

СТІЙКІСТЬ КОНФІГУРАЦІЙ ТОЧКОВИХ ВИХОРІВ НА СФЕРІ

Досліджується рух точкових вихорів на сфері. Методами лінійної алгебри знаходяться симетричні положення відносної рівноваги. Наводиться каталог симетричних конфігурацій, які базуються на правильних многогранниках. Проводиться дослідження стійкості знайдених положень рівноваги.

1. Вступ. Вихрова динаміка як широкий розділ сучасної гідродинаміки бере свій початок з класичного мемуара Г. Гельмгольца [21]. У цій роботі Гельмгольц не тільки означив вихровий рух кінематично (до нього це зробив Стокс у 1845 році), але й довів до досконалості динамічну теорію руху вихорів в ідеальній (нев'язкій) нестисливій рідині у вигляді трьох законів збереження приблизно в тій же формі, в якій вони наведені у всіх підручниках з гідродинаміки. Основний зміст динамічної теорії міститься в законі збереження вихрового руху: в ідеальній рідині вихори не можуть зникнути і їх інтенсивність постійна в часі. До збереження вихорів у часі додається і збереження у просторі: інтенсивність вихорів постійна вздовж кожної вихрової трубки; ці трубки або є замкнутими, або виходять на границю рідини. До сьогодні накопичена величезна кількість літератури (достатньо повний огляд ранніх публікацій наведено у [28]), яка включає як класичні підручники з гідромеханіки, так і спеціальні монографії з вихрової динаміки [1, 3, 6, 10, 12, 15, 16, 29].

Особливий інтерес представляє динаміка точкових вихорів на площині, тобто взаємодія паралельних вихрових ниток. На перший погляд, гамільтонові рівняння руху таких точкових вихорів, виведені вперше у книзі [9], є чисто кінематичними умовами руху точки, в якій знаходиться вихор, у наведеному полі швидкостей від інших вихорів. Проте, як зазначено у [8, §21], ці рівняння виражають динамічні закони руху, які впливають з рівнянь руху Ейлера для ідеальної нестисливої рідини.

До недавнього часу значно менше уваги було приділено руху точкових вихорів на сфері. І. С. Громека [7] був першим, хто звернувся до вивчення такого руху вихорів. Він, використовуючи картографічну проекцію, побудував загальні рівняння руху вихорів на циліндрі та на сфері. Громека також розглянув більш загальну задачу про рух вихорів у замкненій нерухомій області на сфері. Але його рівняння містять невідому «функцію Гріна для об'єму, який займає рідина». На жаль, ця робота пройшла майже непоміченою [5].

На відміну від Громеки, Е. Цермело [34] вивів повні рівняння руху. Хоча ці рівняння і були отримані на початку ХХ-го сторіччя, питання динаміки вихрових структур на сфері не отримало достатньої уваги в той час. Ці ж рівняння, після 70 років забуття, повторно були виведені Богомолвим у [2]. Автор вивів основні рівняння руху, показав, що система є гамільтоновою, і знайшов інваріанти руху. Богомолв також вивів рівняння руху точкових вихорів на рухомій сфері. Досить лаконічне виведення рівнянь руху точкових вихорів наведено у роботі [24]. У ній автори також вивели рівняння руху однорідних областей завихреності. У роботі [23] узагальнено метод виведення рівнянь руху на поверхні сталої кривини.

Питання стійкості вихрових конфігурацій як на сфері, так і на площині є малодослідженими на сьогодні. У багатьох роботах з цієї тематики вивчається стійкість вихорів, розташованих у вершинах правильних многокутників [25, 27]. У цих роботах досліджується стійкість вихрових кілець з однаковими або протилежними за знаком інтенсивностями вихорів. Більш складну задачу стійкості вихрового кільця з вихором на полюсі досліджено у [20]. У [32] використано метод енергії і моменту для дослідження нелінійної стійкості трьох вихорів з різними інтенсивностями на сфері. Стаття [11] є єдиною роботою, у якій досліджено стійкість конфігурацій, утворених правильними многогранниками.

У пропонованій статті зосередимось на знаходженні симетричних положень відносної рівноваги точкових вихрових структур на сфері та на дослідженні стійкості вироджених положень рівноваги.

2. Рух точкових вихорів на сфері. Вихрове поле $\boldsymbol{\omega}$ визначається як ротор поля швидкостей \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1)$$

У випадку, коли поле швидкостей описує рух нестисливої однорідної ідеальної рідини, з принципу збереження маси маємо

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Неважко переконатись, що у випадку, коли рідина рухається по поверхні сфери одиничного радіуса, можна ввести функцію течії ψ , яка визначає поле швидкостей таким чином:

$$\mathbf{u} = (\nabla\psi) \times \mathbf{e}_r, \quad (3)$$

де \mathbf{e}_r – одиничний вектор нормалі, направлений уздовж радіуса сфери. Дійсно,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot ((\nabla\psi) \times \mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r \cdot (\nabla \times (\nabla\psi)) - \nabla\psi \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_r) = \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{0} - \nabla\psi \cdot \mathbf{0} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

тобто умова (2) автоматично задовольняється. Лінії рівня функції ψ будуть також і лініями течії, тобто лініями, вздовж яких будуть рухатись частинки рідини у полі швидкостей \mathbf{u} .

