{sm}(\lambda, \mu)$ , заметим, что выражение

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{m=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty |\Omega_{sm}(\lambda, \mu)| d\lambda d\mu \quad (17)$$

может быть оценено сверху конечной линейной комбинацией с некоторыми постоянными коэффициентами интегралов вида

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda h_j - \mu h_m} \int_0^\infty \frac{1}{|\Delta_1(t)|} K_{p-1}(t\beta_{3-j,0}) I_{2-p}(t\beta_{m0}) g_{m,0,\mu}^{(29)t} g_{j,0,t}^{(92)\lambda} dt d\lambda d\mu.$$

Внутренний интеграл в последней формуле оцениваем сверху интегралом

$$\begin{aligned} \int_0^\infty I_{2-p}(t\beta_{j0}) I_{2-p}(t\beta_{m0}) g_{m,0,\mu}^{(29)t} g_{j,0,t}^{(92)\lambda} dt = \\ = \frac{1}{2\lambda\mu a_m} \int_0^\infty I_{2-p}(t\beta_{j0}) I_{2-p}(t\beta_{m0}) t \exp\left(-\frac{t^2(\lambda a_j + \mu a_m)}{2\lambda\mu a_j a_m}\right) dt, \end{aligned}$$

который имеет точное значение

$$\frac{a_j}{2(\lambda a_j + \mu a_m)} \exp\left[\frac{(\beta_{j0}^2 + \beta_{m0}^2)\lambda\mu a_j a_m}{2(\lambda a_j + \mu a_m)}\right] I_{2-p}\left[\frac{\beta_{j0}\beta_{m0}\lambda\mu a_j a_m}{\lambda a_j + \mu a_m}\right].$$

Подынтегральные функции в формуле (17) при  $\lambda, \mu \rightarrow \infty$  асимптотически ведут себя как функции

$$\exp\left[-(h - c_2)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{v_j}} + \frac{\mu}{\sqrt{v_m}}\right) - \frac{\sqrt{v_j v_m}(\lambda - \mu)^2}{4c_1(\lambda\sqrt{v_m} + \mu\sqrt{v_j})}\right],$$

поэтому выражение (17) конечно при условии  $h > c_2$ . Таким образом, последнее условие (геометрически оно выражает отсутствие пересечения границ включения и полупространства) обеспечивает фредгольмовость оператора разрешающей системы (15), (16).

Напряжения при  $z \in (-h, -c_2]$  можно вычислять по формуле

$$\sigma_z = C_{44} \sum_{j=1}^2 (k_j + 1) \int_0^\infty (\beta_j(\lambda) e^{\lambda z_j} - A_j(\lambda) e^{-\lambda z_j}) \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (18)$$

При  $h \rightarrow \infty$  в локальной системе координат  $(\rho, z_1, \varphi)$ , начало которой расположено на границе полупространства, получаем напряженное состояние в задаче о нормальной сосредоточенной силе, приложенной к трансверсально-изотропному полупространству (аналогично задаче Буссинеска [6] в изотропном случае). Напряжения в этой задаче вычисляются явно. В частности, формула для  $\sigma_z$  при  $h \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{z-(as)} \sim \frac{Pz_1}{2\pi(1+k_1)(1+k_2)(\sqrt{v_2} - \sqrt{v_1})} \times \\ \times \left\{ \frac{1+k_1}{\left[z_1^2 \frac{1}{v_1} + \rho^2\right]^{3/2}} - \frac{1+k_2}{\left[z_1^2 \frac{1}{v_2} + \rho^2\right]^{3/2}} \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что при  $v_1 \rightarrow v_2$  из (19) следует формула Буссинеска.

Расчеты проводились для случая, когда трансверсально-изотропным материалом выбран песчаник, упругие коэффициенты которого имеют значения  $C_{11} = 57.67$  ГПа,  $C_{12} = 12.1$  ГПа,  $C_{13} = 14.75$  ГПа,  $C_{33} = 38.28$  ГПа,  $C_{44} = 15.13$  ГПа. По оси  $Oz$  отрезок  $[-h, -c_2]$  делится на 5 равных частей. Через каждую полученную точку параллельно границе полупространства проведем плоскость. На рис. 2, 3 кривые 1–5 соответствуют значениям напряжений  $\sigma = \sigma_z/\sigma_0$  в этих плоскостях: кривая 1 соответствует напряжениям в плоскости  $z = -c_2$ , проходящей через вершину параболоида, а кривая 5 – напряжениям в плоскости, наиболее близкой к границе полупространства. В каждой полученной плоскости проведен анализ напряжений в радиусе 4 ед. от оси симметрии,  $L = h - c_2$  – расстояние от вершины параболоида до границы плоскости,  $c_\rho$  – точка пересечения параболоида с осью  $O\rho$ . При постоянном значении  $c_2$  изменение  $c_\rho$  меняет форму параболоидального основания: чем меньше эта величина, тем больше кривизна поверхности. Рассчитаны зависимости напряжений от формы параболоидального включения и от расстояния между граничными поверхностями. Значения напряжений  $\sigma = \sigma_z/\sigma_0$  в зависимости от координаты  $\rho$  приведены на рис. 2 для случая  $L = 5$ , когда  $c_\rho = 0.5, 1, 2, 5$ , а на рис. 3 – для случая  $c_\rho = 1$  при  $L = 1, 3, 5, 10$ .

