

М. Е. Воронянская, К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЯДЕРНЫХ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ**

Построены математические модели теплообмена при движении несжимаемой вязкой жидкости по каналам с винтовым типом симметрии, в том числе при полизональном оребрении твэлов, в криволинейных неортогональных координатах. Для ламинарного течения в области тепловой стабилизации трехмерная задача сведена к двумерной и исследовано влияние параметра закрутки на распределение температурного поля. Рассмотрены численные решения модельных многопараметрических задач расчета стационарных температурных полей методом R-функций, что позволило выбрать соответствующие конструктивные средства RFM для последующего решения реальных задач.

Введение. Современный ядерный реактор представляет собой сложную конструкцию с разнообразными процессами, происходящими во всех элементах активной зоны и теплоносителя. Так как материалы активной зоны работают в напряженных условиях и обычно близки к пределу своих возможностей, вопросы надежной и безотказной работы реактора в значительной степени определяются его температурным режимом. Для увеличения эффективного коэффициента теплопередачи в технике широко используются скрученные трубы [17] и оребренные теплопередающие поверхности [7]. Применяют продольные, поперечные, спиральные ребра, в частности, для оребрения оболочек твэлов ядерных реакторов и наружных поверхностей труб парогенераторов. Оребрение не только увеличивает поверхность теплообмена с той стороны, где коэффициент теплоотдачи имеет низкое значение, но и оказывает большое влияние на гидродинамику потока, а тем самым и на коэффициент теплоотдачи. Очевидно, что чем лучше перемешивается среда в основном потоке и в межреберных зазорах, тем выше коэффициент теплоотдачи. Наиболее выгодными формами оребрения оболочек твэлов являются шевронное и полизональное оребрение [7], которые выполняются в виде многозаходной спирали с большим шагом (рис. 1). С практической точки зрения актуальность задачи также определяется значительным распространением скрученных цилиндрических тел, скрученных каналов в энергетике, химической, нефтяной, газовой, металлургической отраслях промышленности и в теплотехническом оборудовании. Поля температур можно найти либо экспериментально, либо решая соответствующие краевые задачи математической физики. При конструировании ядерных реакторов, теплообменников и других тепловых установок возникают задачи, решать которые аналитическими методами чаще всего невозможно, например, задача расчета температурных полей в деталях, имеющих сложную форму. При этом условия теплообмена на границе тел могут быть переменными как на поверхности, так и во времени. Такие проблемы, как правило, не поддаются решению точными аналитическими методами.

В последнее время для решения краевых задач теплопроводности все большее применение получают приближенные аналитические методы, в том числе вариационные [5]. Они имеют то преимущество, что позволяют находить решение задачи в аналитической форме. Последнее обстоятельство является очень важным при решении вопросов оптимизации проектирования и для разработки систем автоматизированного проектирования, так как параметры задачи (коэффициенты теплопроводности, температуропроводности сред, геометрические размеры тел и т.п.) входят при этом в аналитические выражения в явной форме и ими предоставляется возможность свободно варьировать.

Целью данной работы является построение математических и компьютерных моделей теплообмена при движении вязкой несжимаемой жидкости в каналах с винтовым типом симметрии, в том числе при полизональном оребрении твэлов (см. рис. 1), а также применение и совершенствование конструктивного аппарата метода R -функций для расчета температурных полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок произвольной формы.

