УДК 518.61.001.573

А. Я. Бомба, О. А. Фурсачик

ОБЕРНЕНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ У ЧОТИРИКУТНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ ОБЛАСТЯХ

Побудовано алгоритм асимптотичного наближення розв'язків обернених сингулярно збурених крайових задач типу конвекція-дифузія з невідомим коефіцієнтом дифузії, залежним від координат чотирикутної криволінійної області фільтрації, у випадку достатньої гладкості та узгодженості умови перевизначення, початкової і граничних умов. На відміну від конструкції алгоритму стосовно розв'язання аналогічних задач для двозв'язних областей, тут у відповідних формулах містяться поправки, що враховують вплив «бічних джерел забруднень». За допомогою цього алгоритму проведено комп'ютерний експеримент, на основі результатів якого підтверджено відомий факт «сильної чутливості» моделі стосовно задання умови перевизначення, зокрема, виявлено специфіку впливу цієї умови на шуканий коефіцієнт дифузії в залежності від швидкості фільтрації.

У роботах [4, 5, 9, 13, 14] розроблено ефективні асимптотичні методи для розв'язування сингулярно збурених параболічних та еліптичних крайових задач з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (ребрових) точках. У подальшому відповідні методи модифіковано стосовно розв'язування модельних задач конвективної дифузії під час фільтрації в криволінійних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, у випадках переважання конвективних складових процесу над дифузійними [1, 2], що призводить до появи у відповідному параболічному рівнянні малого параметра біля старших похідних (в основі методики розв'язання таких задач лежить ідея переходу від координат фізичної області фільтрації до відповідної області комплексного потенціалу). Але в окреслених вище задачах коефіцієнти, що входять до відповідних рівнянь процесів масопереносу, зокрема, коефіцієнт дифузії, вважалися наперед заданими (сталими величинами або функціями). Проте на основі численних досліджень і спостережень зроблено висновки, що на величину коефіцієнта дифузії, який характеризує інтенсивність проникнення розчинних речовин у рідину, впливають різноманітні фактори, зокрема швидкість фільтрації та шукана концентрація (див. [3, 6, 7, 17, 18]), хоча характер відповідної залежності не завжди є відомим. Тому значний практичний інтерес становлять задачі про визначення невідомих коефіцієнтів процесу масопереносу, що призводить до необхідності розв'язування обернених задач. Дослідженню питань коректності, зокрема, стійкості розв'язку та можливості регуляризації такого роду задач присвячені праці А. М. Тихонова, М. М. Лаврентьєва, О. Ю. Щеглова, C. Pucci, J. R. Cannon, F. Ginsberg, P. Knabner, S. Vessela, P. Manselli, K. Miller, D. N. Hao, М. І. Іванчова, О. І. Прилєпка, А. Б. Костіна та ін. (див., наприклад, [8, 10–12, 15, 16]).

У цій роботі йдеться про асимптотичне розвинення розв'язків задач типу конвекція-дифузія для випадку, коли невідомий коефіцієнт дифузії залежить від координат фізичної області ($D = D(x,y)$).

1. Постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де $G_z = \mathcal{ABCD}$ ($z = x + iy$) – однозв'язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою у точках перетину кривими $\mathcal{AB} = \{z = x + iy : \ f_1(x,y) = 0\}$, $\mathcal{BC} = \{z : f_2(x,y) = 0\}$, $\mathcal{CD} = \{z : f_3(x,y) = 0\}$, $\mathcal{DA} = \{z : f_4(x,y) = 0\}$, розглядатимемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,y)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)-v_x(x,y)\frac{\partial c}{\partial x}-v_y(x,y)\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

$$c(x,y,0)=c_0^0(x,y), \quad (2)$$

$$c|_{\mathcal{AB}}=c_*(M,t), \qquad c|_{\mathcal{CD}}=c^*(M,t),$$

$$c|_{\mathcal{AD}}=c_{**}(M,t), \qquad c|_{\mathcal{BC}}=c^{**}(M,t), \quad (3)$$

$$b(x,y)\frac{\partial c(x,y,0)}{\partial t}=c_*^*(x,y), \qquad (x,y)\in G_z, \quad (4)$$

$$(v_x,v_y)=\operatorname{grad}\varphi(x,y), \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

$$\varphi|_{\mathcal{AB}}=\varphi_*, \qquad \varphi|_{\mathcal{CD}}=\varphi^*, \qquad \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{\mathcal{BC}}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{\mathcal{DA}}=0, \quad (5)$$

