

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ В КРУГОВОМ НАПРАВЛЕНИИ ТОЛЩИНЫ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Для нахождения частот свободных колебаний круговых замкнутых цилиндрических оболочек переменной в круговом направлении толщины использован метод сплайн-коллокации. Задача сформулирована в рамках уточненной теории Миндлина. Изучено влияние изменения толщины оболочки на распределение частот ее собственных колебаний. Расчеты проведены для различных геометрических параметров оболочки при различных граничных условиях. Достоверность полученных результатов проверена увеличением числа точек коллокации при расчетах и сравнением с результатами вычислений по трехмерной теории.

Введение. Цилиндрические оболочки находят широкое применение в различных конструкциях, используемых в современной технике, машиностроении, строительстве, авиационной промышленности и т.д. Исследования динамических характеристик тонких цилиндрических оболочек постоянной толщины обобщены и получили дальнейшее развитие в работах [13, 14]. На необходимость изучения оболочек переменной жесткости, а также совершенствование и развитие методов решения задач теории оболочек указывается в [9]. Несмотря на актуальность вопроса изучения влияния изменения толщины оболочки на характер ее собственных колебаний, число публикаций, посвященных данной проблеме ограничено. Решение таких задач сопряжено с трудностями вычислительного характера, поэтому в научной литературе встречаются единичные публикации, посвященные данной проблеме [15].

В настоящем сообщении рассматривается задача изучения характера распределения частот собственных колебаний замкнутых круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в окружном направлении в уточненной постановке. Для решения задачи развивается эффективная численно-аналитическая методика, которая базируется на применении сплайн-аппроксимации в одном координатном направлении и решением краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска, ранее примененная в работах [1–7, 10–12].

Постановка задачи. Рассмотрим свободные колебания круговых замкнутых цилиндрических оболочек переменной толщины. Для определения частот и форм собственных колебаний таких оболочек необходимо использовать уточненную теорию [8]. В работе используется уточненная теория Миндлина, которая базируется на гипотезе прямой линии.

Согласно принятой гипотезе в системе координат $\theta\gamma z$ (γ – координата в направлении нормали к срединной поверхности), связанной со срединной поверхностью оболочки, малые перемещения оболочки можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= w(\theta, z), \\ u_\theta(r, \theta, z) &= v(\theta, z) + \gamma\Psi_\theta(\theta, z), \\ u_z(r, \theta, z) &= u(\theta, z) + \gamma\Psi_z(\theta, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$ – перемещения координатной поверхности, $\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ – функции, характеризующие полный поворот нормали

$(-\frac{H}{2} \leq \gamma \leq \frac{H}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq L)$. Геометрические соотношения соответственно запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
e_\theta(r, \theta, z) &= \varepsilon_\theta(\theta, z) + \gamma x_\theta(\theta, z), \\
e_z(r, \theta, z) &= \varepsilon_z(\theta, z) + \gamma x_z(\theta, z), \\
e_{\theta z}(r, \theta, z) &= \varepsilon_{\theta z}(\theta, z) + 2\gamma x_{\theta z}(\theta, z), \\
e_{\gamma_\theta}(r, \theta, z) &= \gamma_\theta(\theta, z), \quad e_{\gamma_z}(r, \theta, z) = \gamma_z(\theta, z), \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad x_z = \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}, \\
x_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \quad 2x_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\
\gamma_\theta &= \Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v, \quad \gamma_z = \Psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2)
\end{aligned}$$

$\varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta z}$ – тангенциальные деформации координатной поверхности; $x_\theta, x_z, x_{\theta z}$ – компоненты изгибной деформации; γ_θ, γ_z – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами. Соотношения упругости для цилиндрических ортотропных оболочек с осями ортотропии, совпадающими с координатными осями, запишутся в виде

$$\begin{aligned}
N_z &= C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\theta, \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_\theta, \\
N_{z\theta} &= C_{66}\varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} \frac{1}{R} x_{\theta z}, \quad M_z = D_{11}x_z + D_{12}x_\theta, \\
M_\theta &= D_{12}x_z + D_{22}x_\theta, \quad M_{\theta z} = M_{z\theta} = 2D_{66}x_{\theta z}, \\
Q_\theta &= K_2\gamma_\theta, \quad Q_z = K_1\gamma_z, \quad N_{\theta z} = C_{66}\varepsilon_{\theta z}, \quad (3)
\end{aligned}$$

где $K_1 = \frac{5}{6}h(\theta, z)G_{13}$, $K_2 = \frac{5}{6}h(\theta, z)G_{23}$; G_{13}, G_{23} – модули поперечных сдвигов; $D_{ij} = \frac{1}{12}B_{ij}h^3(\theta, z)$; $B_{66} = G_{12}$, $B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}$, $B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2}$, $B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}$; $E_1, E_2, G_{12}, \nu_1, \nu_2$ – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно.