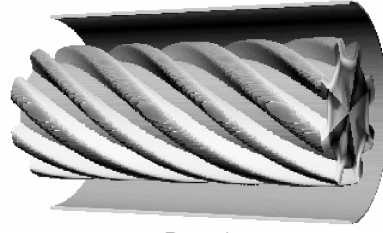


Рис. 1

Построение математических моделей. Одним из путей развития математического моделирования является поиск симметрии решаемой задачи и ее формулировка в системе координат, которая тем или иным образом учитывает указанную симметрию. Во многих случаях этот прием позволяет значительно упростить задачу, а в некоторых случаях и уменьшить ее размерность [1–4, 9, 19]. В работах [2, 3, 9] на основе теории R -функций рассматривался метод построения нормализованного уравнения

$$\omega_1(x, y, z) \equiv \frac{\omega(\hat{x}, \hat{y})}{\sqrt{1 + \alpha^2 \left(\hat{y} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} \right)^2}} = 0 \quad (1)$$

бесконечной винтовой поверхности $\partial\Omega_1$ с параметром закрутки $\alpha = \frac{2\pi}{H}$ и направляющей $\partial\Omega$, уравнение которой в нашем случае

$$\omega(\hat{x}, \hat{y}) = f_1 \wedge_0 \omega_2 = 0,$$

где опорные функции и функции оребрения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= (R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2) \frac{1}{2R}, \\ \omega_2 &= ((f_{22} \wedge_0 f_{33}) \wedge_0 (f_{44} \wedge_0 f_{55})) \wedge_0 f_{0t}, \\ f_{22} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{f_2^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2} + f_2^2, & f_2 &= \hat{x}, \\ f_{33} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{f_3^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2} + f_3^2, & f_3 &= \hat{y}, \\ f_{44} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{f_4^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2} + f_4^2, & f_4 &= \left(\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right), \\ f_{55} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{f_5^4 + \varphi^2} - \varphi \right)^2} + f_5^2, & f_5 &= \left(\frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right), \\ \varphi &= (R_1^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2) \frac{1}{2R_1}, \\ f_{0t} &= (-R_2^2 + \hat{x}^2 + \hat{y}^2) \frac{1}{2R_2}, \end{aligned}$$

а неортогональные криволинейные координаты \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} связаны с декартовыми соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} \cos \alpha z - \hat{y} \sin \alpha z, \\ y &= \hat{x} \sin \alpha z + \hat{y} \cos \alpha z, \\ \hat{z} &= z. \end{aligned} \quad (2)$$

Основная система уравнений, описывающая процесс теплообмена в потоке вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами, в обобщен-

ных координатах выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \tau} + V^i \frac{\partial T}{\partial x^i} &= \frac{a}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{|g|} \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu \Phi}{\rho c_p}, \\ \frac{\partial V^i}{\partial \tau} + V^k V_{,k}^i &= -\frac{g^{ik}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^k} + \nu g^{km} (V_{,m}^i)_{,k}, \\ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} V^i) &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Вычисляя первые $V_{,k}^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^j \Gamma_{jk}^i$ и вторые $(V_{,m}^i)_{,k} = \frac{\partial V_{,m}^i}{\partial x^k} + V^j \Gamma_{jk}^i - V_{,j}^i \Gamma_{mk}^j$ ковариантные производные, подставляя физические компоненты вектора скорости, в неортогональных криволинейных координатах (2) получим преобразованную систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\mathbf{V}\mathbf{V})T &= a\Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu \Phi}{\rho c_p}, \\ \frac{\partial V^1}{\partial \tau} + (\mathbf{V}\mathbf{V})V^1 - 2\alpha V^2 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{x} \frac{(V^3)^2}{f} &= \frac{1}{\rho} \left(-(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \nu \left[\Delta V^1 - 2\alpha^2 \left(\hat{y} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^1 + 2 \frac{\alpha^3 \hat{y} V^3}{f^{3/2}} \right], \\ \frac{\partial V^2}{\partial \tau} + (\mathbf{V}\mathbf{V})V^2 + 2\alpha V^1 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{y} \frac{(V^3)^2}{f} &= \frac{1}{\rho} \left(\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} - (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \nu \left[\Delta V^2 + 2\alpha^2 \left(\hat{y} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^1}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^2 - 2 \frac{\alpha^3 \hat{x} V^3}{f^{3/2}} \right], \\ \frac{\partial V^3}{\partial \tau} + (\mathbf{V}\mathbf{V})V^3 - \frac{\alpha^2 V^3}{f} (\hat{x} V^1 + \hat{y} V^2) &= \frac{\sqrt{f}}{\rho} \left(-\alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \nu \left[\Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f} \left(\hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{\alpha^2 (2 - \alpha^2 \hat{x}^2 - \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2} V^3 \right], \\ \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}f &= 1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2, \\ (\mathbf{V}\mathbf{V}) &= V^1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + V^2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \frac{V^3}{\sqrt{f}} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \Delta &= (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \\ &\quad + 2\alpha \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial z} - 2\alpha \hat{x} \frac{\partial^2}{\partial \hat{y} \partial z} - \alpha^2 \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right).\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что (4) переходят в уравнения в декартовых координатах в случае нескрученного канала ($\alpha = 0$).