де $c(x,y,t)$ – концентрація розчинної речовини в точці (x,y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини є безрозмірними); M та n – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої; φ, v_x, v_y – відповідно потенціал і компоненти його швидкості фільтрації у пористому середовищі G_z; $D(x,y)=\varepsilon b(x,y)$ – коефіцієнт дифузії, $b(x,y)$ – невідома достатньо гладка обмежена функція, ε – малий параметр; c_0^0, c_*, c^*, c^{**}, c_{**} – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (зокрема, в кутових точках) області G.

Прийнявши, що задача (5) є розв'язаною [1], зокрема знайдено поле швидкостей $(v_x(x,y),v_y(x,y))$, і виконавши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ у рівнянні (1) та умовах (2)–(4), отримаємо відповідну «дифузійну задачу» для області $\tilde{G}=G_w\times(0,\infty)$ (тут $G_w=\{w:\varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ Q_*<\psi<Q^*\}$):

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\big[a(\varphi,\psi)(u_{\varphi\varphi}+u_{\psi\psi})+a_\varphi(\varphi,\psi)u_\varphi(\varphi,\psi)+$$
$$+a_\psi(\varphi,\psi)u_\psi(\varphi,\psi)\big]-v^2(\varphi,\psi)u_\varphi=u_t, \quad (6)$$

$$u(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi), \quad (7)$$

$$u(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t), \qquad u(\varphi^*,\psi,t)=u^*(\psi,t),$$

$$u(\varphi,Q_*,t)=u_{**}(\varphi,t), \qquad u(\varphi,Q^*,t)=u^{**}(\varphi,t), \quad (8)$$

$$a(\varphi,\psi)u_t(\varphi,\psi,0)=u_*^*(\varphi,\psi), \quad (9)$$

де

$$u(\varphi,\psi,t)=c\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t\big), \qquad u_*(\psi,t)=c_*\big(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi),t\big),$$

$$u^*(\psi,t)=c^*\big(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi),t\big), \qquad u_{**}(\psi,t)=c_{**}\big(x(\varphi,Q_*),y(\varphi,Q_*),t\big),$$

$$u^{**}(\psi,t)=c^{**}\big(x(\varphi,Q^*),y(\varphi,Q^*),t\big), \qquad a(\varphi,\psi)=b\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi)\big),$$

$$u_*^*(\varphi,\psi)=c_*^*\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi)\big).$$

2. Асимптотика розв'язку. Асимптотичне наближення для розв'язку задачі (1)–(4) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$ шукатимемо у вигляді рядів [1, 4]:

$$u(\varphi,\psi,t) = u_0(\varphi,\psi,t) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i\, u_i(\varphi,\psi,t) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i\, \pi_i(\xi,\psi,t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^{i/2}\, \underline{p}_{i/2}(\varphi,\eta,t) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^{i/2}\, \overline{p}_{i/2}(\varphi,\mu,t) + R_m(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\,,$$

$$a(\varphi,\psi) = a_0(\varphi,\psi) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i a_i(\varphi,\psi) + r_m(\varphi,\psi,\varepsilon)\,, \tag{10}$$

де $u_i(\varphi,\psi,t)$, $a_i(\varphi,\psi)$, $i = 0,\ldots,m$, − члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $u_0(\varphi,\psi,t)$ − розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $u_i(\varphi,\psi,t)$ − поправки, які враховують вплив дифузії всюди в області $\tilde{G}$, за винятком деякої її примежової ділянки; $\pi_i(\xi,\psi,t)$, $\underline{p}_{i/2}(\varphi,\eta,t)$, $\overline{p}_{i/2}(\varphi,\mu,t)$ − функції типу примежового шару відповідно в околах $\varphi = \varphi^*$ (поправки навколо виходу фільтраційної течії) і $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$ (поправки, що враховують вплив «бічних джерел забруднень»); $\xi = \dfrac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\eta = \dfrac{\varphi^* - \varphi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mu = \dfrac{Q^* - \varphi}{\sqrt{\varepsilon}}$ − «розтяги» відповідних змінних; $R_m(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ та $r_m(\varphi,\psi,\varepsilon)$ − залишкові члени.

