УДК 517.5

М. А. Сухорольський, О. З. Любицька

ПІДСУМОВУВАННЯ КРАТНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ УЗАГАЛЬНЕНИМИ МЕТОДАМИ, СФОРМУЛЬОВАНИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ δ-ПОДІБНИХ ФІНІТНИХ ФУНКЦІЙ

Розглядаються узагальнені суми кратних тригонометричних рядів. Досліджено достатні умови збіжності рядів, одержаних почленним диференціюванням рядів для функцій, інтегровних за Лебегом, а також досліджено похибки наближення функцій послідовностями узагальнених частинних сум рядів.

1. Вступ. Послідовності частинних сум тригонометричних рядів є ефективним засобом наближення досить гладких функцій [1, 6]. Для наближення розривних функцій чи похідних від інтегрованих за Лебегом функцій, використовують [2–4, 7] послідовності узагальнених частинних сум рядів (послідовності частинних сум рядів, підсумовуваних узагальненими методами). В основі досліджень збіжності рядів, підсумовуваних узагальненими методами, і оцінки похибок наближення функцій послідовностями частинних сум рядів лежить інтегральне їх зображення. Ядра типу Фейера відповідних інтегральних операторів є, по суті, δ-подібними функціями (чи δ-подібними послідовностями функцій). У роботі [5] розглядаються узагальнені методи підсумовування тригонометричних рядів, що ґрунтуються на використанні ядер типу Фейера у вигляді δ-подібних фінітних функцій; знайдено оцінки наближення функцій однієї змінної послідовностями узагальнених частинних сум рядів. Апроксимацію функцій частинними сумами рядів з використанням матричних методів досліджено у роботі [8], а також проведено деякі узагальнення для функцій оцінювання похибок наближення [9].

У цій роботі розглядаються узагальнені методи підсумовування кратних тригонометричних рядів з використанням δ-подібних послідовностей фінітних функцій та оцінки наближення функцій послідовностями узагальнених частинних сум рядів.

2. Узагальнена сума ряду. Нехай $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, – 2π-періодична функція за кожною змінною, інтегровна за Лебегом, $f(x) \in L^1(Q_n)$, де $Q_n = \{x : -\pi \le x_j \le \pi,\ j = 1, \ldots, n\}$ – n-вимірний куб.

Розглянемо кратний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ikx}, \tag{1}$$

де

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q_n} f(x) e^{-ikx}\, dx, \tag{2}$$

– коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$; $e^{ikx} = e^{ik_1x_1} \cdot \ldots \cdot e^{ik_nx_n}$; $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \in \mathbb{Z}^n$; $dx = dx_1 \ldots dx_n$.

Узагальнюючи на n-вимірний простір, введемо послідовність функцій $\{\overline{\varphi}(kr)\} = \{\varphi(k_1r_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(k_nr_n)\}$, члени якої визначаються за формулою

$$\varphi(k_jr_j) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(|t_j|) e^{k_jr_jt_j}\, dt_j, \tag{3}$$

де $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$; $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$; $g(t_j)$ – неперервна функція на проміжку $[0, 1]$, має похідну p-го порядку обмеженої варіації,

$$\int_0^1 g(t)\,dt = 1,$$

і згідно з [6, с. 508] справджується оцінка

$$\left|\varphi(k_j r_j)\right| = O\left(\frac{1}{k_j^{p+1}}\right), \qquad p \ge 1. \tag{4}$$

Наприклад, якщо $g(t_j) = \dfrac{2^m (m!)^2}{(2m)!}(1+\cos \pi t_j)^m$, $m \in \mathbb{Z}$, то $\varphi(k_j r_j) =$ $= \dfrac{\sin k_j r_j}{k_j r_j} \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \left(\dfrac{k_j r_j}{i\pi}\right)^2\right]^{-1}$ і відповідно $\left|\varphi(k_j r_j)\right| = O\left(\dfrac{1}{k_j^{2m+1}}\right)$.

Розглянемо також ряд

$$S(f;x;r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(kr) c_k e^{ikx}, \tag{5}$$

який внаслідок оцінки $|c_k| = O(1)$ для $f(x) \in L^1(Q_n)$ та оцінки (4) рівномірно збігається відносно x при $r \ne 0$.

Означення **[3].** Ряд (1) підсумовується методом $\{\overline{\varphi}(kr)\}$ при $r \to 0$ до $f(x)$ у точці x, якщо в цій точці $\lim\limits_{r \to 0} S(f;x;r) = f(x)$.