Граничное условие для скорости формулируется как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Граничные условия для поля температуры на стенке могут быть заданы различным образом [6, 7, 14]:

$$T|_{\partial\Omega_i} = T_i, \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega} = -\frac{q}{\lambda}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial n} + hT\right)|_{\partial\Omega} = q_c.$$

В криволинейной неортогональной системе координат (2) входящие в граничные условия производные по нормали с учетом нормализованности функции $\omega_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ записываются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega} = & (1 + \alpha^2 \hat{x}_2^2) \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_1} + (1 + \alpha^2 \hat{x}_1^2) \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_2} - \\ & - \alpha^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_1} \right) \Big|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

При ламинарном течении уравнение движения имеет вид [9]

$$\begin{aligned} (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left(\hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \\ - \frac{\alpha^2 (2 + \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)}{f^2} V^3 = -\frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение теплопроводности при $a \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{z}^2} \ll V^3 \frac{\partial T}{\partial \hat{z}}$ в области тепловой стабилизации, когда $\frac{\partial T}{\partial \hat{z}} = \text{const}$, преобразуется к следующей форме:

$$\begin{aligned} - \left[(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \right. \\ \left. - \alpha^2 \left(\hat{x} \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial \hat{y}} \right) \right] = -\frac{V^3}{a \sqrt{f}} C. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, от трехмерных краевых задач приходим к двумерным задачам (6) и (7), для решения которых может быть применен метод Ритца в сочетании с методом R -функций [2, 8, 9]. Положительная определенность операторов задач (6), (7) доказана в [2, 3].

В декартовых координатах на стационарных режимах работы реакторов температурные поля в них при постоянной теплопроводности λ и объемной плотности тепловыделения в теле q_V описываются уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q_V(x, y, z)}{\lambda},$$

которое при отсутствии источников тепла переходит в уравнение Лапласа (здесь T – температура).

Рассмотрим задачу расчета стационарного температурного поля в элементах конструкций ядерных энергетических установок с постоянными теплофизическими свойствами и заданным распределением источников тепла. Математической моделью такой задачи является уравнение Пуассона. Рассмотрим краевую задачу для двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad (8)$$

в однородной области Ω . Пусть на границе области заданы смешанные граничные условия, а именно, на участке $\partial\Omega_1$ задана температура, а на

участке $\partial\Omega_2$ – теплообмен:

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega_1} &= \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial n} + h(x, y)u|_{\partial\Omega_2} &= \psi(x, y). \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно методу R -функций [8, 10, 11, 15, 18, 20], решение представляется в виде структуры

$$u = \frac{(\varphi + \omega_1 P_1) \cdot \omega_2^2 + (P_2 - \omega_2 D_1 P_2 + h P_2 \omega_2 + \psi \omega_2) \cdot \omega_1}{(\omega_2^2 + \omega_1)},$$

где $\omega_1 = \omega_1(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение участка границы области $\partial\Omega_1$, $\omega_2 = \omega_2(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение участка границы области $\partial\Omega_2$, а $P = (P_1, P_2)$ – неопределенная компонента структуры решения – представляется в виде

$$P_1 = \sum_{i=1}^N C_i \chi_i, \quad P_2 = \sum_{i=1}^N C_{i+N} \chi_i.$$

Здесь $\chi_i = \chi_i(x, y)$ – полная система координатных функций. Оператор $D_1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}$ [8] используется для продолжения краевых условий внутрь области Ω .