Після підстановки (3) в (1) отримаємо

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (5)$$

де $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_r$. У сферичних координатах це співвідношення набуде вигляду

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\omega. \quad (6)$$

Переписавши у сферичних координатах співвідношення (3), отримаємо такий вигляд поля швидкостей:

$$\mathbf{u} = \left(0, \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right). \quad (7)$$

Оператор у лівій частині рівняння (6) носить назву оператора Бельтрамі – Лапласа. Для того щоб теорема Кельвіна для циркуляції виконувалась, тобто, щоб

$$\int_S \omega dS = 0, \quad (8)$$

де S – поверхня сфери, означимо функцію Гріна $G(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ для оператора Бельтрамі – Лапласа таким чином:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial G}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2} = \delta(\theta, \varphi, \theta', \varphi') - \frac{1}{4\pi}. \quad (9)$$

Останній доданок справа відповідає постійному полю завихреності, інтегральна циркуляція якого дорівнює -1 , тобто рівна і протилежна за знаком до інтенсивності особливості в точці (θ', φ') . Ця особливість має назву точкового вихору на сфері.

Неважко переконатись, що рівняння (9) задовольняє функція

$$G(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = -\frac{1}{2\pi} \ln \sin \left(\frac{1}{2} \gamma(\theta, \varphi, \theta', \varphi') \right), \quad (10)$$

де $\gamma(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ – центральний кут між точками з координатами (θ, φ) і (θ', φ') . Використавши тригонометричну формулу для синуса половинного

кута, отримаємо

$$G = -\frac{1}{4\pi} \ln(1 - \cos \gamma). \quad (11)$$

Ця формула є більш зручною, оскільки $\cos \gamma$ можна виразити як

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (12)$$

Користуючись вищенаведеною функцією Гріна (11), можемо знайти функцію течії ψ як розв'язок рівняння (6):

$$\psi(\theta, \varphi) = \int_S \omega(\theta', \varphi') \ln(1 - \cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (13)$$

Щоб отримати рівняння руху N точкових вихорів на нерухомій сфері, виберемо ω таким чином:

$$\omega(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\theta, \varphi, \theta_i, \varphi_i), \quad (14)$$

де Γ_i – інтенсивність i -го вихору. Після підстановки (14) у (13), використовуючи (7), отримаємо

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{\sin \theta_j \sin(\varphi - \varphi_j)}{1 - \cos \gamma_j}, \\ u_\varphi &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{\cos \theta \sin \theta_j \cos(\varphi - \varphi_j) - \sin \theta \cos \theta_j}{1 - \cos \gamma_j}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\gamma_j = \gamma(\theta, \varphi, \theta_j, \varphi_j)$.

Згідно з теоремою Гельмгольца вихори будуть рухатись як частинки рідини, тобто рівняння руху N точкових вихорів мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\sin \theta_j \sin(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \\ \sin \theta_i \dot{\varphi}_i &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\cos \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) - \sin \theta_i \cos \theta_j}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\gamma_{ij} = \gamma(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j)$.

Наведені рівняння можна записати у векторній формі [29]:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2}, \quad (17)$$

де \mathbf{x}_i – вектор, який з'єднує центр сфери з точкою, в якій знаходиться точковий вихор, тобто $\|\mathbf{x}_i\| = 1$.

Для того щоб отримати рівняння руху точкових вихорів на сфері, що обертається, до ω , визначеного у (16), потрібно додати $\omega_r = 2\Omega \cos \theta$. Тоді рівняння руху у векторній формі набудуть вигляду

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2} + \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{x}_i, \quad (18)$$

де $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$.

Зауважимо, що рівняння (16) можна подати у вигляді рівнянь Гамільтона з таким гамільтоніаном і канонічними змінними:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln \ell_{ij}, \\ P &= \sqrt{|\Gamma_i|} \cos \theta_i, \quad Q = \sqrt{|\Gamma_i|} \varphi_i, \end{aligned}$$

$$\dot{P}_i = \frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = -\frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad (19)$$

де $l_{ij}^2 = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = 2(1 - \cos \gamma_{ij})$.

Дужка Пуассона для цієї гамільтонової системи має вигляд

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma_k} \left(\frac{\partial f}{\partial \cos \theta_k} \frac{\partial g}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{\partial g}{\partial \cos \theta_k} \right), \quad \{\varphi_i, \cos \theta_j\} = \frac{\delta_{ij}}{\Gamma_i}, \quad (20)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Окрім гамільтоніана H , ця система допускає ще три інтеграли руху:

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \cos \varphi_i = \text{const}, \\ M_2 &= \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \sin \varphi_i = \text{const}, \\ M_3 &= \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cos \theta_i = \text{const}, \end{aligned} \quad (21)$$

які разом утворюють вектор $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \mathbf{x}_k$, який називають моментом завихреності [29]. Також корисно ввести до розгляду вектор, який називають центром завихреності:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{M}}{\Gamma}, \quad \text{де} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i. \quad (22)$$

Зазначимо, що H, M_1, M_2, M_3 у загальному випадку дають тільки три незалежних інволютивних інтегралів:

$$\{H, M_3\} = 0, \quad \{H, M_1^2 + M_2^2\} = 0, \quad \{M_3, M_1^2 + M_2^2\} = 0. \quad (23)$$

У випадку, коли $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, зі співвідношень

$$\{M_2, M_1\} = M_3, \quad \{M_1, M_3\} = M_2, \quad \{M_3, M_2\} = M_1 \quad (24)$$

отримаємо чотири незалежних інволютивних інтегралів. Зазначені факти сформулюємо у вигляді теореми, яка була доведена у [29].

Теорема 1. *Задача про рух 3-х вихорів на сфері повністю інтегровна для вихорів довільної інтенсивності. Якщо центр завихреності дорівнює нулеві, то задача про рух 4-х вихорів на сфері також інтегровна.*

Аналогічний результат у 1998 році незалежно отримали О. В. Борисов і В. Г. Лебедев у [3, 18, 19]. Проте, як відмітив Борисов, вперше цей результат було отримано в дисертаційній роботі Е. Цермело, яка була опублікована на початку ХХ-го століття [4, 34].