Підставивши розвинення (10) у систему (6)−(9) і виконавши стандартну процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, одержуємо такі задачі для знаходження u_i та a_i:

$$v^2(\varphi,\psi)\cdot u_{0\varphi}(\varphi,\psi,t) + u_{0t}(\varphi,\psi,t) = 0\,,$$

$$u_0(\varphi_*,\psi,t) = u_*(\psi,t), \qquad u_0(\varphi,\psi,0) = u_0^0(\varphi,\psi)\,, \tag{11}$$

$$a_0(\varphi,\psi)\big[u_{0_t}(\varphi,\psi,0) + \pi_{0_t}(0,\psi,0) + \underline{p}_{0_t}(\varphi,0,0) +$$

$$+ \overline{p}_{0_t}(\varphi,0,0)\big] = u_*^*(\varphi,\psi)\,, \tag{12}$$

$$v^2(\varphi,\psi)\cdot u_{k\varphi}(\varphi,\psi,t) + u_{kt}(\varphi,\psi,t) = g_k(\varphi,\psi,t)\,,$$

$$u_k(\varphi,\psi,0) = 0, \qquad u_k(\varphi_*,\psi,t) = 0\,, \tag{13}$$

$$a_k(\varphi,\psi)\big[\, u_{0_t}(\varphi,\psi,0) + \pi_{0_t}(\varphi,\psi,0) + \underline{p}_{0_t}(\varphi,0,0) + \overline{p}_{0_t}(\varphi,0,0)\,\big] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}(\varphi,\psi)\big[u_{i_t}(\varphi,\psi,0) + \pi_{i_t}(0,\psi,0) + \underline{p}_{i_t}(\varphi,0,0) +$$

$$+ \overline{p}_{i_t}(\varphi,0,0)\big] = 0, \qquad k = 1,\ldots,m\,, \tag{14}$$

де

$$g_k(\varphi,\psi,t) = v^2(\varphi,\psi)\Bigg(\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}(\varphi,\psi)(u_{i\varphi\varphi} + u_{i\psi\psi}) +$$

$$+ a_{k-i\varphi}(\varphi,\psi)u_{i\varphi} + a_{i\psi}(\varphi,\psi)u_{i\psi}\Bigg).$$

В результаті розв'язання (11)−(14) отримуємо

$$u_0(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} u_*(\psi, t - f(\varphi,\psi)), & t \ge f(\varphi,\psi), \\ u_0^0\big(f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t),\psi\big), & t < f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$a_0(\varphi,\psi) = u_*^*(\varphi,\psi)\left[u_{0_t}(\varphi,\psi,0) + \pi_{0_t}(0,\psi,0) + \right.$$

$$\left. + \underline{p}_{0_t}(\varphi,0,0) + \bar{p}_{0_t}(\varphi,0,0) \right]^{-1},$$

$$u_k(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} \dfrac{g_k(\tilde{\varphi},\psi,t - f(\varphi,\psi) + f(\tilde{\varphi},\psi))}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)} d\tilde{\varphi}, & t \ge f(\tilde{\varphi},\psi), \\ \int\limits_0^t g_k(f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t + \tilde{t}),\psi,\tilde{t}))\,d\tilde{t}, & t < f(\tilde{\varphi},\psi), \end{cases}$$

$$a_k(\varphi,\psi) = -\left\{ \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}(\varphi,\psi)\left[u_{i_t}(\varphi,\psi,0) + \pi_{i_t}(0,\psi,0) + \underline{p}_{i_t}(\varphi,0,0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{p}_{i_t}(\varphi,0,0) \right\}\left[u_{0_t}(\varphi,\psi,0) + \pi_{0_t}(0,\psi,0) + \underline{p}_{0_t}(\varphi,0,0) + \right.$$

$$\left. + \bar{p}_{0_t}(\varphi,0,0) \right]^{-1}, \qquad k = 1,\dots,m\,,$$

де $f(\varphi,\psi) = \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} \dfrac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}$, де f^{-1} – функція, обернена до f стосовно змінної φ.