Далее, для нахождения неопределенных коэффициентов применим метод Ритца [5]. Для этого осуществим переход к краевой задаче с однородными граничными условиями и на линейале функций, им удовлетворяющих, построим функционал, эквивалентный данной краевой задаче. Переход к однородным краевым условиям осуществляется путем замены $u = u_0 + u_1$, где u_0 удовлетворяет краевым условиям (9). Тогда эквивалентная вариационная задача состоит в минимизации следующего функционала:

$$\begin{aligned} J(u) &= \iint_{\Omega} [(\nabla u_1)^2 + 2(\nabla u_1, \nabla u_0) - 2f u_1] d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega_2} (h u_1^2 - 2(\psi - h u_0) u_1) d\Omega_2. \end{aligned}$$

Так как нас интересует минимум этой функции, то коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_{2N} должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial C_j} &= \iint_{\Omega} [\nabla u_{1i} \nabla u_{1j} - f u_{1i} + \nabla u_0 \nabla u_{1i}] d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega_2} (h u_{1i} u_{1j} - (\psi - h u_0) u_{1j}) d\Omega_2, \quad j = 1, \dots, 2N. \end{aligned}$$

Из этой линейной системы, называемой системой Ритца, определяются коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_{2N} и, соответственно, определяется приближенное решение u .

Если же граничные условия – это условия третьего рода конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(x, y)u|_{\partial\Omega} = \psi(x, y), \quad (10)$$

тогда решение задачи представляется в виде структуры

$$u = P_1 - \omega D_1 P_1 + h P_1 \omega + \psi \omega + \omega^2 P_2, \quad (11)$$

где $\omega = \omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение границы области $\partial\Omega$. Тогда эквивалентная вариационная задача состоит в минимизации следующего функционала:

$$J(u) = \iint_{\Omega} [(\nabla u_1)^2 + 2(\nabla u_1, \nabla u_0) - 2fu_1] d\Omega + \int_{\partial\Omega} (hu_1^2 - 2(\psi - hu_0)u_1) d\Omega.$$

Коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_{2N} должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial C_j} = \iint_{\Omega} [\nabla u_{1i} \nabla u_{1j} - fu_{1i} + \nabla u_0 \nabla u_{1i}] d\Omega + \int_{\partial\Omega} (hu_{1i}u_{1j} - (\psi - hu_0)u_{1j}) d\Omega, \quad j = 1, \dots, 2N.$$

Многие детали ЯЭУ состояются из частей, имеющих различную теплопроводность. В этом случае, помимо обычных краевых условий на границе рассматриваемого тела, появляются условия стыковки на границах между разнородными материалами: равенство температур и плотностей тепловых потоков через поверхность раздела.

Рассмотрим стационарное температурное поле u , удовлетворяющее уравнению Пуассона

$$\operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} u) = f, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

при смешанных граничных условиях на внешней границе $\partial\Omega_0$, а именно, на участке $\partial\Omega_{01}$ задана температура, а на участке $\partial\Omega_{02}$ – теплообмен:

$$u|_{\partial\Omega_{01}} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + h(x, y)u|_{\partial\Omega_{02}} = \psi(x, y). \quad (13)$$

Пусть область Ω состоит из двух подобластей Ω_1, Ω_2 с различными коэффициентами теплопроводности. Тогда к граничным условиям (13) добавляются условия на границе раздела сред $\partial\Omega_{12}$:

$$u_{11}|_{\partial\Omega_{12-0}} = u_{12}|_{\partial\Omega_{12+0}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial u_{11}}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{12-0}} = \lambda_2 \frac{\partial u_{12}}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{12+0}}, \quad (14)$$