Альтернативне виведення рівнянь руху можна знайти у [2, 3, 13, 34]. Рівняння руху у стереографічній проекції, а також граничний перехід до плоского випадку наведено у [14, 29].

2. Положення рівноваги. Для знаходження положень рівноваги використаємо підхід, який дозволить знайти не тільки положення абсолютної рівноваги, а також і положення відносної рівноваги. Для спрощення викладок скористаємось рівняннями руху у векторній формі (18). Розглянемо систему із N вихорів довільної інтенсивності. Рух i -го та j -го вихору описується рівняннями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_k \times \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^2} + \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{x}_i, \\ \dot{\mathbf{x}}_j &= \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_k \times \mathbf{x}_j}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^2} + \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{x}_j. \end{aligned} \quad (25)$$

Віднявши від першого друге рівняння і домноживши на $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$, після алгебраїчних перетворень отримаємо рівняння для $\ell_{ij}^2 = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2$:

$$\frac{d\ell_{ij}^2}{dt} = \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N \Gamma_k \frac{V_{ijk}}{\pi} \left(\frac{1}{\ell_{ik}^2} - \frac{1}{\ell_{jk}^2} \right), \quad (26)$$

де $V_{ijk} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_k$.

Положення абсолютної і відносної рівноваги у задачі про рух N точкових вихорів знайдемо як положення рівноваги системи (26), тобто поклавши

$$\frac{d\ell_{ij}^2}{dt} = 0, \quad (27)$$

тоді з (26) отримаємо такі рівняння:

$$\sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N \Gamma_k \frac{V_{ijk}}{\pi} \left(\frac{1}{\ell_{ik}^2} - \frac{1}{\ell_{jk}^2} \right) = 0. \quad (28)$$

Перепишемо ці рівняння у зручній матричній формі:

$$\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} = 0, \quad (29)$$

де \mathbf{A} – матриця розміру $\frac{N(N-1)}{2} \times N$ з елементами $A_{lk} = \frac{V_{ijk}}{\pi} \left(\frac{1}{\ell_{ik}^2} - \frac{1}{\ell_{jk}^2} \right)$,

$l = i + j$, $i, j, k = 1, \dots, N$, і $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N)$ – вектор інтенсивностей вихорів.

При заданих інтенсивностях $\mathbf{\Gamma}$ задача знаходження положень рівноваги у такому формулюванні є досить складною задачею, адже для того, щоб її розв'язати, потрібно знайти всі такі матриці \mathbf{A} , в ядрі яких знаходиться наперед заданий вектор $\mathbf{\Gamma}$. Потім потрібно визначити, які зі знайдених матриць містять у собі структуру, задану співвідношенням (28). І після цього потрібно розв'язати нелінійну систему рівнянь відносно ℓ_{ij} .

Але якщо поглянути на цю задачу з іншої сторони, тобто при заданій матриці \mathbf{A} знайти всі можливі інтенсивності $\mathbf{\Gamma}$, при яких система (26) знаходиться у рівновазі, отримаємо досить просту задачу опису ядра лінійного оператора, заданого матрицею \mathbf{A} . Саме цей підхід використано для знаходження симетричних положень рівноваги у [22]. Проведемо стислий огляд знайдених положень рівноваги.

Тетраедр ($N = 4$). У випадку, коли вихори знаходяться у вершинах тетраедра, отримаємо, що всі ℓ_{ij} рівні між собою, а тому всі елементи матриці \mathbf{A} дорівнюють нулеві. Така вироджена матриця має ядро розмірності $\text{nullity}(\mathbf{A}) = N = 4$, де $\text{nullity}(\mathbf{A}) = \dim(\ker(\mathbf{A}))$. Тобто базис ядра можна вибрати у вигляді $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Це означає, що довільний набір інтенсивностей $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$ буде знаходитись у ядрі, тобто буде положенням рівноваги. Іншими словами, якщо у початковий момент вихори довільної інтенсивності знаходились у вершинах тетраедра, вони будуть залишатися у вершинах тетраедра. Цей результат продемонстровано на рис. 1.

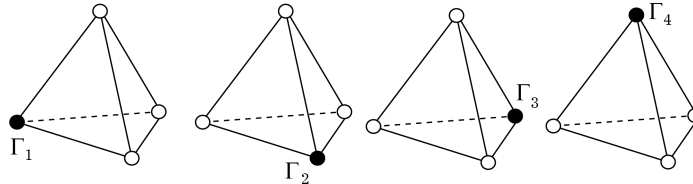


Рис. 1. Набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі тетраедра.

Октаедр ($N = 6$). У випадку, коли вихори знаходяться у вершинах октаедра, отримаємо, що або відстані між кожними трьома вихорами є однаковими, або вони знаходяться в одній площині. Тому всі елементи матриці \mathbf{A} також дорівнюють нулеві. Міркування, аналогічні тим, що наведені у випадку тетраедра, приводять до висновку, що, якщо у початковий момент вихори довільної інтенсивності знаходились у вершинах октаедра, вони будуть залишатися у вершинах октаедра (рис. 2).