Розглянемо 2π-періодичне продовження функції $g(t_j)$:

$$G(t_j, r_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2r_j} g\left(\dfrac{|t_j|}{r_j}\right), & |t_j| \le r_j, \\ 0, & r_j < |t_j| \le \pi. \end{cases} \tag{6}$$

Функція $G(t_j, r_j)$ є фінітним ядром типу Фейера, має неперервну похідну p-го порядку і має похідну $(p+1)$-го порядку обмеженої варіації. Розвинення у тригонометричний ряд цього ядра є таким:

$$G(t_j, r_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_j = 1}^{\infty} \varphi(k_j r_j) e^{ik_j t_j}. \tag{7}$$

Ряд (7) рівномірно збігається відносно x при $r \ne 0$.

Введемо n-вимірне ядро типу Фейера

$$G(t,r) = \prod_{j=1}^{n} G(t_j, r_j). \tag{8}$$

Врахувавши в (5) формули (2) і (8), запишемо функцію $S(f;x;r)$ в інтегральній формі

$$S(f;x;r) = \int_{Q_n} f(x+t) G(t,r)\,dt, \quad f(x+t) = f(x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n). \tag{9}$$

Зробивши заміну $\dfrac{t_j}{r_j} = u_j$ в (9) і врахувавши формули (2), (3), одержимо ще таку формулу для суми ряду (5):

$$S(f;x;r) = \frac{1}{2^n} \int_{\Delta} f(x+ru) g(|u|)\,du, \tag{10}$$

де

$$\Delta = \{x : -1 \le x_j \le 1,\ j = 1, \ldots, n\}, \qquad g(|u|) = \prod_{j=1}^{n} g(|u_j|),$$

$$f(x+ru) = f(x_1 + r_1 u_1, \ldots, x_n + r_n u_n).$$

3. Достатні умови збіжності кратного ряду Фур'є, підсумовуваного методом $\{\overline{\varphi}(kr)\}$.

Теорема 1. *Ряд Фур'є 2π-періодичної функції $f(x) \in L^1(Q_n)$ підсумовується методом $\{\overline{\varphi}(kr)\}$ до $f(x)$ в кожній точці її неперервності.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо ряд (5) при $r \neq 0$ та інтегральне зображення його суми (10).

Оцінимо різницю $|S(f;x;r) - f(x)|$ у точці неперервності функції $f(x)$. Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$ так, щоб точки $(x \pm \delta)$ належали околу точки неперервності функції, $r_j < \delta_j$. Тоді справджується нерівність

$$|f(x + r\xi) - f(x)| < \frac{2^n \varepsilon}{B},$$

де $B = \int\limits_{\Delta} |g(|\xi|)|\, d\xi$, $f(x + r\xi) = f(x_1 + r_1\xi_1, \ldots, x_n + r_n\xi_n)$. Оцінимо вираз $|S(f;x;r) - f(x)|$ з урахуванням інтегрального зображення (10):

$$|S(f;x;r) - f(x)| = \left| 2^{-n} \int\limits_{\Delta} f(x + r\xi) g(|\xi|)\, d\xi - f(x) \right| =$$

$$= \left| 2^{-n} \int\limits_{\Delta} [f(x + r\xi) - f(x)] g(|\xi|)\, d\xi \right| \le$$

$$\le 2^{-n} \int\limits_{\Delta} |f(x + r\xi) - f(x)| \cdot |g(|\xi|)|\, d\xi \le \frac{\varepsilon}{B} \int\limits_{\Delta} |g(|\xi|)\, d\xi| < \varepsilon.$$

Отже, $|S(f;x;r) - f(x)| < \varepsilon$ у точці неперервності функції $f(x)$ і значень r_j таких, що $r_j < \delta_j$. Теорему доведено. ◊

Теорема 2. *Якщо 2π-періодична функція $f(x) \in L^1(Q_n)$ має неперервну похідну m-го порядку $(m \ge 0)$ в точці x, $f^{(m)}(x) = \dfrac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n} f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}$, і справджується оцінка* (4), *де $p > \max\limits_j m_j$, то ряд* (1), *почленно продиференційований m разів, підсумовується методом $\{\overline{\varphi}(kr)\}$ до $f^{(m)}(x)$ у точці x.*