Уравнения движения элемента срединной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial t^2}, \\
\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2}, \quad (4)
\end{aligned}$$

$N_{z\theta} - \frac{1}{R} M_{\theta z} - N_{\theta z} = 0$. Здесь $N_z, N_\theta, N_{z\theta}, N_{\theta z}$ – тангенциальные усилия; Q_z, Q_θ – перерезывающие усилия; $M_z, M_\theta, M_{z\theta}, M_{\theta z}$ – изгибающие и крутящие моменты; $\rho = \rho(\theta, z)$ – плотность материала оболочки; $h = h(\theta, z)$ – толщина оболочки.

Предполагая, что все точки оболочки совершают гармонические колебания с круговой частотой ω , уравнения движения можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{0z}}{\partial \theta} + \rho h \omega^2 u &= 0, & \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta + \rho h \omega^2 v &= 0, \\
\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + \rho h \omega^2 w &= 0, \\
\frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{0z}}{\partial \theta} - Q_z + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \Psi_z &= 0, \\
\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \Psi_\theta &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя соотношения (2), (3) в (5), получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений относительно функций $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$, $\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= b_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} + b_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + b_{14} \frac{\partial v}{\partial z} + b_{15} \frac{\partial u}{\partial z} + \\
&\quad + b_{16} \frac{\partial v}{\partial z} + b_{17} w + b_{18} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{19} \omega^2 u, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= b_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \theta} + b_{22} v + b_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + b_{24} w + b_{25} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
&\quad + b_{26} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z \partial \theta} + b_{27} \Psi_\theta + b_{28} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial z^2} + b_{29} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} + b_{2,10} \frac{\partial u}{\partial z} + \\
&\quad + b_{2,11} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{2,12} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{2,13} \frac{\partial v}{\partial z} + b_{2,14} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} + b_{2,15} \omega^2 v, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= b_{31} \frac{\partial u}{\partial z} + b_{32} v + b_{33} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{34} w + b_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + b_{36} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} + b_{37} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \\
&\quad + b_{38} \Psi_\theta + b_{39} \Psi_z + b_{3,10} \frac{\partial w}{\partial z} + b_{3,11} \frac{\partial w}{\partial \theta} + b_{3,12} \omega^2 w, \\
\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial \theta^2} &= b_{41} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{42} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_{43} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} + b_{44} \frac{\partial w}{\partial z} + b_{45} \Psi_z + b_{46} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} + \\
&\quad + b_{47} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial z \partial \theta} + b_{48} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} + b_{49} \frac{\partial u}{\partial z} + b_{4,10} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{4,11} w + \\
&\quad + b_{4,12} \frac{\partial v}{\partial z} + b_{4,13} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} + b_{4,14} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \\
&\quad + b_{4,15} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} + b_{4,16} \omega^2 u + b_{4,17} \omega^2 \Psi_z, \\
\frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta^2} &= b_{51} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \theta} + b_{52} v + b_{53} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{54} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + b_{55} w + b_{56} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
&\quad + b_{57} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z \partial \theta} + b_{58} \Psi_\theta + b_{59} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial z^2} + b_{5,10} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + b_{5,11} \frac{\partial u}{\partial z} + \\
&\quad + b_{5,12} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{5,13} \frac{\partial v}{\partial z} + b_{5,14} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} + b_{5,15} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} + \\
&\quad + b_{5,16} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} + b_{5,17} \omega^2 v + b_{5,18} \omega^2 \Psi_\theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты имеют такие значения:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -\frac{R^2 C_{11}}{C_{66}}, & b_{12} &= -\frac{C_{12} + C_{66}}{C_{66}} R, & b_{13} &= -R \frac{C_{12}}{C_{66}}, & b_{14} &= -\frac{R}{C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta}, \\
b_{15} &= -R^2 \frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{11}}{\partial z}, & b_{16} &= -R \frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{12}}{\partial z}, & b_{17} &= -R \frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{12}}{\partial z}, \\
b_{18} &= -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta}, & b_{19} &= -h\rho R^2 \frac{1}{C_{66}}, & b_{21} &= -R \frac{C_{12} + C_{66}}{C_{22}} - \frac{1}{R} \frac{D_{66}}{C_{22}}, \\
b_{22} &= \frac{K_2}{C_{22}}, & b_{23} &= -R^2 \frac{C_{66}}{C_{22}}, & b_{24} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta}, & b_{25} &= -\frac{C_{22} + K_2}{C_{22}}, \\
b_{26} &= -\frac{D_{66}}{C_{22}}, & b_{27} &= -R^2 \frac{K_2}{C_{22}}, & b_{28} &= -R \frac{D_{66}}{C_{22}}, & b_{29} &= -\frac{R}{C_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z}, \\
b_{2,10} &= -R \frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta}, & b_{2,11} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta}, & b_{2,12} &= -\frac{R}{C_{22}} \left(\frac{\partial C_{66}}{\partial z} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial z} \right), \\
b_{2,13} &= -R^2 \frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{66}}{\partial z}, & b_{2,14} &= -\frac{R}{C_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z}, & b_{2,15} &= -h\rho R^2 \frac{1}{C_{22}}, \\
b_{31} &= R \frac{C_{12}}{K_2}, & b_{32} &= \frac{1}{K_2} \frac{\partial K_2}{\partial \theta}, & b_{33} &= \frac{K_2 + C_{22}}{K_2}, & b_{34} &= \frac{C_{22}}{K_2}, \\
b_{35} &= b_{36} = -R^2 \frac{K_1}{K_2}, & b_{37} &= -R, & b_{38} &= -R \frac{1}{K_2} \frac{\partial K_2}{\partial \theta}, & b_{39} &= -R^2 \frac{1}{K_2} \frac{\partial K_1}{\partial z}, \\
b_{3,10} &= b_{39}, & b_{3,11} &= -R - \frac{1}{K_2} \frac{\partial K_2}{\partial \theta}, & b_{3,12} &= -h\rho R^2 \frac{1}{K_2}, \\
b_{41} &= \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta} + \frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} \right), & b_{42} &= -R \frac{C_{11}}{C_{66}}, \\
b_{43} &= \frac{D_{12} C_{66} - C_{12} D_{66} - C_{66} D_{66}}{C_{66} D_{66}}, & b_{44} &= \frac{D_{12} C_{66} - C_{12} D_{66} + R^2 K_1}{C_{66} D_{66}}, \\
b_{45} &= R^2 \frac{K_1}{D_{66}}, & b_{46} &= -R^2 \frac{D_{11}}{D_{66}}, & b_{47} &= -R \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{66}}, \\
b_{48} &= -R \frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta}, & b_{49} &= -\frac{R}{C_{66}} \frac{\partial C_{11}}{\partial z}, \\
b_{4,10} &= \frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{12}}{\partial z} - \frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{12}}{\partial z}, & b_{4,11} &= \frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{12}}{\partial z} - \frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{12}}{\partial z}, \\
b_{4,12} &= -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta}, & b_{4,13} &= -R^2 \frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{11}}{\partial z}, & b_{4,14} &= -R \frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{12}}{\partial z}, \\
b_{4,15} &= -R \frac{1}{D_{66}} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta}, & b_{4,16} &= -h\rho \frac{R}{C_{66}}, & b_{4,17} &= -\frac{h^3 \rho R^2}{12 D_{66}}, \\
b_{51} &= \frac{D_{66} C_{22} - C_{12} D_{22} - C_{66} D_{22} + \frac{1}{R^2} D_{66} D_{22}}{C_{22} D_{22}}, \\
b_{52} &= \frac{1}{R} K_2 \left(\frac{D_{22}}{C_{22} D_{22}} - \frac{R^2}{D_{22}} \right), & b_{53} &= \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \right), \\
b_{54} &= -R \frac{C_{66}}{C_{22}}, & b_{55} &= \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{56} &= K_2 \left(\frac{R}{D_{22}} - \frac{1}{RC_{22}} \right), & b_{57} &= -\frac{1}{R} \frac{D_{66}}{C_{22}} - R \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{22}}, \\
b_{58} &= K_2 R^2 \frac{1}{D_{22}} - \frac{1}{C_{22}}, & b_{59} &= -\frac{D_{66}(D_{22} + R^2 C_{22})}{C_{22} D_{22}}, \\
b_{5,10} &= -\frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta}, & b_{5,11} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta}, \\
b_{5,12} &= \frac{1}{R^2 C_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z} - \frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{66}}{\partial z} + \frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z}, & b_{5,13} &= -\frac{R}{C_{22}} \frac{\partial C_{66}}{\partial z}, \\
b_{5,14} &= -\frac{1}{RC_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z} - R \frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z}, & b_{5,15} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z} - R^2 \frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{66}}{\partial z}, \\
b_{5,16} &= -R \frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta}, & b_{5,17} &= -h\rho \frac{R}{C_{22}}, & b_{5,18} &= -R^2 \frac{1}{D_{22}} \frac{h^3}{12}.
\end{aligned}$$