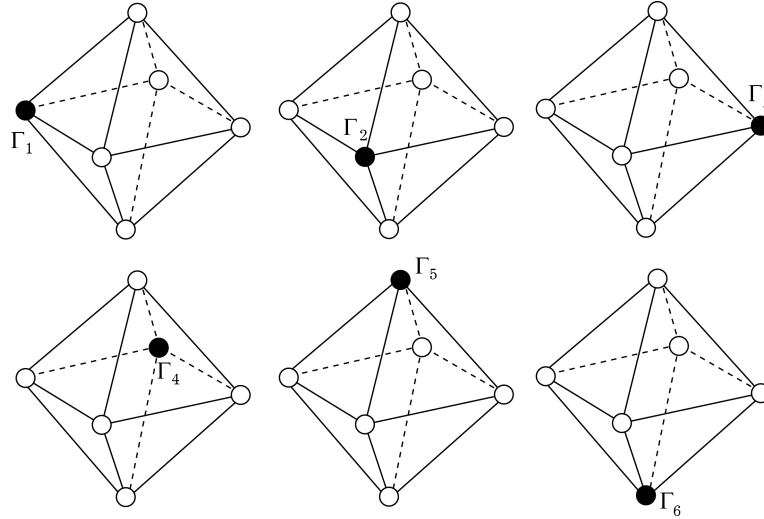


Рис. 2. набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі октаедра.

Куб ($N = 8$). У випадку куба матриця \mathbf{A} вже не буде виродженою. Отримаємо, що ядро матриці \mathbf{A} має розмірність $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 5$. Базис ядра можна вибрати у вигляді

$$\ker(\mathbf{A}) = \text{span}((1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)). \quad (30)$$

Нумерацію вершин і вигляд базису зображено на рис. 3 та рис. 4.

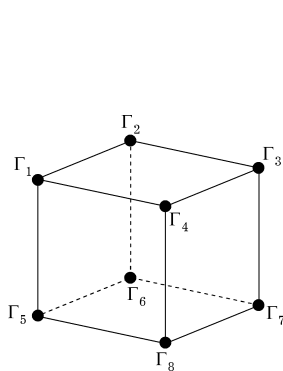


Рис. 3. Нумерація вершин куба.

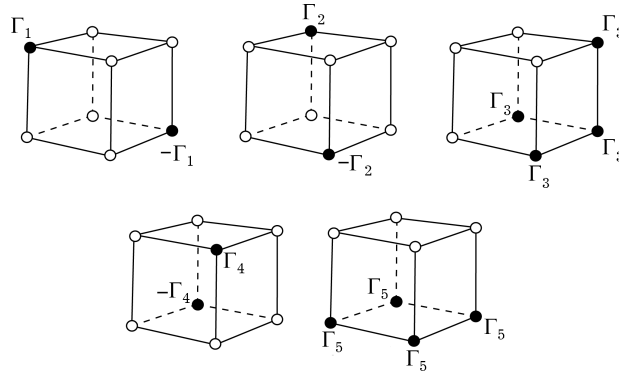


Рис. 4. набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі куба.

Антисиметричний куб ($N = 8$). У випадку антисиметричного куба (куб у якого нижня грань повернута на $\pi/4$) матриця \mathbf{A} також буде не виродженою. Ядро \mathbf{A} матриці має розмірність $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 1$. Базис ядра

можна вибрати у вигляді $(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$, де перші чотири координати описують інтенсивності вихорів у вершинах верхньої грані, а останні чотири – інтенсивності вихорів у вершинах нижньої (повернутої) грані. Графічна демонстрація цього базису зображена на рис. 5. Як видно з рисунка, маємо класичну конфігурацію вихорів фон-Кармана. Зазначимо, що конфігурації фон-Кармана будуть положеннями рівноваги не тільки у випадку антисиметричного куба.

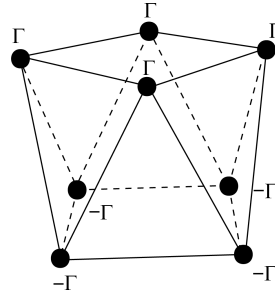


Рис. 5. Єдиний набір інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі антисиметричного куба.

Ікосаедр ($N = 12$). У випадку ікосаедра також маємо невироджену матрицю \mathbf{A} , розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 7$. Явний вигляд базису можна знайти у [22, 29]. Його графічне зображення наведено на рис. 6.

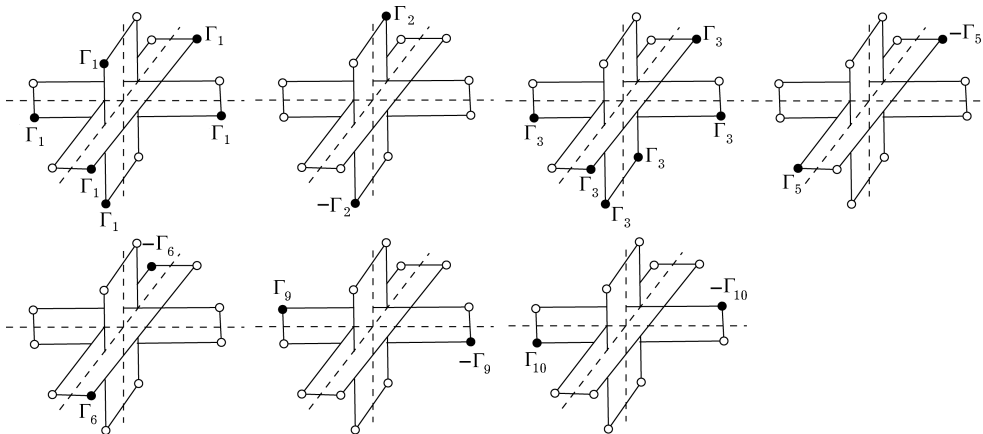


Рис. 6. Набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі ікосаедра.

Додекаедр ($N = 20$). У випадку, коли вихори знаходяться у вершинах додекаедра, отримаємо невироджену матрицю \mathbf{A} , розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 4$. Явний вигляд базису і його графічне зображення можна знайти у [22, 29].