Д о в е д е н н я. Продиференціюємо ряд (5) та інтеграл (9) m $(m_j \le p - 1)$ разів у точці неперервності функції $f(x)$ при $r \neq 0$. Враховуючи, що

$$G^{(m_j)}(t_j, r_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2r_j} \dfrac{\partial^{m_j}}{\partial t_j^{m_j}} g\left(\dfrac{|t_j|}{r_j}\right), & |t_j| \le r_j, \\ 0, & r_j < |t_j| \le \pi, \end{cases}$$

– неперервна функція з похідною обмеженої варіації і ряд

$$G^{(m_j)}(t_j, r_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_j = -\infty}^{\infty} (ik)^{m_j} \varphi(k_j r_j) e^{ik_j t_j}$$

з огляду на оцінку $\left| k^{m_j} \varphi(k_j r_j) \right| \le \dfrac{A}{k_j^q}$, $q \ge 2$, рівномірно збігається, отримуємо рівність

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (ik)^m \varphi(kr) c_k e^{ikx} = \int\limits_{Q_n} f(t) \frac{\partial^m G(t_j - x_j, r_j)}{\partial x^m}\, dt, \tag{11}$$

де $\dfrac{\partial^m G(t_j - x_j, r_j)}{\partial x^m} = \prod_{j=1}^{n} G^{(m_j)}(t_j - x_j, r_j)$, $(ik)^m = \prod_{j=1}^{n} (ik_j)^{m_j}$.

Оцінимо різницю $\left|S^{(m)}(f;x;r) - f^{(m)}(x)\right|$ в околі точки неперервності функції $f^{(m)}(x)$. Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$ так, щоб точки $x \pm \delta$ належали околу точки неперервності функції $f^{(m)}(x)$, $r_j < \delta_j$, і $\left|f^{(m)}(x + r\xi) - f^{(m)}(x)\right| < \varepsilon$. Зробивши в інтегралі (11) заміну $\dfrac{t_j - x_j}{r_j} = \xi_j$, застосувавши формулу інтегрування частинами та врахувавши рівності $\left.\dfrac{\partial^{\ell_j} g(|\xi_j|)}{\partial \xi_j^{\ell_j}}\right|_{-1}^{1} = 0$, $0 < \ell_j < m_j$, отримаємо

$$S^{(m)}(f;x;r) = \int_{Q_n} f(t) \frac{\partial^m G(t_j - x_j, r_j)}{\partial x^m} =$$

$$= 2^{-n} \int_{\Delta} \prod_{j=1}^{n} f(x + r\xi) \frac{(-1)^{m_j}}{r_j^{m_j}} \frac{\partial^{m_j}}{\partial \xi_j^{m_j}} g(|\xi_j|)\, d\xi =$$

$$= 2^{-n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{m_j}}{r_j^{m_j}} \int_{\Delta} \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} f(x + r\xi) g(|\xi|)\, d\xi =$$

$$= 2^{-n} \int_{\Delta} \frac{\partial^m f(x + r\xi)}{\partial x^m} g(|\xi|)\, d\xi.$$

Тоді для $\left|S^{(m)}(f;x;r) - f^{(m)}(x)\right|$ виконується оцінка

$$\left|S^{(m)}(f;x;r) - f^{(m)}(x)\right| = \left|2^{-n} \int_{\Delta} f^{(m)}(x + r\xi) g(|\xi|)\, d\xi - f^{(m)}(x)\right| \le$$

$$\le 2^{-n} \int_{\Delta} \left|f^{(m)}(x + r\xi) - f^{(m)}(x)\right| \prod_{j=1}^{n} \left|g(|\xi_j|)\right| d\xi <$$

$$< 2^{-n} \varepsilon \prod_{j=1}^{n} \int_{-1}^{1} \left|g(|\xi_j|)\right| d\xi_j < \varepsilon.$$