Добавляя к системе разрешающих уравнений граничные условия и условия симметрии, приходим к двумерной задаче на собственные значения.

Рассматривались следующие граничные условия:

– на криволинейных контурах $z = 0$ и $z = L$

(i) контур жестко закреплен $u = v = w = \Psi_\theta = \Psi_z = 0$;

(ii) контур шарнирно опертый и свободный в направлении образующей

$$\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} = \Psi_\theta = 0;$$

– при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ заданы условия симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} = \Psi_\theta = 0.$$

Методика решения. Решение системы будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(z), & v(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(z), \\
w(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(z), & \Psi_z(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N \Psi_{zi}(\theta) \varphi_{4i}(z), \\
\Psi_\theta(z, \theta) &= \sum_{i=0}^N \Psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(z),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\Psi_{\theta i}(\theta)$, $\Psi_{zi}(\theta)$ – искомые функции переменной θ , $\varphi_{ji}(z)$, $j = 1, \dots, 5$, $i = 0, \dots, N$, – линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке $\Delta: 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. Наивысшая степень производной по координате z от функций $u(\theta, z)$, $v(\theta, z)$, $w(\theta, z)$, $\Psi_\theta(\theta, z)$, $\Psi_z(\theta, z)$, входящих в разрешающую систему, не выше второго порядка и можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени:

$$B_3^i(z) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < z < z_{i-2}, \\ y^3, & z_{i-2} \leq z < z_{i-1}, \\ -3y^3 + 3y^2 + 3y + 1, & z_{i-1} \leq z < z_i, \\ 3y^3 - 6y^2 + 4, & z_i \leq z < z_{i+1}, \\ (1-y)^3, & z_{i+1} \leq z < z_{i+2}, \\ 0, & z_{i+2} \leq z < \infty, \end{cases}$$