Кубооктаедр ($N = 12$). Кубооктаедр – це вписаний многогранник, який зображено на рис. 7. Він є одним із так званих напівправильних многогранників або, як їх часто називають, – архімедових тіл. У випадку, коли вихори знаходяться у вершинах кубооктаедра, отримаємо невироджену матрицю \mathbf{A} , розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 1$. Базис ядра описується одним вектором, всі елементи якого дорівнюють одиниці, тобто кубооктаедр буде положенням рівноваги тільки у випадку, коли інтенсивності всіх вихорів однакові.

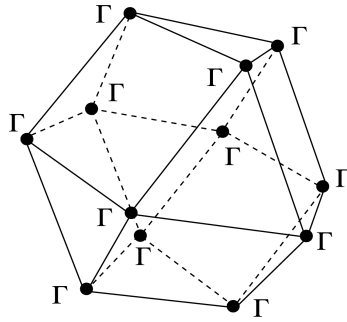


Рис. 7. Положення рівноваги у формі кубооктаедра.

Ікосододекаедр ($N = 30$). Ікосододекаедр – це ще один напівправильний випуклий вписаний многогранник, який зображено на рис. 8. У випадку, коли вихори знаходяться у вершинах ікосододекаедра, отримаємо випадок, аналогічний попередньому, тобто невироджену матрицю \mathbf{A} , розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 1$. Базис ядра описується одним вектором, всі елементи якого дорівнюють одиниці, тобто ікосододекаедр буде положенням рівноваги тільки у випадку, коли інтенсивності всіх вихорів однакові.

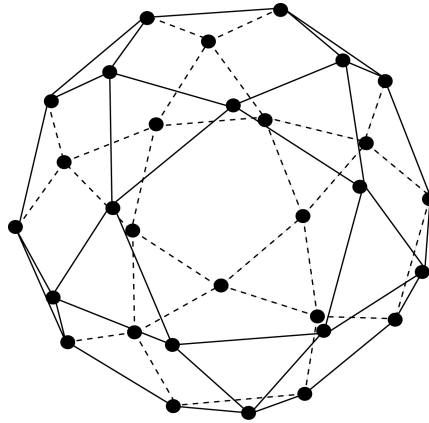


Рис. 8. Положення рівноваги у формі ікосододекаедра.

Зазначимо, що тільки два з наведених вище напівправильних многогранників є положеннями рівноваги. Крім того, авторами було знайдено декілька конфігурацій у вигляді суперпозицій симетричних конфігурацій, які також є положеннями рівноваги.

Зауважимо також, що на основі наведеного у цьому розділі методу можна побудувати чисельний алгоритм, за допомогою якого можна знайти несиметричні положення рівноваги [30].

3. Стійкість положень рівноваги. Як відмічено в [11], існує багато означень стійкості положень відносної рівноваги. У цій роботі скористаємось означенням стійкості за Раусом: положення відносної рівноваги є стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що довільна траєкторія, яка починається в δ -околі положення рівноваги, залишається в ε -околі положення рівноваги.

Для дослідження стійкості відносних положень рівноваги застосуємо критерій, сформульований у роботі [11]: якщо гамільтоніан у системі координат, яка рухається разом з системою, досягає у положенні рівноваги свого трансверсального мінімуму або максимуму, то таке положення рівноваги є стійким положенням рівноваги. У цьому контексті трансверсальний мінімум – це мінімум функції у напрямках, трансверсальних до напрямків, які залишають систему незмінною (орбіт групи симетрій гамільтоніана).

Для доведення нестійкості положень рівноваги скористаємось відомим фактом з теорії стійкості лінійних систем: якщо серед власних значень матриці, лінеаризованої навколо положення рівноваги системи, є числа з додатною дійсною частиною, то оригінальна система є нестійкою.

Для спрощення викладок використаємо канонічні змінні

$$\varphi_i = \varphi_i, \quad z_i = \cos \theta_i. \quad (31)$$

Гамільтоніан системи в цих змінних набуде вигляду

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln \left[1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right]. \quad (32)$$

Покладемо $R_{ij} = \left(1 - z_i z_j - \cos(\varphi_i - \varphi_j) \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \right)$, тоді компоненти матриці других похідних будуть такими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_i^2} &= \sum_{j \neq i, j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2} \left(\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_j) \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} (1 - z_i z_j) - (1 - z_i^2)(1 - z_j^2)}{R_{ij}^2} \right), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} &= \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2} \left(\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_j) \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} (z_i z_j - 1) + (1 - z_i^2)(1 - z_j^2)}{R_{ij}^2} \right), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_i^2} &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2} \left(\frac{\left(z_j (1 - z_i^2) - \cos(\varphi_i - \varphi_j) z_i \sqrt{1 - z_j^2} \right)^2 - \cos(\varphi_i - \varphi_j) \sqrt{1 - z_j^2} R_{ij}}{(1 - z_i^2) \sqrt{1 - z_j^2} R_{ij}^2} \right), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j} &= \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2} \left(\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_j) \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} (z_i z_j - 1) + \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2}}{\sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} R_{ij}^2} \right), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial \varphi_i} &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2} \left(\frac{\sin(\varphi_i - \varphi_j) \sqrt{1 - z_i^2} (z_i - z_j)}{\sqrt{1 - z_j^2} R_{ij}^2} \right), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_j \partial \varphi_i} &= \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2} \left(\frac{\sin(\varphi_i - \varphi_j) \sqrt{1 - z_i^2} (z_i - z_j)}{\sqrt{1 - z_j^2} R_{ij}^2} \right). \end{aligned}$$

Компоненти лінеаризованої системи пов'язані з компонентами матриці других похідних таким співвідношенням:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{pmatrix} \mathbf{A}_{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{z}, \boldsymbol{\varphi}$ – вектори-стовпці координат z_i, φ_i , $i = 1, \dots, N$; $\mathbf{0}_N, \mathbf{I}_N$ – нульова та одинична $(N \times N)$ -матриці; $\mathbf{A}_{2N} = D^2 H(z_0, \varphi_0)$ – матриця других похідних у положенні рівноваги.