где $u = u_{11}$ в Ω_1 , $u = u_{12}$ в Ω_2 . В этом случае структуру решения можно представить [13] в виде $u_{1i} = B(P) + \delta_i \overline{\omega}_i D_1^{(i)} B(P)$, $\overline{\omega}_i = \omega_0^2 \wedge \omega_i$, где $\omega_0 = 0$ – уравнение внешней границы; $\omega_i = 0$ – нормализованные уравнения границы $\partial\Omega_i$ подобластей Ω (допускается исключение участков, принадлежащих $\partial\Omega$); δ_i – постоянные, которые находятся из условий (14) [13]; $B(P)$ – структура решений, учитывающая краевые условия (13) на внешней границе $\partial\Omega$ [8]. Далее, для нахождения неопределенных компонент, аналогично предыдущей задаче – путем замены $u = u_0 + u_1$, применяем метод Ритца, который приводит к минимизации функционала

$$J(u) = \lambda_1 \iint_{\Omega_1} [(\nabla u_1)^2 + 2(\nabla u_1, \nabla u_0) - 2fu_1] d\Omega + \lambda_2 \iint_{\Omega_2} [(\nabla u_1)^2 + 2(\nabla u_1, \nabla u_0) - 2fu_1] d\Omega + \lambda_1 \int_{\partial\Omega_{021}} (hu_1^2 - 2(\psi - hu_0)u_1) d\Omega_{02} + \lambda_2 \int_{\partial\Omega_{022}} (hu_1^2 - 2(\psi - hu_0)u_1) d\Omega_{02}.$$

Соответствующая система Ритца имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial C_j} = & \lambda_1 \iint_{\Omega_1} [\nabla u_{1i} \nabla u_{1j} + \nabla u_0 \nabla u_{1i} - f u_{1i}] d\Omega + \\ & + \lambda_2 \iint_{\Omega_2} [\nabla u_{1i} \nabla u_{1j} + \nabla u_0 \nabla u_{1i} - f u_{1i}] d\Omega + \\ & + \lambda_1 \int_{\partial\Omega_{021}} (h u_{1i} u_{1j} - (\psi - h u_0) u_{1j}) d\Omega_{02} + \\ & + \lambda_2 \int_{\partial\Omega_{022}} (h u_{1i} u_{1j} - (\psi - h u_0) u_{1j}) d\Omega_{02}, \quad j = 1, \dots, 2N. \end{aligned}$$

Вычислительный эксперимент. Рассмотрим задачу теплообмена при ламинарном течении жидкости для твэла с полизональным оребрением оболочки. На внешней стенке ($f_1 = 0$) (рис. 1)

$$T|_{\partial\Omega_1} = 0,$$

на внутренней ($\omega_2 = 0$)

$$T|_{\partial\Omega_2} = 1.$$

Структура решения задачи (6) имеет вид

$$V^3 = \omega_1 \Phi_1,$$

а задачи (7)

$$T = T_0 + T_1, \quad T_0 = \frac{f_1}{f_1 + \omega_2}, \quad T_1 = \omega_1 \Phi_2,$$

где $\omega_1 = f_1 \wedge \omega_2$. Все опорные функции для построения уравнения границы приведены в [17]. Минимизируя функционалы, эквивалентные краевой задаче (6):

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega} \left[(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left(\frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left(\frac{\partial V}{\partial \hat{y}} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} + K V^2 - 2 F V \right] d\hat{x} d\hat{y}, \end{aligned}$$

где

$$K = \frac{\alpha^2 (2 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2}, \quad F = -\frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad f = \sqrt{1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2},$$

и краевой задаче (7):

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega} \left[(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left(\frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left(\frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} - 2 G T_1 \right] d\hat{x} d\hat{y} + \\ + 2 \int_{\Omega} \left[(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_0}{\partial \hat{x}} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial T_0}{\partial \hat{y}} - \right. \\ \left. - \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_0}{\partial \hat{y}} \right) \right] d\hat{x} d\hat{y}, \quad \text{где } G = -\frac{V^3}{a \sqrt{f}} C, \end{aligned}$$

при различных значениях параметра закрутки α , получаем приведенные на рис. 2 картины линий уровня распределения поля скоростей (слева) и температур (справа).