где $y = \frac{z - z_k}{h_z}$ на интервале $[z_k, z_{k+1}]$, $k = i - 2, \dots, i + 1$, $i = -1, \dots, N + 1$, $h_z = z_{k+1} - z_k = \text{const}$. Функции $\varphi_{ij}(z)$ при условии равенства нулю разрешающей функции определяются следующим образом: $\varphi_{j0}(z) = -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z)$, $\varphi_{j1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z)$, $\varphi_{ji}(z) = B_3^i(z)$. При условии равенства нулю производной по z разрешающей функции для функций $\varphi_{ij}(z)$ имеем $\varphi_{j0}(z) = B_3^0(z)$, $\varphi_{j1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z)$, $\varphi_{ji}(z) = B_3^i(z)$, $i = 2, \dots, N - 2$.

Подставляем выражения (7) в систему разрешающих уравнений (6) и требуем их удовлетворения в точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = 0, \dots, N$. Специальный выбор точек коллокации позволяет существенно увеличить точность аппроксимации:

$$\xi_{2i} = z_{2i} + t_1 h_z, \quad \xi_{2i+1} = z_{2i} + t_2 h_z, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $t_2 = 1 - t_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Точки t_1 и t_2 - корни полинома Лежандра второй степени $P_2(t) = 6t^2 - 6t + 1$ на отрезке $[0, 1]$.

Введем обозначения: $\Phi_{j\alpha} = [\varphi_{ji}^{(\alpha)}(\xi_k)]$, $i, k = 0, \dots, N$, $j = 1, \dots, 5$, $\alpha = 0, 1, 2$, $\bar{u} = [u_0, \dots, u_N]^T$, $\bar{v} = [v_0, \dots, v_N]^T$, $\bar{w} = [w_0, \dots, w_N]^T$, $\bar{\Psi}_z = [\Psi_{z0}, \dots, \Psi_{zN}]^T$, $\bar{\Psi}_\theta = [\Psi_{\theta0}, \dots, \Psi_{\theta N}]^T$, $\bar{b}_{k\ell} = \{b_{k\ell}(\theta, \xi_0), \dots, b_{k\ell}(\theta, \xi_N)\}^T$, $k = 1, \dots, 5$, $\ell = 0, \dots, N$, $\ell = 1, \dots, 19$. Точки коллокации выбраны так, что матрицы Φ_{j0} невырожденные, то есть существуют обратные матрицы Φ_{j0}^{-1} . С учетом введенных обозначений система разрешающих уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}'' &= \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{11} * \Phi_{12} + \bar{b}_{15} * \Phi_{11} + \omega^2 \bar{b}_{19} * \Phi_{10})\bar{u} + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{18} * \Phi_{10})\bar{u}' + \\ &\quad + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{14} * \Phi_{21})\bar{v} + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{12} * \Phi_{21} + \bar{b}_{16} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{10}^{-1}(\bar{b}_{13} * \Phi_{31} + \bar{b}_{17} * \Phi_{30})\bar{w}, \\ \bar{v}'' &= \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{2,10} * \Phi_{11})\bar{u} + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{21} * \Phi_{11} + \bar{b}_{2,12} * \Phi_{10})\bar{u}' + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{22} * \Phi_{20} + \\ &\quad + \bar{b}_{23} * \Phi_{22} + \bar{b}_{2,13} * \Phi_{21} + \omega^2 \bar{b}_{2,15} * \Phi_{20})\bar{v} + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{2,11} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{24} * \Phi_{30})\bar{w} + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{25} * \Phi_{30})\bar{w}' + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{25} * \Phi_{41} + \\ &\quad + \bar{b}_{2,14} * \Phi_{40})\bar{\Psi}'_z + \Phi_{20}^{-1}(\bar{b}_{27} * \Phi_{50} + \bar{b}_{28} * \Phi_{52} + \bar{b}_{29} * \Phi_{51})\bar{\Psi}'_\theta, \\ \bar{w}'' &= \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{31} * \Phi_{11})\bar{u} + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{32} * \Phi_{20})\bar{v} + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{33} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{34} * \Phi_{30} + \bar{b}_{35} * \Phi_{32} + \bar{b}_{3,10} * \Phi_{31} + \omega^2 \bar{b}_{3,12} * \Phi_{30})\bar{w} + \\ &\quad + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{3,11} * \Phi_{30})\bar{w}' + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{36} * \Phi_{41} + \bar{b}_{39} * \Phi_{40})\bar{\Psi}'_z + \\ &\quad + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{38} * \Phi_{50})\bar{\Psi}'_\theta + \Phi_{30}^{-1}(\bar{b}_{37} * \Phi_{50})\bar{\Psi}'_\theta, \\ \bar{\Psi}'_z &= \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{42} * \Phi_{12} + \bar{b}_{49} * \Phi_{11} + \omega^2 \bar{b}_{4,16} * \Phi_{10})\bar{u} + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{41} * \Phi_{10})\bar{u}' + \\ &\quad + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{4,12} * \Phi_{21})\bar{v} + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{43} * \Phi_{21} + \bar{b}_{4,10} * \Phi_{20})\bar{v}' + \\ &\quad + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{44} * \Phi_{31} + \bar{b}_{4,11} * \Phi_{30})\bar{w} + \Phi_{40}^{-1}(\bar{b}_{45} * \Phi_{40} + \bar{b}_{46} * \Phi_{42} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{b}_{4,13} * \Phi_{41} + \omega^2 \bar{b}_{4,17} * \Phi_{40}) \Psi_z + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{4,15} * \Phi_{40}) \bar{\Psi}'_z + \\
& + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{48} * \Phi_{51}) \bar{\Psi}'_0 + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{47} * \Phi_{51} + \bar{b}_{4,14} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}'_0, \\
\bar{\Psi}''_0 = & \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{5,11} * \Phi_{11}) \bar{u} + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{51} * \Phi_{11} + \bar{b}_{5,12} * \Phi_{10}) \bar{u}' + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{52} * \Phi_{20} + \bar{b}_{5,13} * \Phi_{21} + \bar{b}_{54} * \Phi_{22} + \omega^2 \bar{b}_{5,17} * \Phi_{20}) \bar{v} + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{53} * \Phi_{20}) \bar{v}' + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{55} * \Phi_{30}) w + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{56} * \Phi_{30}) \bar{w}' + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{5,16} * \Phi_{41}) \bar{\Psi}_z + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{57} * \Phi_{41} + \bar{b}_{5,14} * \Phi_{40}) \bar{\Psi}'_z + \\
& + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{58} * \Phi_{50} + \bar{b}_{59} * \Phi_{52} + \bar{b}_{5,15} * \Phi_{51} + \\
& + \omega^2 \bar{b}_{5,18} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}_0 + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{5,10} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}'_0. \tag{8}
\end{aligned}$$