Оскільки положення рівноваги є критичними точками гамільтоніана, то з трансверсальної додатної (від'ємної) визначеності другої варіації випливає, що гамільтоніан набуває трансверсального мінімуму (максимуму) у положенні рівноваги. У свою чергу, для того щоб показати, що матриця є трансверсально додатно визначеною (від'ємно визначеною), достатньо показати, що власні значення, які відповідають напрямкам, трансверсальним до положень рівноваги, є додатними (від'ємними). Зазначимо, що власні значення, які відповідають дотичним до орбіт положень рівноваги напрямкам, повинні бути нульовими.

Для спрощення викладок у випадку рівних інтенсивностей, не обмежуючи загальності, можна покласти $\Gamma_i = 1$, $i = 1, \dots, N$.

Користуючись наведеними міркуваннями, доведемо такі теореми.

Теорема 2. У випадку рівних інтенсивностей положення рівноваги у формі тетраедра, октаедра та ікосаедра є нелінійно стійкими.

Д о в е д е н н я. Оскільки вказані положення відносної рівноваги є фіксованими виродженими положеннями рівноваги ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$), для дослідження стійкості скористаємось початковою нерухомою системою координат, у якій гамільтоніан має вигляд (32). Координати вершин і власні значення матриці \mathbf{A}_{2N} для цих випадків наведено в табл. 1.

Групою симетрій, яка не змінює ці положення рівноваги, є група $SO(3)$ (довільне обертання сфери не порушує положень рівноваги). Дотичний простір до орбіти цієї групи є тривимірним, що й пояснює наявність трьох нульових власних значень. Всі власні значення, які відповідають трансверсальним напрямкам, є від'ємними, тому згідно з критерієм, наведеним вище, досліджувані положення рівноваги є стійкими. \diamond

Таблиця 1. Координати вершин та власні значення матриці других похідних для стійких конфігурацій

Координати вершин (z_i^0, φ_i^0)	Власні значення матриці \mathbf{A}_{2N}
Тетраедр ($N = 4$)	
$\left((-1)^k \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi k}{2} \right), \quad k = 0, \dots, 3$	$-\frac{9}{4}, -\frac{21}{16}, -\frac{21}{16}, -\frac{9}{8},$ $-\frac{1}{2}, 0, 0, 0$
Октаедр ($N = 6$)	
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi \right), \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \left(0, \frac{3\pi}{2} \right)$	$-4, -\frac{9 + \sqrt{41}}{4}, -\frac{9 + \sqrt{41}}{4},$ $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4},$ $-\frac{9 - \sqrt{41}}{4}, -\frac{9 - \sqrt{41}}{4}, -\frac{1}{4},$ $0, 0, 0$
Числові наближення власних значень матриці \mathbf{A}_{2N}	
Ікосаедр ($N = 12$)	
$\left((-1)^k \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, (-1)^\ell \frac{\pi}{2} \right),$ $\left((-1)^k \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}, \pi^\ell \right),$ $\left(0, (-1)^k \left(\pi^\ell - \arccos \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \right) \right),$ $k = 0, 1, \ell = 0, 1$	$-23.8462, -22.9415, -17.8963,$ $-12.0918, -9.73771, -9.69726,$ $-9.03378, -5.9006, -5.59474,$ $-5.0765, -4.70151, -3.51885,$ $-2.8623, -2.44798, -2.22719,$ $-1.22744, -1.19444, -0.877398,$ $-0.680072, -0.551888, -0.281533,$ $0, 0, 0$

Теорема 3. У випадку рівних інтенсивностей положення рівноваги у формі куба, додекаедра, кубооктаедра та ікосідодекаедра є нестійкими.

Д о в е д е н н я. Оскільки вказані положення відносної рівноваги також є фіксованими виродженими положеннями рівноваги ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$), то згідно

з наведеними вище міркуваннями гамільтоніан має вигляд (32). Координати вершин і власні значення матриці \mathbf{L}_{2N} наведено у табл. 2. Серед власних значень кожної конфігурації є такі, у яких дійсна частина додатна, тому наведені конфігурації є нестійкими. \diamond

Теорема 4. *Положення рівноваги у формі антисиметричного куба є нестійким.*

Д о в е д е н н я. У розглядуваному положенні рівноваги не всі інтенсивності рівні між собою. Не обмежуючи загальності, покладемо $\Gamma_i = 1$, $\Gamma_j = -1$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 5, \dots, 8$. Таке положення відносної рівноваги не є виродженим положенням рівноваги ($\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$) і всі вихори будуть обертатись навколо вектора \mathbf{M} . Виберемо систему координат, у якій вектор \mathbf{M} співнаправлений з додатним напрямком осі Oz . Координати вершин антисиметричного куба у вибраній системі координат наведено у табл. 2.