Теорему доведено. ◊

4. Оцінки збіжності рядів функції $f(x) \in L^1(Q_n)$**.** Позначимо [4] через $H_\alpha(Q_n)$ простір 2π-періодичних неперервних функцій $f(x) \in H_\alpha(Q_n)$, які задовольняють нерівність

$$|f(x + t) - f(x)| \le h \sum_{j=1}^{n} t_j^{\alpha_j}, \tag{12}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_j \le 1$, $j = 1, \ldots, n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо наближення функції $f(x)$ послідовністю тригонометричних поліномів вигляду

$$S_N(f;x;r) = \sum_{k=-N}^{N} \varphi(kr) c_k e^{ikx}, \tag{13}$$

де c_k – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, $r \ne 0$, $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Відхилення функції $f(x)$ від полінома $S_N(f;x;r)$ позначимо через

$$\varepsilon_N(f,r) = \max_{x\in Q_n}|S_N(f;x;r) - f(x)|$$

і перетворимо його так:

$$\varepsilon_N(f,r) = \max_{x\in Q_n}|S(f;x;r) - f(x) + S_N(f;x;r) - S(f;x;r)| \le$$

$$\le \max_{x\in Q_n}|S(f;x;r) - f(x)| + \max_{x\in Q_n}|S_N(f;x;r) - S(f;x;r)|. \qquad (14)$$

Відхилення (14) залежить від двох параметрів: r та N, і згідно з теоремами 1 і 2, $\lim\limits_{r\to 0}\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N(f,r) = 0$. При цьому зміна порядку граничних переходів не допускається. Існують криві $r = r(N)$, $r(N) > 0$, з асимптотою $r = 0$, що $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N(f, r(N)) = 0$. Запишемо рівняння цих кривих у вигляді [5]

$$r_j = \frac{r_{0j}}{N_j^{\gamma_j}}, \qquad (15)$$

де r_{0j}, γ_j – сталі величини, які не залежать від N_j.

Теорема 3. *Нехай* $f(x) \in H_\alpha(Q_n)$. *Тоді справджується оцінка*

$$\varepsilon_N(f,r(N)) \le \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, & 0 < \gamma_j \le \dfrac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}} + \dfrac{B}{\prod\limits_{j=1}^{n} N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, & \dfrac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1} < \gamma_j < \dfrac{\alpha_j + p}{p + 1}, \end{cases}$$

де $A_j, B = \mathrm{const}$.

Д о в е д е н н я. Оцінимо перший доданок виразу (14) при $r_j = r_j(N_j)$ з урахуванням формули (10):

$$|S(f;x;r(N)) - f(x)| = 2^{-n}\left|\int_\Delta f(x + r(N)t)g(|t|)\,dt - f(x)\right| =$$

$$= 2^{-n}\left|\int_\Delta [f(x + r(N)t) - f(x)]g(|t|)\right| \le$$

$$\le 2^{-n}\int_\Delta |f(x + r(N)t) - f(x)||g(|t|)|\,dt \le$$

$$\le 2^{-n}h\int_\Delta \sum_{j=1}^{n}|r_j(N_j)t_j z|^{\alpha_j}\,|g(|t|)|\,dt =$$

$$= 2^{-n}h\sum_{j=1}^{n} r_j^{\alpha_j}(N_j)\int_{-1}^{1}|g_j(|t_j|)||t_j|^{\alpha_j}\,dt_j = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j^{\alpha_j}(N_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{r_{0j}^{\alpha_j}}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, \qquad a_j, A_j = \mathrm{const}.$$

Знайдемо оцінку для другого доданка (14) з урахуванням нерівності (4), яку запишемо у вигляді

$$|\varphi(k_j r_j)| \le \frac{A_j}{(k_j r_j)^{p+1}}, \qquad (16)$$

та нерівності $c_k \le b\prod\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{k_j^{\alpha_j}}$, де $k_j r_j \gg 1$, $A_j, b = \mathrm{const}$:

$$\left|S_N(f;x;r(N)) - S(f;x;r(N))\right| = \left|\sum_{|k|\geq N} \varphi(kr(N))c_k e^{ikx}\right| \leq$$

$$\leq \left|b\sum_{|k|\geq N} \varphi(kr(N))\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j^{\alpha_j}}e^{ikx}\right| < B_1\sum_{|k|\geq N}\frac{\varphi(kr(N))}{k_j^{\alpha_j}} \leq$$

$$\leq B_2\sum_{|k|\geq N}\frac{1}{(k_j r_j(N))^{p+1}k_j^{\alpha_j}} \leq B_3\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{-\gamma_j(p+1)}}\sum_{|k_j|\geq N_j}^{\infty}\frac{1}{k_j^{p+1+\alpha_j}} <$$

$$< B\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{\alpha_j+p-\gamma_j(p+1)}},$$

де $B, B_\ell = \mathrm{const}$, $\ell = 1,2,3$.