Систему дифференциальных уравнений (8) можно привести к виду

$$\bar{Y}' = A(\theta, \omega) \bar{Y}, \tag{9}$$

где $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\Psi}_z, \bar{\Psi}'_z, \bar{\Psi}_0, \bar{\Psi}'_0\}^\top$, $A(\theta, \omega)$ – квадратная матрица размера $10(N+1) \times 10(N+1)$. Граничные условия запишутся в виде

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2 \bar{Y}(\pi) = \bar{0}, \tag{10}$$

здесь B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы размера $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Краевую задачу (9), (10) на собственные значения можно решить с использованием метода дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска.

Анализ результатов.

1. На основании предлагаемой методики исследовали спектр частот свободных колебаний замкнутой круговой цилиндрической изотропной оболочки переменной толщины в окружном направлении при различных значениях параметров оболочки. Для оценки точности представленной методики рассматривался спектр частот свободных колебаний оболочки с шарнирно опертыми краями при различном числе N точек коллокации. Рассматривалась изотропная оболочка с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ и геометрическими параметрами: длиной $L = 20$, радиусом $R = 10$ и постоянной толщиной $H = 2$. Полученные значения безразмерного параметра

$\Omega_m = \omega_m H \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ (m – номер частоты) сравнивались с результатами вычислений частот колебаний по трехмерной теории с возможным в данном случае представлением перемещений в виде $u_r = \bar{u}_r(r) \cos n\theta \sin \frac{k\pi z}{L}$, $u_z =$

$= \bar{u}_z(r) \cos n\theta \cos \frac{k\pi z}{L}$, $u_\theta = \bar{u}_\theta(r) \sin n\theta \sin \frac{k\pi z}{L}$ и последующим применением метода дискретной ортогонализации и пошагового поиска (см. табл. 1). Результаты вычислений, представленные в табл. 1, имеют хорошее совпадение при увеличении количества точек коллокации.

В табл. 1 представлены также результаты расчетов частот свободных колебаний рассматриваемой оболочки при жестком закреплении торцов. Соответствующие частоты колебаний оболочки возрастают при жестком закреплении торцов по сравнению со свободными колебаниями оболочки при шарнирном закреплении торцов, что согласуется с теоретическими положениями. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности применения методики для решения задач данного класса.

Таблица 1

m	Трехмерная теория	Уточненная теория					
	Шарнирное закрепление торцов	Шарнирное закрепление торцов				Жесткая заделка торцов	
		Волнообразование	$N = 10$	$N = 14$	$N = 18$	$N = 22$	$N = 14$
1	0.06964	$n = 2, k = 1$	0.0708	0.0707	0.0707	0.0707	0.0899
2	0.09142	$n = 3, k = 1$	0.0939	0.0939	0.0938	0.0938	0.1083
3	0.09899	$n = 1, k = 1$	0.0987	0.0987	0.0987	0.0986	0.1089
4	0.10017	$n = 1, k = 0$	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1562
5	0.14486	$n = 4, k = 1$	0.1472	0.1472	0.1472	0.1472	0.1733
6	0.15494	$n = 2, k = 2$	0.1569	0.1555	0.1552	0.1551	0.1796
7	0.16748	$n = 3, k = 2$	0.1697	0.1685	0.1682	0.1681	0.1912
8	0.16802	$n = 1, k = 2$	0.1699	0.1686	0.1683	0.1683	0.1918

2. Исследовался спектр частот свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки переменной в круговом направлении толщины, изменяющейся по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$, $H_0 = 2$, $p = 2\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, для $\alpha = 0, 0.1, 0.2, 0.3$. Торцы оболочки жестко закреплены. Рис. 1 иллюстрирует характер изменения толщины оболочки в круговом направлении в зависимости от параметра p ($p = 2, 4, 6, 8$ соответственно) при $\alpha = 0.3$.