Для знаходження поправок на виході фільтраційного потоку маємо такі задачі:

$$a_0(\varphi^*,\psi)\pi_{0\xi\xi}(\xi,\psi,t) + \pi_{0\xi}(\xi,\psi,t) = 0\,,$$

$$\pi_0(0,\psi,t) = u^*(\psi,t) - u_0(\varphi^*,\psi,t), \qquad \pi_0 \underset{\xi\to\infty}{\to} 0\,,$$

$$a_0(\varphi^*,\psi)\pi_{1\xi\xi}(\xi,\psi,t) + \pi_{1\xi}(\xi,\psi,t) =$$

$$= -\pi_{0\xi\xi}\xi\left(a_0'(\varphi^*,\psi) + \frac{2v'(\varphi^*,\psi)}{v(\varphi^*,\psi)} a(\varphi_0{}^*,\psi) \right) +$$

$$+ \pi_{0\xi}\left(a_{0\varphi}(\varphi^*,\psi) + \frac{2v'(\varphi^*,\psi)}{v(\varphi^*,\psi)}\xi \right) + \frac{\pi_{0t}}{v^2(\varphi^*,\psi,t)}\,,$$

$$\pi_1(0,\psi,t) = -u_1(\varphi^*,\psi,t), \qquad \pi_1 \underset{\xi\to\infty}{\to} 0\,, \qquad \text{і т. д.}$$

Аналогічно, як в [1, 3], внаслідок розв'язання цих задач отримуємо

$$\pi_0(\xi,\psi,t) = \left[u^*(\psi,t) - u_0(\varphi^*,\psi,t) \right] e^{-\xi/a_0(\varphi^*,\psi)}\,,$$

$$\pi_1(\xi,\psi,t) = \left(-u_1(\varphi^*,\psi,t) \right) e^{-\xi/a_0(\varphi^*,\psi)} + b_0\xi + b_1\xi^2\,,$$

де

$$b_0 = \frac{\pi_{0t}}{v^2(\varphi^*,\psi,t)} - a_0(\varphi^*,\psi)\left[\pi_{0\xi\xi}\left(a_1'(\varphi^*,\psi) + \frac{2v'(\varphi^*,\psi)}{v(\varphi^*,\psi)} \right) \right] +$$

$$+ \pi_{0\xi} a_{0\varphi}(\varphi^*,\psi)\,,$$

$$b_1 = \frac{\pi_{0\xi\xi}}{2}\left(\frac{a_1'(\varphi^*,\psi)}{1!} + \frac{2v'(\varphi^*,\psi)}{v(\varphi^*,\psi)} a_0(\varphi^*,\psi) \right) + \pi_{0\xi}\frac{v'(\varphi^*,\psi)}{v(\varphi^*,\psi)}\,.$$

Для усунення нев'язок в околі $\psi = Q_*$ маємо такі задачі:

$$v^2(\varphi, Q_*)a_0(\varphi, Q_*)\underline{p}_{0\eta\eta} - v^2(\varphi, Q_*)a_{0\varphi}(\varphi, Q_*)\underline{p}_{0\varphi} = \underline{p}_{0t},$$

$$\underline{p}_0(\varphi, 0, t) = c_{**}(\varphi, t) - u_0(\varphi, Q_*, t) - \pi_0(\varphi, Q_*, t), \qquad \underline{p}_0 \underset{\eta\to\infty}{\to} 0,$$

$$v^2(\varphi, Q_*)a_0(\varphi, Q_*)\underline{p}_{1/2\eta\eta} - v^2(\varphi, Q_*)a_{0\varphi}(\varphi, Q_*)\underline{p}_{1/2\varphi} =$$

$$= \underline{p}_{1/2t} - 2\eta v'(\varphi, Q_*)a_0(\varphi, Q_*)v^{-1}(\varphi, Q_*)\underline{p}_{0\eta\eta},$$

$$\underline{p}_{1/2}(\varphi, Q_*, t) = 0, \qquad \underline{p}_{1/2}(\varphi, Q_*, t) \underset{\eta\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{і т. д.}$$

Зовнішню примежову функцію $\overline{p}$ будуємо аналогічно до того, як це було зроблено для примежової функції $\underline{p}$ (для цього вводимо заміну $\mu = (Q - \psi)/\sqrt{\varepsilon}$, $\psi = Q - \mu\sqrt{\varepsilon}$). Розв'язки цих останніх задач (як задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та параболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами) отримуємо в явному вигляді, при цьому

$$R_m(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = \varepsilon^{m+1}q_m(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \qquad r_m(\varphi, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^{m+1}p_m(\varphi, \psi, \varepsilon),$$

де $q_m(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ та $p_m(\varphi, \psi, \varepsilon)$ визначаються через відомі члени рядів (10).