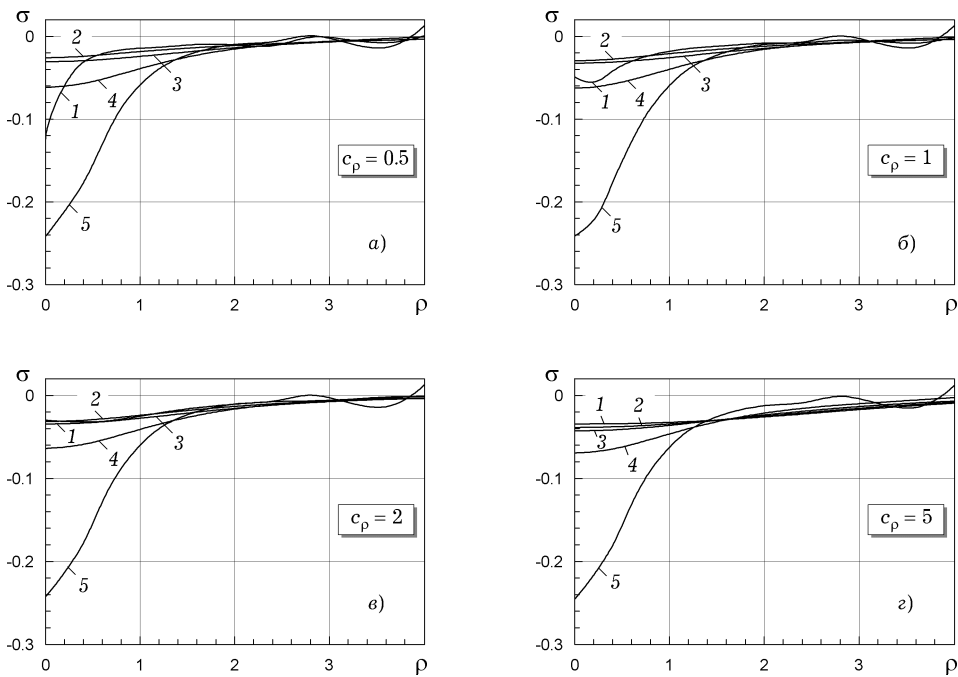


Рис. 2

На рис. 2а – рис. 2г видно, что при постоянном значении  $L$  ( $L = 5$ ) величина напряжений непосредственно под граничной плоскостью остается неизменной, а форма основания отражается на напряжениях в плоскостях, близких к параболоиду. Концентрация напряжений в окрестности вершины параболоида тем больше, чем больше кривизна основания.



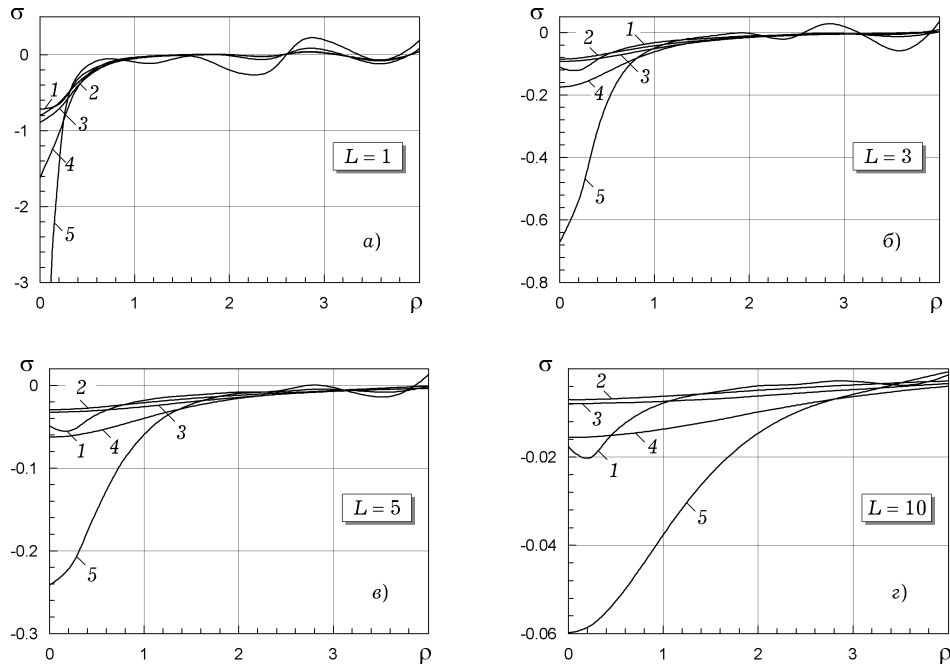


Рис. 3

Из графиков, приведенных на рис. 3, следует, что при увеличении расстояния между поверхностями полупространства и параболоида напряжения уменьшаются.