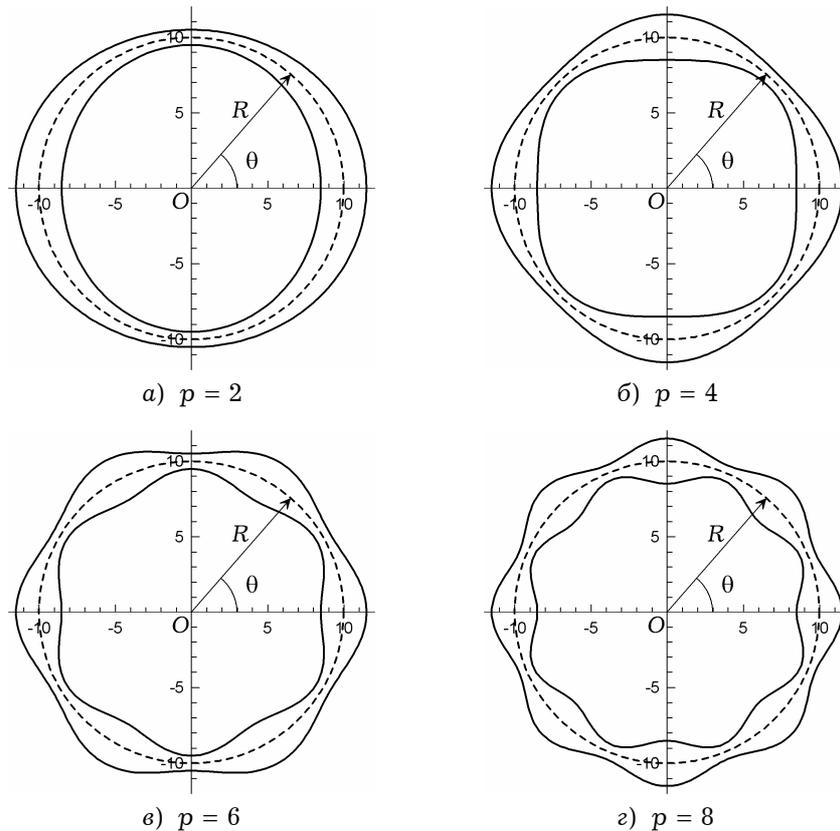


Рис. 1

В табл. 2 для этого случая представлены результаты вычислений первых трех значений безразмерного частотного параметра $\Omega_m = \omega_m H_0 \sqrt{\rho/G}$ (m – номер частоты).

Таблица 2

p	Ω	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$
$p = 2$	Ω_1	0.0899	0.0900	0.0901	0.0905
	Ω_2	0.1083	0.1071	0.1060	0.1048
	Ω_3	0.1089	0.1087	0.1083	0.1077
$p = 4$	Ω_1	0.0899	0.0905	0.0909	0.0910
	Ω_2	0.1083	0.1063	0.1039	0.1013
	Ω_3	0.1089	0.1089	0.1089	0.1088
$p = 6$	Ω_1	0.0899	0.0898	0.0895	0.0890
	Ω_2	0.1083	0.1057	0.1030	0.1001
	Ω_3	0.1089	0.1084	0.1080	0.1076
$p = 8$	Ω_1	0.0899	0.0898	0.0894	0.0888
	Ω_2	0.1083	0.1059	0.1033	0.1005
	Ω_3	0.1089	0.1091	0.1092	0.1089

Можно отметить, что в случаях $p = 2, 4$ первая частота возрастает при увеличении параметра α , а вторая и третья частоты уменьшаются. При $p = 6, 8$ все три частоты уменьшаются при увеличении параметра α .

3. Исследовалась зависимость от параметра p частоты свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки переменной в круговом направлении толщины, изменяющейся по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$. Расчеты были проведены при $H_0 = 2$, $p = 2\ell$, $\ell = 1, \dots, 20$ и $\alpha = 0.3$. Результаты вычислений представлены в табл. 3.

Таблица 3

p	Ω_1	Ω_2	Ω_3
2	0.0905	0.1048	0.1077
4	0.0910	0.1013	0.1088
6	0.0890	0.1001	0.1076
8	0.0888	0.1005	0.1089
10	0.0887	0.1004	0.1085
12	0.0885	0.1003	0.1083
14	0.0884	0.1002	0.1082
16	0.0882	0.1001	0.1080
18	0.0881	0.1000	0.1079
20	0.0880	0.0999	0.1077
22	0.0879	0.0998	0.1076
24	0.0878	0.0997	0.1075
26	0.0877	0.0997	0.1075
28	0.0877	0.0996	0.1074
30	0.0876	0.0996	0.1073
32	0.0876	0.0996	0.1073
34	0.0875	0.0995	0.1072
36	0.0875	0.0995	0.1072
38	0.0874	0.0995	0.1072
40	0.0874	0.0994	0.1071

Анализ полученных результатов показывает, что влияние параметра p на собственные частоты колебаний оболочки более выражено при значениях $2 \leq p \leq 8$. Начиная со значения $p = 8$ при увеличении параметра p первые три частоты монотонно убывают.