Результати числових розрахунків. Наведемо результати розрахунку процесу конвекція-дифузія на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (відповідно витік і втік однакових інтенсивностей, що дорівнюють 2π), комплексний потенціал якого $w = \ln((z - z_1)/(z - z_2))$, при $\varphi_* = -1.5$, $\varphi^* = 1.5$, $\mathscr{AD} = \{z : \psi(x, y) = 2\pi/3\}$, $\mathscr{BC} = \{z : \psi(x, y) = 4\pi/3\}$. На рис. 1 зображено зміну швидкості фільтрації $v = ((dz/dw)(\overline{dz/dw}))^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) над відповідною областю G_w: $\varphi_i \overset{\text{def}}{=} \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*)i)/10$, $\psi_j \overset{\text{def}}{=} Q_* + ((Q^* - Q_*)j)/20$, $i = 0, \ldots, 10$, $j = 0, \ldots, 20$.

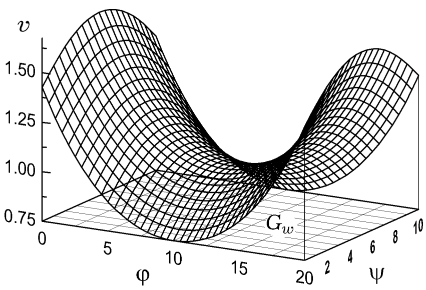

Рис. 1

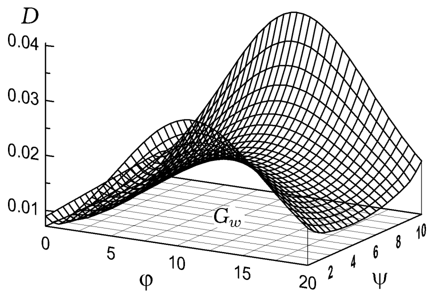

Рис. 2

Характер залежності шуканого коефіцієнта дифузії $D = D(\varphi, \psi)$ від умови перевизначення з урахуванням впливу поля швидкості фільтрації та інших параметрів при $\varepsilon = 0.001$,

$$u_0^0(\varphi, \psi) = 0.3 + \frac{1}{3 + \psi + (\varphi + 3.7)^2},$$

$$u_*(\psi, t) = 0.3 + \frac{t + 1}{(3 + \psi + (\varphi_* + 3.7)^2)(t^2 + 1)},$$

$$u^*(\psi, t) = 0.3 + \frac{t + 1}{(3 + \psi + (\varphi^* + 3.7)^2)(t^2 + 1)},$$

$$u_{**}(\varphi, t) = 0.3 + \frac{t+1}{\left(3 + Q_* + (\varphi + 3.7)^2\right)(t^2 + 1)},$$

$$u^{**}(\varphi, t) = 0.3 + \frac{t+1}{\left(3 + Q^* + (\varphi + 3.7)^2\right)(t^2 + 1)},$$

$$u_*^*(\varphi, \psi) = 0.3 + e^{-\psi} \frac{1}{3 + (\varphi + 3.7)^2},$$

проілюстровано на рис. 2. При цьому підкреслимо, що великі значення коефіцієнта дифузії в околі прямої $\varphi = 10$ пов'язані із необхідністю дифузійної компенсації «конвективної малості» (малої швидкості фільтрації в околі цієї прямої) для забезпечення виконання заданої умови перевизначення; в околах $\varphi = \varphi_*$ та $\varphi = \varphi^*$, навпаки: велика конвекція зумовлює малість дифузійної складової процесу ($\min\limits_{\varphi} \max\limits_{\psi} v(\varphi, \psi) = v(\varphi_{10}, \psi_5)$ забезпечує $\max\limits_{\varphi} \min\limits_{\psi} D(\varphi, \psi)$ у даній точці (φ_{10}, ψ_5)).