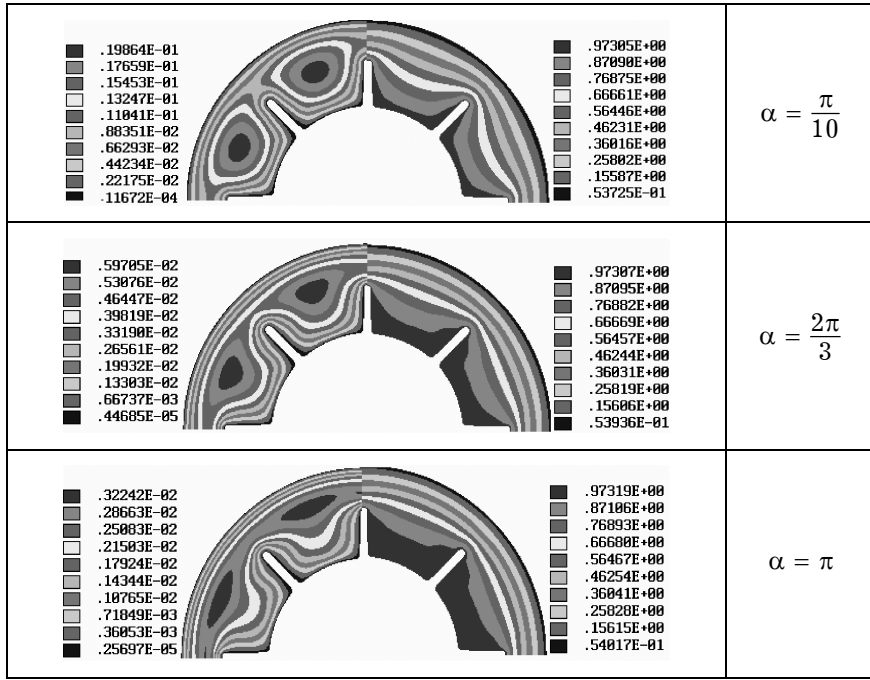


Рис. 2

Результаты, представленные на рис. 2, свидетельствуют о том, что и поле скоростей, и поле температур существенно меняются с изменением параметра закрутки, при этом с увеличением значения параметра α увеличивается как величина тангенциальной компоненты вектора скорости, так и прогревание в межреберной зоне.

В качестве *примера* рассмотрим также задачу, которая была решена в [16] методом граничных интегральных уравнений.

Будем искать решение задачи (8), (9) в области, изображенной на рис. 3. При $f(x, y) = -\frac{2}{R_0^2} = \text{const}$ известно точное решение поставленной задачи:

$$u_T = \frac{R^2}{2R_0^2} - \ln R.$$

Граничные условия имеют вид

$$\beta(\tau) \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(\tau) u = \beta(\tau) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{R^2}{2R_0^2} - \ln R \right) + \alpha(\tau) \left(\frac{R^2}{2R_0^2} - \ln R \right) = g(\tau),$$

где $R = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$, причем

$$\begin{aligned} \beta = 0, \quad \alpha = 1, \quad \tau \in d_0, \\ \beta = 1, \quad \alpha = 0, \quad \tau \in d_1, \\ \beta = 1, \quad \alpha = 1, \quad \tau \in d_2, \\ \beta = 1, \quad \alpha = \frac{1}{R^2}, \quad \tau \in d_3, \\ \beta = 0, \quad \alpha = 1, \quad \tau \in d_4, \\ \beta = 1, \quad \alpha = 0, \quad \tau \in d_5, \\ \beta = 0, \quad \alpha = 1, \quad \tau \in d_6. \end{aligned}$$