4. Было изучено влияние изменения длины оболочки $15 \leq L \leq 150$ на распределение частот свободных колебаний круговой замкнутой цилиндрической оболочки при постоянном радиусе срединной поверхности оболочки $R = 10$. Рассматривались оболочки толщины, изменяющейся в окружном направлении по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$ при $p = 2$, $H_0 = 2$, $\alpha = 0.2$, и оболочки постоянной толщины ($\alpha = 0$) для различных условий закрепления торцов. Результаты вычислений частотного параметра Ω представлены в табл. 4.

Таблица 4

L	L/R	Жесткое закрепление		Шарнирное опирание	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$
15	1.5	0.1256	0.1257	0.0987	0.0902
20	2.0	0.0899	0.0901	0.0707	0.0706
25	2.5	0.0703	0.0704	0.0547	0.0546
30	3.0	0.0579	0.0581	0.0450	0.0449
35	3.5	0.0497	0.0498	0.0389	0.0389
40	4.0	0.0439	0.0439	0.0350	0.0350
45	4.5	0.0397	0.0397	0.0325	0.0324
50	5.0	0.0366	0.0366	0.0307	0.0307
55	5.5	0.0343	0.0343	0.0273	0.0273
60	6.0	0.0325	0.0325	0.0238	0.0239
65	6.5	0.0303	0.0296	0.0209	0.0211
70	7.0	0.0276	0.0270	0.0185	0.0187
75	7.5	0.0252	0.0247	0.0165	0.0167
80	8.0	0.0231	0.0227	0.0148	0.0150
85	8.5	0.0213	0.0210	0.0133	0.0136
90	9.0	0.0197	0.0194	0.0120	0.0123
95	9.5	0.0182	0.0180	0.0109	0.0112
100	10.0	0.0169	0.0167	0.0100	0.0103
105	10.5	0.0157	0.0156	0.0091	0.0094
110	11.0	0.0146	0.0146	0.0084	0.0086
115	11.5	0.0137	0.0136	0.0078	0.0080
120	12.0	0.0128	0.0128	0.0072	0.0074
125	12.5	0.0120	0.0120	0.0066	0.0069
130	13.0	0.0112	0.0113	0.0062	0.0064
135	13.5	0.0106	0.0106	0.0057	0.0059
140	14.0	0.0099	0.0100	0.0054	0.0056
145	14.5	0.0094	0.0094	0.0050	0.0052
150	15	0.0088	0.0089	0.0047	0.0049

Проводилось сравнение первых частот свободных колебаний рассматриваемых оболочек. Влияние параметра α на частоты колебаний существенно для коротких оболочек при шарнирном закреплении торцов (до 8%) и менее существенно при жестком закреплении (до 2%) для достаточно коротких оболочек $15 \leq L \leq 20$.

При увеличении длины цилиндра влияние параметра α незначительно. Первая частота стремится к нулю при увеличении длины цилиндра, что соответствует результатам, полученным для тонких оболочек [13, 14].

5. Рассматривалась зависимость влияния изменения радиуса срединной поверхности $10 \leq R \leq 20$ при постоянной длине $L = 20$ на распределение собственных частот колебаний оболочки при различных условиях закрепления торцов. Исследованы случаи оболочки с толщиной, изменяющейся в окружном направлении по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$ при $p = 2$, $H_0 = 2$, $\alpha = 0.2$, и оболочки постоянной толщины ($\alpha = 0$) для различных условий закрепления торцов. Результаты вычислений частотного параметра Ω представлены в табл. 5.

Таблица 5

R	R/L	Жесткое закрепление		Шарнирное опирание	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$
10.0	0.5000	0.0899	0.0901	0.0707	0.0706
10.5	0.525	0.0888	0.0890	0.0701	0.0700
11.0	0.550	0.0878	0.0880	0.0697	0.0696
11.5	0.575	0.0869	0.0871	0.0693	0.0692
12.0	0.600	0.0861	0.0863	0.0689	0.0688
12.5	0.625	0.0853	0.0855	0.0686	0.0685
13.0	0.650	0.0846	0.0847	0.0683	0.0682
13.5	0.675	0.0839	0.0840	0.0679	0.0668
14.0	0.700	0.0833	0.0833	0.0676	0.0644
14.5	0.725	0.0827	0.0826	0.0670	0.0622
15.0	0.750	0.0821	0.0819	0.0655	0.0601
15.5	0.775	0.0815	0.0808	0.0643	0.0581
16.0	0.800	0.0805	0.0796	0.0625	0.0563
16.5	0.825	0.0795	0.0786	0.0606	0.0546
17.0	0.850	0.0786	0.0776	0.0588	0.0531
17.5	0.875	0.0777	0.0767	0.0571	0.0515
18.0	0.900	0.0769	0.0758	0.0555	0.0501
18.5	0.925	0.0762	0.0750	0.0540	0.0487
19.0	0.950	0.0755	0.0743	0.0526	0.0474
19.5	0.975	0.0748	0.0736	0.0513	0.0462
20.0	1.000	0.0742	0.0729	0.0500	0.0451