На рис. 3 зображено зміну розподілу концентрації «забруднюючої» речовини в моменти часу $t_1 = 0$ (початковий розподіл), $t_2 = 1.035$, $t_3 = 1.87$ та $t_4 = 2.367$. Очевидно, що велика контрастність концентрації u вздовж ділянок границі даної області зумовлюється, у першу чергу, специфікою поведінки $D(\varphi, \psi)$.

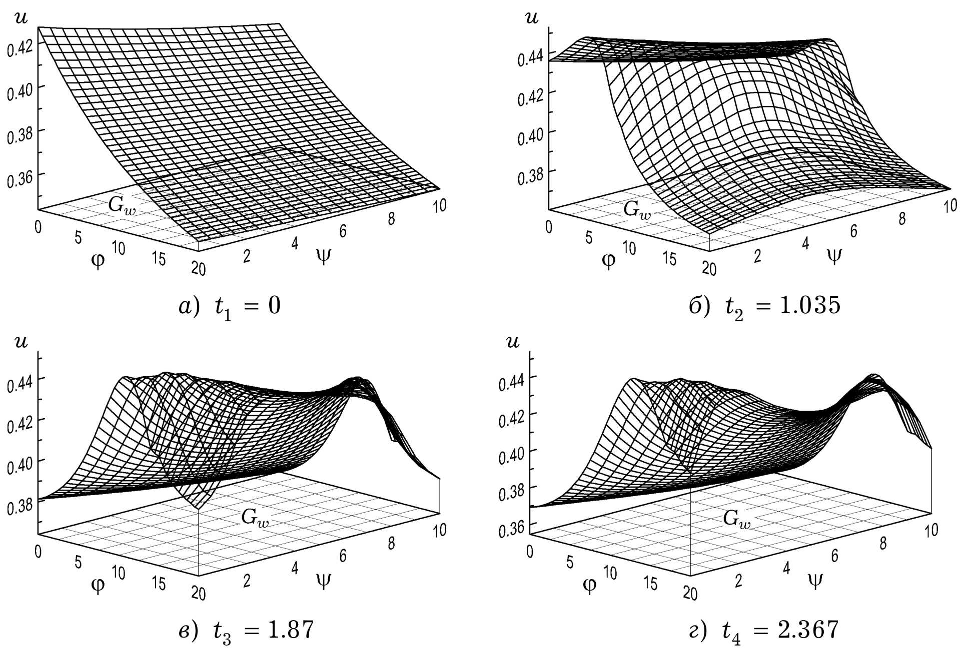

Рис. 3

Висновки. Побудовано конструктивний алгоритм асимптотичного наближення розв'язків обернених сингулярно збурених крайових задач типу конвекція-дифузія з невідомим коефіцієнтом дифузії, залежним від координат чотирикутної криволінійної області фільтрації, у випадку достатньої гладкості та узгодженості умови перевизначення, початкової і граничних умов, де, на відміну від конструкції алгоритму стосовно розв'язання аналогічних задач для двозв'язних областей [3], враховано поправки не лише в околі виходу фільтраційної течії ($\varphi = \varphi^*$), а й вплив «бічних джерел забруднень» ($\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$).

Запропоновані модель, процедура побудови та числові результати розв'язку є досить чутливими до задання умови перевизначення, початкової та граничних умов, поля швидкості фільтрації, а також співвідношення між ними; суттєвими для одержання побудованого вище асимптотичного розвинення розв'язку є гладкість та узгодження граничних і початкових умов та умови перевизначення, зокрема для виконання нерівностей $D(\varphi,\psi) > 0$ (що відповідає фізичному змісту коефіцієнта дифузії), необхідним є дотримання умови $u_*(\psi,t) > u_0^0(\varphi,\psi)$ (для деякого околу прямої $\varphi = \varphi_*$, $\psi = \psi$, $t = 0$).