Отже, остаточну оцінку для відхилення одержимо у вигляді

$$\varepsilon_N(f, r(N)) \leq \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}} + B\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{\alpha_j+p-\gamma_j(p+1)}}. \tag{17}$$

Знайдемо порядок наближення функції $f(x)$ поліномом $S_N(f;x;r(N))$ при $N \to \infty$ на основних напрямах N_j. Відповідні доданки (17) є нескінченно малими величинами за умови $0 < \gamma_j < \dfrac{p+\alpha_j}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N(f, r(N))$ на цих напрямах досягається за умови $\alpha_j\gamma_j^0 = \alpha_j + p - \gamma_j^0(p+1)$, звідси отримуємо

$$\gamma_j^0 = \frac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1}. \tag{18}$$

Легко переконатися, що перший доданок у (17) для значень $0 < \gamma_j \leq \gamma_j^0$ є нескінченно малою найнижчого порядку на будь-яких напрямах, тому

$$\varepsilon_N(f, r(N)) \leq \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, \qquad A_j = \mathrm{const}.$$

Для значень параметрів γ_j, коли $\gamma_j^0 < \gamma_j < \dfrac{\alpha_j + p}{p+1}$, нескінченно малою найнижчого порядку може бути як перший, так і другий доданки (залежно від напрямку).

Отже, нерівність (17) набуде вигляду

$$\varepsilon_N(f, r(N)) \leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, & 0 < \gamma_j \leq \dfrac{\alpha_j+p}{\alpha_j+p+1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}} + \frac{B}{\prod_{j=1}^{n}N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, & \dfrac{\alpha_j+p}{\alpha_j+p+1} < \gamma_j < \dfrac{\alpha_j+p}{p+1}. \end{cases}$$

Теорему доведено. ◊

Позначимо відхилення функції $f(x)$ від полінома (13) в області D^*, строго внутрішній до області $D \subset Q_n$, через $\varepsilon_N^*(f, r)$ і запишемо аналогічну до (14) нерівність

$$\varepsilon_N^*(f, r) \leq \max_{x\in D^*}\left|S(f;x;r) - f(x)\right| + \max_{x\in D^*}\left|S_N(f;x;r) - S(f;x;r)\right|. \tag{19}$$

Теорема 4. *Нехай* $f(x) \in L^1(Q_n)$ *і* $f(x) \in H_\alpha(D)$, $D \subset Q_n$. *Тоді в області* D^*, *строго внутрішній до області* D, *справджується оцінка*

$$\varepsilon_N^*(f, r(N)) \le \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{A_j}{N_j^{\alpha_j \gamma_j}}, & 0 < \gamma_j \le \dfrac{p}{\alpha_j + p + 1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{A_j}{N_j^{\alpha_j \gamma_j}} + \dfrac{B}{\prod\limits_{j=1}^{n} N_j^{\alpha_j \gamma_j}}, & \dfrac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1} < \gamma_j < \dfrac{p}{p+1}, \end{cases}$$

де $A_j, B = \text{const}$.

Д о в е д е н н я. Аналогічно, як у теоремі 3, для першого доданка в (19) одержимо таку оцінку:

$$\left| S(f; x; r(N)) - f(x) \right| \le \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\alpha_j \gamma_j}}, \qquad A_j = \text{const} < \infty.$$

Враховуючи нерівність $\left| c_k \right| \le A < \infty$ (з огляду на те, що $f(x) \in L^1(Q_n)$) та нерівність (16), знайдемо оцінку другого доданка виразу (19):

$$\left| S_N(f; x; r(N)) - S(f; x; r(N)) \right| = \left| \sum_{|k| \ge N} \varphi(kr(N)) c_k e^{ikx} \right| \le$$

$$\le \left| B_1 \sum_{|k| \ge N} \varphi(kr(N)) e^{ikx} \right| \le \left| B_2 \prod_{j=1}^{n} \sum_{|k| \ge N} \frac{1}{(k_j r_j)^{p+1}} \right| \le$$

$$\le B_3 \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{N_j^{-\gamma_j(p+1)}} \sum_{|k_j| \ge N_j} \frac{1}{k_j^{p+1}} < B \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{N_j^{p - \gamma_j(p+1)}}, \; B, B_\ell = \text{const}.$$

Остаточно для відхилення $\varepsilon_N^*(f, r)$ одержимо таку оцінку:

$$\varepsilon_N^*(f, r(N)) \le \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\alpha_j \gamma_j}} + B \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{N_j^{p - \gamma_j(p+1)}}, \tag{20}$$

де $A_j, B = \text{const}$.