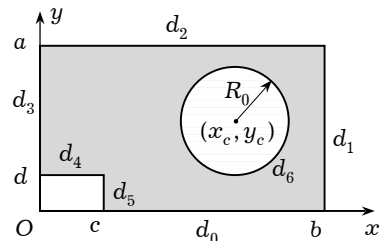


Рис. 3

Нормализованные уравнения $\omega_1 = 0$ участка границы $\partial\Omega_1$ и $\omega_2 = 0$ участка границы $\partial\Omega_2$, а также нормализованное уравнение $\omega = 0$ границы области $\partial\Omega$ строились в форме:

$$\begin{aligned} \omega &= (S_1 \wedge S_3) \wedge (S_2 \wedge S_4) \wedge (-(S_5 \wedge S_6)) \wedge S_7, \\ \omega_1 &= S_1 \wedge S_5 \wedge S_7, & \omega_2 &= S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \wedge S_6, \\ S_1 &= y, & S_2 &= b - x, & S_3 &= a - y, & S_4 &= x, \\ f_5 &= d - y, & ff_5 &= c - x, & f_6 &= c - x, & ff_6 &= d - y, \\ S_5 &= \sqrt{0.25 * (\sqrt{f_5^4 + ff_5^2 - ff_5})^2 + f_5^2}, \\ S_6 &= \sqrt{0.25 * (\sqrt{f_6^4 + ff_6^2 - ff_6})^2 + f_6^2}. \end{aligned}$$

Распределение температуры для задачи (8), (9) в зависимости от различных значений геометрических и физических параметров приведено на рис. 4.