1. *Бомба А. Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн. – 1982. – **4**, № 4. – С. 493–496.
2. *Бомба А. Я., Присяжнюк І. М.* Асимптотичне розвинення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу конвекція-дифузія із запізненням // Доп. НАН України. – 2005. – № 3. – С. 60–66.
3. *Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Фурсачик О. А.* Обернені сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» для двозв'язних областей // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 19–25.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – Москва: Наука, 1973. – 273 с.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.
6. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Чисельне розв'язання одного класу задач, що зустрічаються в теорії фільтраційної консолідації // Доп. НАН України. – 2000. – № 12. – С. 65–72.
7. *Ентов В. М.* Теория фильтрации // Соросовский образовательный журн. – 1998. – № 2. – С. 121–128.
8. *Іванчов М. І., Сагайдак Р. В.* Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 1. – С. 7–16.
9. *Методы* теории сингулярных возмущений в прикладных задачах. – Рига: Intelserv, 1990. – 198 с.
10. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II / Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 5. – С. 147–162.
11. *Пятков С. Г.* Некоторые обратные задачи для параболических уравнений // Фундамент. и прикл. математика. – 2006. – **12**, № 4. – С. 187–202.
    То же: *Pyatkov S. G.* Certain inverse problems for parabolic equations // J. Math. Sci. – 2008. – **150**, No. 5. – P. 2422–2433.
12. *Шефке Р.* Обратные задачи в теории сингулярных возмущений // Тр. Междунар. конф. по дифференц. и функционально-дифференц. уравнениям – сателлита Междунар. конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 авг., 2002): Ч. 3: Совр. математика и фундам. направления. – 2003. – **3**. – С. 63–88.
13. *Aronson D. G.* Linear parabolic equations containing a small parameter // J. Rat. Mech. Anal. – 1956. – No. 5. – P. 1003–1014.
14. *Bobisud L. E.* Parabolic equations wits a small parameter and discontinuous data // J. Math. Anal. and Appl. – 1969. – **26**, No. 1. – P. 208–220.
15. *Liu Yang, Jian-Ning Yu, Zui-Cha Deng.* An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation // Appl. Math. Modelling. – 2008. – **32**, No. 10. – P. 1984–1995.
16. *Pyatkov S. G.* Solvability of some inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-Posed Problems. – 2004. – **12**, No. 4. – P. 397–412.
17. *Shidfar A., Pourgholi R., Ebrahimi M.* A numerical method for solving of a nonlinear inverse diffusion problem // Computers & Math. with Appl. – 2006. – **52**, No. 6–7. – P. 1021–1030.
18. *Wenyuan Liao, Mehdi Dehghan, Akbar Mohebbi.* Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation // J. Comput. and Appl. Math. – 2009. – **232**, No. 2. – P. 351–360.

ОБРАТНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОНВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ В ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЛАСТЯХ

Построен алгоритм асимптотического приближения решений обратных сингулярно возмущенных краевых задач типа конвекция-диффузия с неизвестным коэффициентом диффузии, зависящим от координат четырехугольной криволинейной области фильтрации, для случая достаточной гладкости и согласованности условий переопределения, начальных и граничных условий. В отличие от конструкции алгоритма относительно решения аналогичных задач для двухсвязных областей, здесь в соответственных формулах фигурируют поправки, которые учитывают влияние «боковых источников загрязнения». На этой основе проведен компьютерный эксперимент, в результате которого подтвержден известный факт «сильной чувствительности» модели относительно задания условия переопределения, в частности, установлена специфика влияния этого условия на искомый коэффициент диффузии в зависимости от скорости фильтрации.

INVERSE SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS OF CONVECTION-DIFFUSION TYPE IN QUADRANGULAR CURVILINEAR REGIONS

An algorithm is constructed for asymptotic approximation of solutions to inverse singular perturbed boundary-value convection-diffusion type problems with unknown diffusion coefficient which depends on the coordinates of quadrangular curvilinear region of filtration in the case of reasonable smoothness and consistency of the overdetermination condition, initial and boundary conditions. Corrections are appearing in the corresponding formulas which take into account the influence of «lateral source of pollution» in contrast to construction of algorithm of solving similar problems in a doubly-connected region. On this basis the computer experiment is carried out the results of which confirm the well-known fact of the model «strong sensibility» in respect to prescribing the overdetermination condition. Specific character of influence of this condition on the diffusion coefficient depending on the filtration velocity is revealed.

Нац. ун-т водного госп-ва
та природокористування, Рівне

Одержано
06.07.09