Обидва доданки в (20) є нескінченно малими величинами за умови $0 < \gamma_j < \dfrac{p}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N^*(f, r(N))$ на основних напрямках N_j досягається за умови, коли $\alpha_j \gamma_j^0 = p - \gamma_j^0(p+1)$. Звідси

$$\gamma_j^0 = \frac{p}{\alpha_j + p + 1}. \tag{21}$$

Перший доданок у виразі (20) для значень $0 < \gamma_j \le \gamma_j^0$ є нескінченно малою найнижчого порядку на будь-яких напрямках, тому

$$\varepsilon_N^*(f, r(N)) < \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\alpha_j \gamma_j}}, \qquad A_j = \text{const}.$$

Для випадку $\gamma_j^0 < \gamma_j < \dfrac{p}{p+1}$ нескінченно малою найнижчого порядку (залежно від напряму) може бути як перший, так і другий доданки, тому

$$\varepsilon_N^*(f,r(N)) \le \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, & 0<\gamma_j \le \frac{p}{\alpha_j+p+1}, \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\alpha_j\gamma_j}}+\frac{B}{\prod_{j=1}^{n}N_j^{\alpha_j\gamma_j}}, & \frac{p}{\alpha_j+p+1}<\gamma_j<\frac{p}{p+1}. \end{cases}$$

Теорему доведено. ◊

Теорема 5. *Нехай* 2π*-періодична функція* $f(x)$ *має в області* Q_n *обмежену похідну* m*-го порядку* $(m \ge 1)$,

$$\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}=\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}, \qquad m=m_1+\ldots+m_n.$$

Тоді справджується оцінка

$$\varepsilon_N(f,r(N)) \le \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, & 0<\gamma_j \le \frac{m_j+p}{p+2}, \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}+\frac{B}{\prod_{j=1}^{n}N_j^{\gamma_j}}, & \frac{m_j+p}{p+2}<\gamma_j<\frac{m_j+p}{p+1}, \end{cases}$$

де $A_j,\, B=\mathrm{const}$.

Д о в е д е н н я. Оцінимо перший доданок виразу (14) при $r_j=r_j(N_j)$ з урахуванням формули (11):

$$\begin{aligned} |S(f;x;r)-f(x)| &\le 2^{-n}\int_\Delta |f(x+rt)-f(x)|\cdot|g(|t|)|\,dt \le \\ &\le 2^{-n}A\cdot\int_\Delta\sum_{j=1}^{n}|r_jt_j|\cdot|g(|t|)|\,dt \le \\ &\le 2^{-n}B\cdot\sum_{j=1}^{n}r_j\int_{-1}^{1}g(|t_j|)\,dt_j \le \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, \qquad A,\,B,\,A_j=\mathrm{const}. \end{aligned}$$

Знайдемо оцінку другого доданка виразу (14). Враховуючи оцінку (16) та оцінку $c_k \le b\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j^{m_j}}$, $b=\mathrm{const}<\infty$, для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$, одержимо

$$\begin{aligned} |S_N(f;x;r(N))-S(f;x;r(N))| &= \left|\sum_{|k|\ge N}\varphi(kr(N))c_k e^{ikx}\right| \le \\ &\le b\sum_{|k|\ge N}\left|\varphi(kr(N))\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j^{m_j}}\right|e^{ikx} \le B_1\prod_{j=1}^{n}\sum_{|k_j|\ge N_j}\frac{1}{(k_jr_j(N))^{p+1}k_j^{m_j}} \le \\ &\le B_2\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{-\gamma_j(p+1)}}\sum_{|k_j|\ge N_j}\frac{1}{k_j^{p+1+m_j}} < B\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{m_j+p-\gamma_j(p+1)}}, \\ & B,\ B_\ell=\mathrm{const}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\varepsilon_N(f,r(N)) \le \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}+B\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{m_j+p-\gamma_j(p+1)}}. \tag{22}$$

Обидва доданки в (22) є нескінченно малими величинами за умови $0 < < \gamma_j < \dfrac{m_j + p}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N(f, r(N))$ на основних напрямках N_j досягається за умови $\gamma_j^0 = m_j + p - \gamma_j^0(p+1)$. Звідси

$$\gamma_j^0 = \frac{m_j + p}{p+2}.$$

Легко переконатися, що перший доданок в (22) для значень $0 < \gamma_j \le \gamma_j^0$ є нескінченно малою найнижчого порядку на будь-яких напрямках, тому

$$\varepsilon_N(f, r(N)) < \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, \qquad A_j = \text{const}.$$

Для випадку $\gamma_j^0 < \gamma_j < \dfrac{m_j + p}{p+1}$ нескінченно малою найнижчого порядку (залежно від напрямку) може бути як перший, так і другий доданки.