При увеличении отношения R/L параметр α оказывает более существенное влияние на характер распределения спектра собственных частот колебаний оболочки. Во всех случаях первая частота убывает при увеличении радиуса срединной поверхности оболочки. Увеличивается расхождение между соответствующими частотами при жестком закреплении торцов до 2% и до 10% при шарнирном закреплении.

Выводы. В сообщении представлены результаты исследования спектра частот свободных колебаний круговых замкнутых цилиндрических оболочек переменной толщины в окружном направлении, изменяющейся по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$. Проведенные вычисления последовательным применением метода сплайн-коллокации и метода дискретной ортогонализации дают возможность проанализировать влияние значений параметров p и α на распределение спектра частот свободных колебаний оболочки при изменении геометрических параметров оболочки R и L и провести сравнение с результатами расчетов для цилиндрической оболочки постоянной толщины при различных условиях закрепления торцов. Следовательно, подбирая соответствующим образом параметры p и α , можно управлять спектром частот свободных колебаний оболочек переменной толщины.

1. Авраменко О. А. О влиянии локальных нагрузок на напряженно-деформированное состояние нетонких ортотропных конических оболочек // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 103–113.
То же: *Avramenko O. A. Effect of local loads on the stress-strain state of nonthin orthotropic conical shells // Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 8. – P. 916–926.
2. Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 89–98.
То же: *Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Puzyrev S. V. Solution describing the natural vibrations of rectangular shallow shells with varying thickness // Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, No. 4. – P. 432–441.
3. Григоренко А. Я. Численное решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях полого ортотропного цилиндра при различном закреплении торцов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 5. – С. 49–54.
То же: *Grigorenko A. Ya. Numerical solution of problems of free axisymmetric oscillations of a hollow orthotropic cylinder under various boundary conditions at its end faces // Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, No. 5. – P. 388–393.
4. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – **46**, № 10. – С. 74–85.
То же: *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Using spline-approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of thick-walled orthotropic cylinders // Int. Appl. Mech.* – 2008. – **46**, No. 10. – P. 1137–1147.
5. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 91–102.
То же: *Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P. Stress state of nonthin orthotropic shells with varying thickness and rectangular planform // Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 8. – P. 905–915.
6. Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесимметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.
7. Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Пузырьов С. В. Дослідження вільних коливань прямокутних ортотропних пластин лінійно змінної товщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 153–161.
8. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
9. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.)
10. Григоренко Я. М., Григоренко О. Я., Захарійченко Л. І. Розв'язування задач і дослідження напруженого стану циліндричних оболонок змінної товщини з некруговим поперечним перерізом на основі сплайн-апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 7–19.
11. Мольченко Л. В., Лоос І. І. Деформація кругового циліндра змінної жорсткості в магнітному полі в геометрично нелінійній постановці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 133–138.
12. *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness // Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1161–1169.
То же: *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач о собственных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины // Прикл. механика.* – 2005. – **41**, № 10. – С. 90–99.
13. *Leissa A. W. Vibration of shells. – NASA SP-288, 1973. – 428 с.*
14. *Markuš Š. The mechanics of vibration of cylindrical shells. – Amsterdam: Elsevier, 1988. – 159 p.*
15. *Zhang L., Xiang Y. Exact solutions for vibration of stepped circular cylindrical shells // J. Sound and Vibr.* – 2007. – **299**. – P. 948–964.

**ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ В КРУГОВОМУ НАПРЯМКУ
ТОВЩИНИ В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ**

Для знаходження частот вільних коливань кругових замкнених циліндричних оболонок змінної товщини в круговому напрямку застосовано метод сплайн-колокації. Задачу сформульовано в рамках уточненої теорії Міндіна. Вивчено вплив зміни товщини оболонки на розподіл частот її власних коливань. Розрахунки проведено для різних геометричних параметрів оболонки для різних граничних умов. Достовірність отриманих результатів перевірено збільшенням кількості точок колокації і порівнянням з результатами обчислень за тривимірною теорією.

**ABOUT AN APPROACH TO STUDY FREE VIBRATIONS
OF CYLINDRICAL SHELLS WITH VARIABLE THICKNESS IN A CIRCULAR
DIRECTION WITHIN REFINED THEORY**

The spline-collocation method is used to calculate frequencies of free vibrations of closed circular cylindrical shells with variable thickness in the circumferential direction. The problem is formulated within Mindlin's refined theory. The influence of the shell thickness change on the natural frequencies is examined. The calculations are carried out for different shell geometry and under different boundary conditions. The validity of results obtained is verified by increasing number points of collocation and by comparisons with the results of 3-D theory.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенко
НАН України, Київ,

² Київ. нац. ун-т стр-ва і архітектури, Київ

Получено
28.11.08