Выполнены также расчеты напряжений по формулам (18) и (19) при  $L=5$  и  $c_p=1$ . В табл. 1 приведены результаты вычислений разности  $\sigma_z - \sigma_{z_{(as)}}$ , из анализа которых следует, что при достаточно больших  $h$  напряжения вблизи границы полупространства практически совпадают.

Таблица 1

		$\sigma_z - \sigma_{z_{(as)}}$							
$\rho \backslash z$		0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4	2.8
-4		-0.0028	-0.0027	-0.0025	-0.0022	-0.0018	-0.0014	-0.0012	-0.0010
-5		-0.0020	-0.0015	-0.0011	-0.0008	-0.0006	-0.0003	-0.0015	0.0037

1. Николаев А. Г. Интегральные представления гармонических функций и теоремы сложения // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 36–40.
2. Николаев А. Г. О точных решениях уравнения Ламе // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1992. – № 7. – С. 58–61.
3. Николаев А. Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических тел // Доп. НАН України. – 1998. – № 2. – С. 78–83.
4. Николаев А. Г. Теоремы сложения перемещений трансверсально изотропных канонических тел. – Киев, 1996. – 52 с. – Деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, № 1568–Ук 96.
5. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. – Киев, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178–Ук 93.
6. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
7. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругого тела. – Киев: Наук. думка, 1984. – 304 с. – (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. – Т. 1.)

8. Подильчук Ю. Н. Упругая деформация трансверсально-изотропного параболоида вращения // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 2. – С. 12–19.  
Podil'chuk Yu. N. Elastic deformation of a transversally isotropic paraboloid of revolution // Int. Appl. Mech. – 1989. – **25**, No. 2. – P. 112–118.
9. Проценко В. С., Соловьев А. И., Денисова Т. В. Обобщенный метод Фурье для решения задач теории упругости для тела, ограниченного параболоидом и сферой // Проблемы машиностроения. – 2001. – **4**, № 1-2. – С. 36–45.
10. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 264 с.
11. Улитко А. Т. Осесимметрична деформація пружного параболоїда обертання // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 12. – С. 42–46.
12. Rahman M. Bonded contact of a flexible elliptical disk with transversely isotropic half-space // Int. J. Solids and Struct. – 1999. – **36**, No. 13. – P. 1965–1983.

**АПАРАТ І ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУР'Є  
ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ТІЛ, ОБМЕЖЕНИХ ПЛОЩИНОЮ  
І ПАРАБОЛОЇДОМ ОБЕРТАННЯ**

Побудовано нові базисні розв'язки рівнянь рівноваги трансверсально-ізоотропного параболоїда обертання та отримано для них теореми додавання, які виражають їх через циліндричні розв'язки для півпростору та навпаки. Досліджено задачу про дію осової зосередженої сили на пружний трансверсально-ізоотропний півпростір із нерухомим включенням у формі параболоїда обертання. Задачу розв'язано узагальненим методом Фур'є і зведено до системи інтегральних рівнянь з оператором Фредгольма за умови відсутності перетину границь півпростору та включення. Розглянуто залежність напружень від форми параболоїдального включення і від відстані між граничними поверхнями. Проаналізовано результати обчислень.

**APPARATUS AND APPLICATIONS OF GENERALIZED FOURIER  
METHOD FOR TRANSVERSALLY ISOTROPIC BODIES BOUNDED BY  
SURFACE AND PARABOLOID OF ROTATION**

New basic solutions of equilibrium equations of transversely isotropic paraboloid of rotation are constructed and the addition theorems expressing them in terms of cylindrical solutions for a half-space are obtained and on the contrary. The problem about effect of the axial concentrated force on elastic transversely isotropic half-space with motionless inclusion in the form of paraboloid of rotation is investigated. The problem is solved by generalized Fourier's method. The problem is reduced to a system of integral equations with Fredholm operator of index zero under condition of no intersection of boundary surfaces. Dependence of pressure on the form of paraboloid inclusion and on the distance between boundary surfaces is considered. The results of calculation are analyzed.

Нац. аерокосм. ун-т  
им. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харьков

Получено  
06.03.09