Отже,

$$\varepsilon_N(f, r(N)) \le \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, & 0 < \gamma_j \le \dfrac{m_j + p}{p+2}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}} + \frac{B}{\prod_{j=1}^{n} N_j^{\gamma_j}}, & \dfrac{m_j + p}{p+2} < \gamma_j < \dfrac{m_j + p}{p+1}. \end{cases}$$

Теорему доведено. ◊

Зауваження. Якщо в теоремі 5 приймемо $m = 1$, то для функції $f(x)$ справджується оцінка $|f(x+t) - f(x)| \le ht$, $h = \text{const} < \infty$, яка збігається з умовою (12) при $\alpha = 1$. Тому за цієї умови твердження теорем 3, 5 співпадають.

Запишемо вираз для відхилення функції $f^{(m)}(x)$ від полінома $S_N^{(m)}(f; x; r)$ в області D^*, строго внутрішній до області $D \subset Q_n$:

$$\varepsilon_N^*\left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, r\right) \le \max_{x\in D^*}\left|S^{(m)}(f;x;r) - f^{(m)}(x)\right| + \\ + \max_{x\in D^*}\left|S_N^{(m)}(f;x;r) - S^{(m)}(f;x;r)\right|. \tag{23}$$

Теорема 6. *Нехай 2π-періодична функція $f(x)$, $f(x) \in L^1(Q_n)$, в області D^*, строго внутрішній до області $D \subset Q_n$, має неперервну похідну m-го порядку $(m \ge 1)$, $\dfrac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$, та обмежену похідну $(m+1)$-го порядку. Тоді справджується оцінка*

$$\varepsilon_N^*\left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, r(N)\right) \le \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, & 0 < \gamma_j \le \dfrac{p - m_j}{p+2}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}} + \frac{B}{\prod_{j=1}^{n} N_j^{\gamma_j}}, & \dfrac{p - m_j}{p+2} < \gamma_j < \dfrac{p - m_j}{p+1}, \end{cases}$$

де $A_j, B = \text{const}$.

Д о в е д е н н я. Оцінимо перший доданок виразу (23) при $r_j = r_j(N_j)$ в області D^*. Використовуючи формули для $S^{(m)}(f;x;r)$ з теореми 2, одержимо вираз

$$\left|S^{(m)}(f;x;r) - f^{(m)}(x)\right| = \left|2^{-n}\int\limits_{\Delta} \frac{\partial^m f(x+r\xi)}{\partial x^m} g(|\xi|)\,d\xi - f^{(m)}(x)\right| \le$$

$$\le 2^{-n}\int\limits_{\Delta}\left|\frac{\partial^m f(x+r\xi)}{\partial x^m} - \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}\right|\prod_{j=1}^{n}\left|g(|\xi_j|)\right|d\xi <$$

$$< 2^{-n}\int\limits_{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\left|r_j t_j\right|\left|g(|t|)\right|dt < \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, \qquad A_j = \text{const}.$$

Враховуючи нерівності (16) і нерівність $|c_k| \le A < \infty$, $f(x) \in L^1(Q_n)$, отримуємо оцінку другого доданка виразу (23):

$$\left|S_N^{(m)}(f;x;r(N)) - S^{(m)}(f;x;r(N))\right| = \left|\sum_{|k|\ge N}(ik)^m \varphi(kr(N))\,c_k\,e^{ikx}\right| \le$$

$$\le \left|B_1\sum_{|k|\ge N}\prod_{j=1}^{n}k_j^{m_j}\varphi(kr(N))e^{ikx}\right| \le \left|B_2\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j^{(p+1)}}\sum_{|k_j|\ge N_j}\frac{1}{k_j^{p+1-m_j}}\right| <$$

$$< B_3\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{-\gamma_j(p+1)}}\sum_{|k_j|\ge N_j}\frac{1}{k_j^{p+1-m_j}} < B\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{p-m_j-\gamma_j(p+1)}},$$

де $B, B_\ell = \text{const}$.