Як було зазначено вище, для дослідження стійкості системи потрібно перейти до системи координат, яка обертається разом з вихорами. Гамільтоніан у такій рухомій системі координат має вигляд

$$H_1 = H + \omega \sum_{i=1}^N z_i,$$

де H – гамільтоніан (32), а ω – кутова швидкість обертання конфігурації. Оскільки положення рівноваги є критичною точкою гамільтоніана H_1 , значення кутової швидкості ω можна знайти як розв'язок рівняння

$$\frac{\partial H_1}{\partial z_i} \left((z_i^0, \varphi_i^0) = -\frac{41\sqrt{3}}{28} + \omega \right) = 0,$$

тобто

$$\omega = \frac{41\sqrt{3}}{28}.$$

Оскільки гамільтоніан H_1 лінійно залежить від координат z_i , маємо наступну рівність:

$$D^2 H_1 = D^2 H,$$

тобто друга варіація гамільтоніана не зміниться при переході до рухомої системи координат. Власні значення матриці \mathbf{L}_{2N} наведені у табл. 2. Серед власних значень цієї конфігурації є такі, у яких дійсна частина є додатною, тому досліджувана конфігурація нестійка. \diamond

Зазначимо, що наведені вище результати щодо стійкості положень рівноваги у формі тетраедра, октаедра, ікосаедра, а також нестійкості куба та додекаедра повністю узгоджуються з результатами роботи [11]. Нестійкість положень рівноваги у формі антисиметричного куба та куба є частковими випадками аналізу стійкості кільцевих пар, розглянутих у роботі [26].

4. Заключні зауваження. Як бачимо, методи лінійної алгебри дозволяють досить просто перевірити, чи є положенням відносної рівноваги задана конфігурація точкових вихорів на сфері. Ці методи можуть бути узагальнені для пошуку плоских положень відносної рівноваги.

Для дослідження стійкості потрібно залучати загальну теорію стійкості гамільтонових систем із симетріями. Хоча задача знаходження симетрій системи досить часто є найскладнішою частиною дослідження, у випадку точкових вихорів на сфері обертові симетрії сфери є натуральними симетріями. Якщо відомі симетрії, задача дослідження стійкості зводиться до дослідження другої варіації гамільтоніана в положенні рівноваги та лінеаризованої системи навколо положення рівноваги.

Таблиця 2. Координати вершин і власні значення лінеаризованої системи для нестійких конфігурацій

Координати вершин (z_i^0, φ_i^0)	Власні значення матриці \mathbf{L}_{2N}
Куб ($N = 8$)	
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi k}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi k}{2}\right),$ $k = 0, \dots, 3$	$i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4},$ $-\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, 0, 0, 0, 0$
Числові наближення власних значень матриці \mathbf{L}_{2N}	
Антисиметричний куб ($N = 8$)	
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi k}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi + 2\pi k}{4}\right),$ $k = 0, \dots, 3.$	$-1.50425, -1.50425, 1.50425, 1.50425, 1.41833,$ $-1.41833, 1.41833, -1.41833, 0.986012i,$ $-0.986012i, 0.986012i, -0.986012i, 0.809152,$ $-0.809152, 0, 0$
Додекаедр ($N = 20$)	
$\left(\alpha, \frac{\pi + 2\pi k}{5}\right), \left(\pi - \alpha, \frac{2\pi k}{5}\right),$ $\left(\beta, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}\right), \left(\pi - \beta, \frac{2\pi k}{5}\right),$ $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}},$ $\beta = \alpha + 2 \arccos \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}},$ $k = 0, \dots, 4$	$4.66871i, -4.66871i, 4.66871i, -4.66871i,$ $4.66871i, -4.66871i, 4.66871i, -4.66871i,$ $4.6614i, -4.6614i, 4.6614i, -4.6614i, 4.6614i,$ $-4.6614i, 4.6614i, -4.6614i, 4.6614i, -4.6614i,$ $3.12812, -3.12812, 3.12812, -3.12812, 3.12812,$ $-3.12812, 2.72398, -2.72398, 2.72398, -2.72398,$ $2.72398, -2.72398, 2.72398, -2.72398, 2.72398,$ $-2.72398, 0, 0, 0, 0, 0, 0$
Кубооктаедр ($N = 12$)	
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi k}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi k}{2}\right),$ $\left(0, \frac{\pi + 2\pi k}{4}\right),$ $k = 0, \dots, 3$	$\frac{2\sqrt{134}}{9}i, -\frac{2\sqrt{134}}{9}i, \frac{2\sqrt{134}}{9}i, -\frac{2\sqrt{134}}{9}i, \frac{2\sqrt{134}}{9}i,$ $-\frac{2\sqrt{134}}{9}i, \frac{\sqrt{35}}{3}i, -\frac{\sqrt{35}}{3}i, \frac{\sqrt{35}}{3}i, -\frac{\sqrt{35}}{3}i, \frac{2\sqrt{2}}{3}i,$ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}i, \frac{2\sqrt{2}}{3}i, -\frac{2\sqrt{2}}{3}i, \frac{2\sqrt{2}}{3}i, -\frac{2\sqrt{2}}{3}i, \frac{\sqrt{37}}{3},$ $-\frac{\sqrt{37}}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0$
Ікосідодекаедр ($N = 30$)	
$\left(0, \frac{\pi + 2\pi k}{10}\right),$ $\left(-\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \frac{2\pi \ell}{5}\right),$ $\left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \frac{\pi + 2\pi \ell}{5}\right),$ $\left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}, \frac{2\pi \ell}{5}\right),$ $\left(-\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}, \frac{\pi + 2\pi \ell}{5}\right),$ $k = 0, \dots, 9, \ell = 0, \dots, 4$	$7.15642i, -7.15642i, 7.15642i, -7.15642i,$ $7.15642i, -7.15642i, 6.80416, -6.80416, 6.80416,$ $-6.80416, 6.80416, -6.80416, 6.57547i,$ $-6.57547i, 6.57547i, -6.57547i, 6.57547i,$ $-6.57547i, 6.57547i, -6.57547i, 6.57547i,$ $-6.57547i, 5.98329, -5.98329, 5.98329, -5.98329,$ $-5.98329, 5.98329, -5.98329, 5.98329, 5.87649i,$ $-5.87649i, 5.87649i, -5.87649i, 5.87649i,$ $-5.87649i, 2.76964i, -2.76964i, 2.76964i,$ $-2.76964i, 2.76964i, -2.76964i, 2.76964i,$ $-2.76964i, 2.38582i, -2.38582i, 2.38582i,$ $-2.38582i, 2.38582i, -2.38582i, 2.38582i,$ $-2.38582i, 2.38582i, -2.38582i, 0, 0, 0, 0, 0, 0$

1. Алексеев С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Изд-во Ин-та теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.
2. Богомолов В. А. Динамика завихренности на сфере // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – № 6. – С. 57–65.
3. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. – Москва – Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2005. – 368 с.
4. Борисов А. В., Газизуллина Л. А., Рамоданов С. М. Диссертация Э. Цермело о вихревой гидродинамике на сфере // Нелинейная динамика. – 2008. – 4. – С. 497–513.
5. Васильев О. Ф. Об одной забытой работе И. С. Громеки // Прикл. математика и механика. – 1951. – 15. – С. 261–263.
6. Вишня А. Теория вихрей. – Москва – Ленинград: ОНТИ, 1936. – 266 с.
7. Громека И. С. О вихревых движениях жидкости на сфере. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1885. – 35 с.
8. Золмерфельд А. Механика деформируемых сред. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – 486 с.
9. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 403 с.
10. Козлов В. В. Общая теория вихрей. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1998. – 238 с.
11. Куракин Л. Г. О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере // Докл. РАН. – 2003. – 388. – С. 482–487.
12. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – Киев: Наук. думка, 1993. – 283 с.
13. Островський В. В., Мелешко В. В. Динаміка точкових вихорів на сфері // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – №3. – С. 23–28.
14. Островський В. В. Рух рідини у полі пари вихорів на нерухомій сфері // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4. – С. 22–26.
15. Пуанкаре А. Теория вихрей. – Ижевск: Изд-во РХД, 2001. – 160 с.
16. Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. – Москва: Научный мир, 2000. – 376 с.
17. Aref H., Newton P. K., Stremmer M. A., Tokieda T., Vainchtein D. L. Vortex crystals // Adv. Appl. Mech. – 2003. – 39. – P. 1–79.
18. Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. II. General compact case // Regular Chaotic Dyn. – 1998. – 3. – P. 99–114.
19. Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. III. General compact case // Regular Chaotic Dyn. – 1998. – 3. – P. 76–90.
20. Cabral H., Meyer K., Schmidt D. Stability and bifurcations for the $N + 1$ vortex problem on the sphere // Regular Chaotic Dyn. – 2003. – 8. – P. 259–282.
21. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. reine angew. Math. – 1858. – 55. – S. 25–55.
22. Jamalodeen M. I., Newton P. K. The N -vortex problem on a rotating sphere. II. Heterogeneous Platonic solid equilibria // Proc. R. Soc. London. – 2006. – A462. – P. 3277–3299.
23. Kimura Y. Vortex motion on surfaces with constant curvature // Proc. R. Soc. London. – 1999. – A455. – P. 245–259.
24. Kimura Y., Okamoto H. Vortex motion on a sphere // J. Phys. Soc. Japan. – 1987. – 56. – P. 4203–4206.
25. Kurakin L. G., Yudovich V. I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos. – 2002. – 12. – P. 574–595.
26. Laurent-Polz F. Point vortices on the sphere: a case with opposite vorticities // Nonlinearity. – 2002. – 15. – P. 143–171.
27. Lewis D., Ratiu T. Rotating n -gon/ kn -gon vortex configurations // J. Nonlinear Sci. – 1996. – 6. – P. 385–414.
28. Meleshko V. V., Aref H. A bibliography of vortex dynamics 1858–1956 // Adv. Appl. Mech. – 2007. – 41. – P. 197–292.
29. Newton P. K. The N -vortex problem. Analytical techniques. – New York: Springer, 2001. – 432 p.
30. Newton P. K., Chamoun G. Construction of point vortex equilibria via Brownian ratchets // Proc. R. Soc. London. – 2007. – A463. – P. 1525–1540.

31. *Newton P. K., Shokrane H.* The N -vortex problem on a rotating sphere. I. Multi-frequency configurations // *Proc. R. Soc. London.* – 2006. – **A462**. – P. 149–169.
32. *Pekarsky S., Marsden J. E.* Point vortices on a sphere: stability of relative equilibria // *J. Math. Phys.* – 1998. – **39**. – P. 5894–5907.
33. *Synge J. L.* On the motion of three vortices // *Canad. J. Math.* – 1949. – **1**. – P. 257–270.
34. *Zermelo E.* Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegung in einer Kugelfläche // *Z. Math. Phys.* – 1902. – **47**. – S. 201–237.
Те саме: *Цермело Э.* Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы // *Нелинейная динамика.* – 2007. – **3**. – С. 81–109.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНФИГУРАЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ НА СФЕРЕ

Рассматривается движение точечных вихрей на сфере. Методы линейной алгебры оказываются полезными для нахождения симметричных положений относительного равновесия. Приводится каталог симметричных конфигураций, которые базируются на правильных многогранниках. Исследуется устойчивость найденных положений равновесия.

STABILITY OF POINT VORTEX CONFIGURATIONS ON A SPHERE

This paper addresses the classical two-dimensional biharmonic problem for a rectangular domain. Methods of linear algebra are effective for finding symmetric configurations of relative equilibrium. Catalog of symmetric relative equilibrium configurations based on regular polyhedrons are given. Stability of the equilibrium configurations is investigated.

¹ Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,
² Ун-т Півд. Каліфорнії, Лос Анжелес, США

Одержано
06.02.09