Отже,

$$\varepsilon_N^*\left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, r(N)\right) \le \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}} + B\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j^{p-m_j-\gamma_j(p+1)}}, \tag{24}$$

де $A_j, B = \text{const} < \infty$.

Знайдемо порядок наближення на основних напрямках N_j функції $f^{(m)}(x)$ поліномами $S_N^{(m)}(f;x;r(N))$. Відповідні доданки (24) є нескінченно малими величинами за умови $0 < \gamma_j < \dfrac{p-m_j}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N^*\left(\dfrac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, r(N)\right)$ на цих напрямках досягається за умови $\gamma_j^0 = p - m_j - \gamma_j^0(p+1)$. Звідси

$$\gamma_j^0 = \frac{p-m_j}{p+2}. \tag{25}$$

Легко переконатися, що перший доданок в (24) для значень $0 < \gamma_j \le \gamma_j^0$ є нескінченно малою величиною найнижчого порядку на будь-яких напрямках, тому

$$\varepsilon_N^*\left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, r(N)\right) < \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, \qquad A_j = \text{const} < \infty.$$

Коли параметр γ_j в (24) набуває значень з інтервалу $\gamma_j^0 < \gamma_j < \dfrac{p-m_j}{p+1}$, нескінченно малою найнижчого порядку (залежно від напрямку) може бути як перший, так і другий доданки.

Таким чином, нерівність (24) набуде вигляду

$$\varepsilon_N^*\left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, r(N)\right) \le \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{A_j}{N_j^{\gamma_j}}, & 0 < \gamma_j \le \dfrac{p-m_j}{p+2}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{A_j}{N_j^{\gamma_j}} + \dfrac{B}{\prod\limits_{j=1}^{n} N_j^{\gamma_j}}, & \dfrac{p-m_j}{p+2} < \gamma_j < \dfrac{p-m_j}{p+1}, \end{cases}$$

де A_j, $B = \text{const}$. Теорему доведено. ◊

5. Висновки. Сформульовані теореми розширюють межі застосовності математичного апарату методу Фур'є з використанням систем тригонометричних функцій для розв'язування задач математичного аналізу та математичної фізики, зокрема, для побудови сингулярних розв'язків рівнянь з частинними похідними.

Зображення сингулярних функцій у вигляді збіжних послідовностей узагальнених частинних сум рядів дозволяє використовувати їх для зведення крайових задач до інтегральних рівнянь і формулювання ефективних числових методів їх розв'язування.

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – Москва: Наука, 1965. – 408 с.
2. *Бугров Я. С.* Теоремы вложения и сходимость кратных рядов Фурье // Тр. Мат. Ин-та им. В. А. Стеклова. – 1988. – **181**. – С. 15–26.
3. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений. – Москва: Физматгиз, 1959. – 212 с.
4. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
5. *Сухорольский М. А.* Усреднение тригонометрических рядов // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 6. – С. 53–56.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – Москва: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.
7. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1951. – 504 с.
8. *Mittal M. L., Rhoades B. E.* Degree of approximation to functions in normed space // J. Comput. Anal. and Appl. – 2000. – **2**, No. 1. – P. 1–10.
9. *Singh T., Mahajan P.* Error bound of periodic signals in the Hölder metric // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2008. – Article ID 495075. – 9 p.

СУММИРОВАНИЕ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ОБОБЩЕННЫМИ МЕТОДАМИ, СФОРМУЛИРОВАННЫМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ δ-ПОДОБНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются обобщенные суммы кратных тригонометрических рядов. Исследованы достаточные условия сходимости рядов, полученных почленным дифференцированием рядов для функций, интегрируемых по Лебегу, а также исследованы погрешности приближения функций последовательностями обобщенных частичных сумм рядов.

SUMMATION OF MULTIPLE TRIGONOMETRIC SERIES BY GENERALIZED METHODS FORMULATED BY USING δ-LIKE FINITE FUNCTIONS

The generalized sums of multiple trigonometric series are studied. Sufficient conditions of series convergence obtained by term-wise differentiation of the series for the Lebesgue integrable functions are investigated. The errors of approximation of the functions by the sequences of generalized partial sums of series are also considered.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
04.06.09