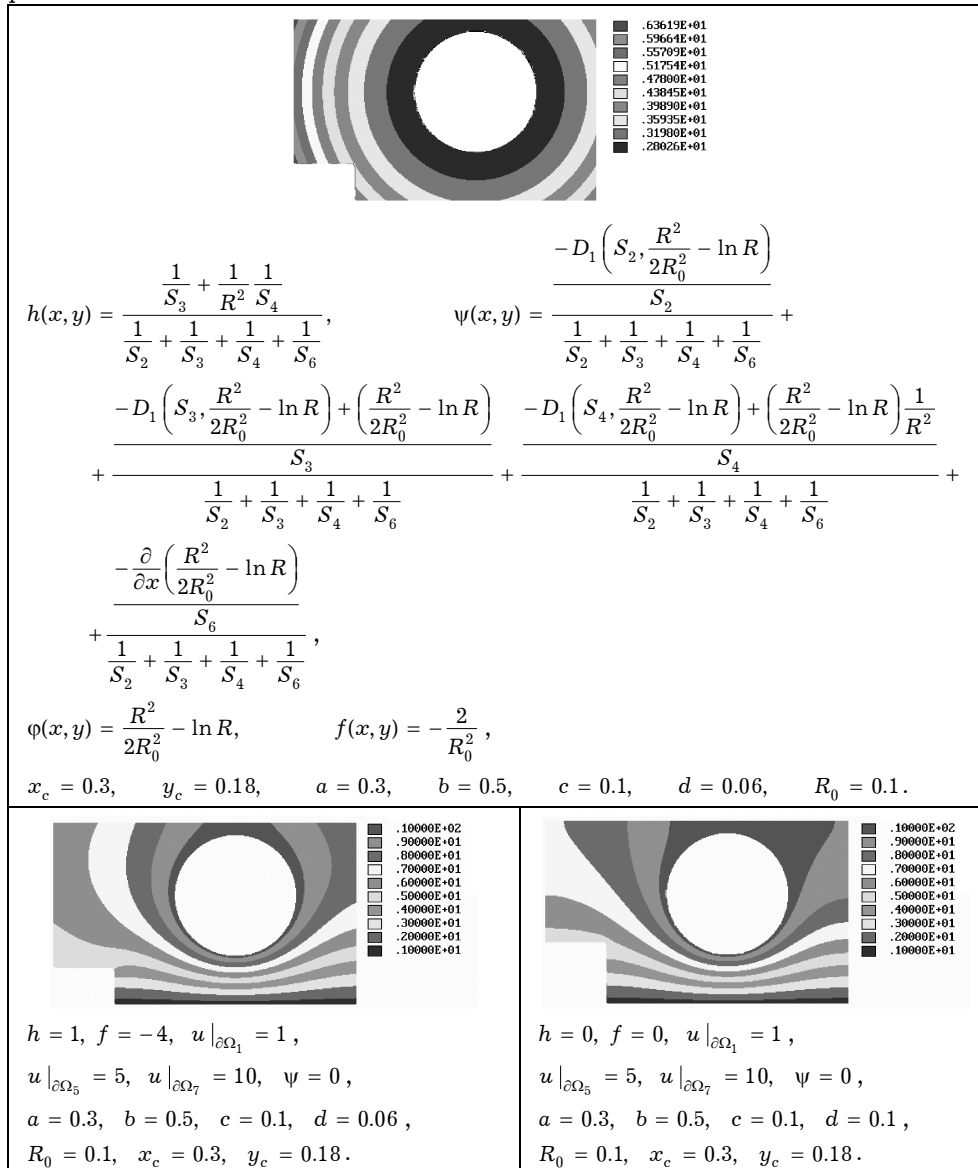


Рис. 4

Рассмотрим еще одну задачу, предложенную в [16]. Область (рис. 5), в которой должно выполняться уравнение Пуассона (12), состоит из двух подобластей D_1 и D_2 .

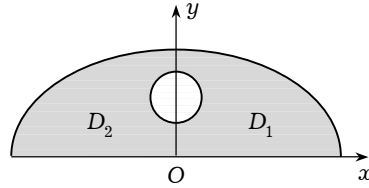


Рис. 5

Внешняя граница области является эллипсом $x = a \cos \tau$, $y = b \sin \tau$. Радиус внутренней окружности – R_0 , центр ее находится на расстоянии c от оси x .

Известно точное решение задачи при $f = 0$:

функции

$$F_1 = \ln \sqrt{\frac{(x+x_*)^2 + y^2}{(x-x_*)^2 + y^2}}, \quad F_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \sqrt{\frac{(x+x_*)^2 + y^2}{(x-x_*)^2 + y^2}},$$

удовлетворяют уравнению Лапласа.

Пусть на внешних границах задано условие вида (13), на границах между подобластями – условие вида (14). В этом случае нормализованное уравнение $\omega_0 = 0$ внешней границы области $\partial\Omega$ имеет вид

$$\omega_0 = f_1 \wedge f_2 \wedge f_3,$$

$$f_1 = y, \quad f_2 = -\frac{R_0^2 - x^2 - (y-c)^2}{2 * R_0}, \quad f_3 = \frac{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{2\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)}}.$$

Нормализованные уравнения участка внешней границы, на котором задано условие Дирихле, имеет вид $\omega\omega_1 = f_2$, а участка, на котором задано условие третьего рода, $\omega\omega_2 = f_3 \wedge f_1$. Нормализованные уравнения границ подобластей ∂D_1 , $\omega_1 = 0$, ∂D_2 , $\omega_2 = 0$, строятся по формулам

$$\omega_1 = \omega_0 \wedge x, \quad \omega_2 = \omega_0 \wedge (-x).$$

Картина линий уровня решения задачи (12)–(14) в зависимости от различных значений геометрических и физических параметров приведена на рис. 6.

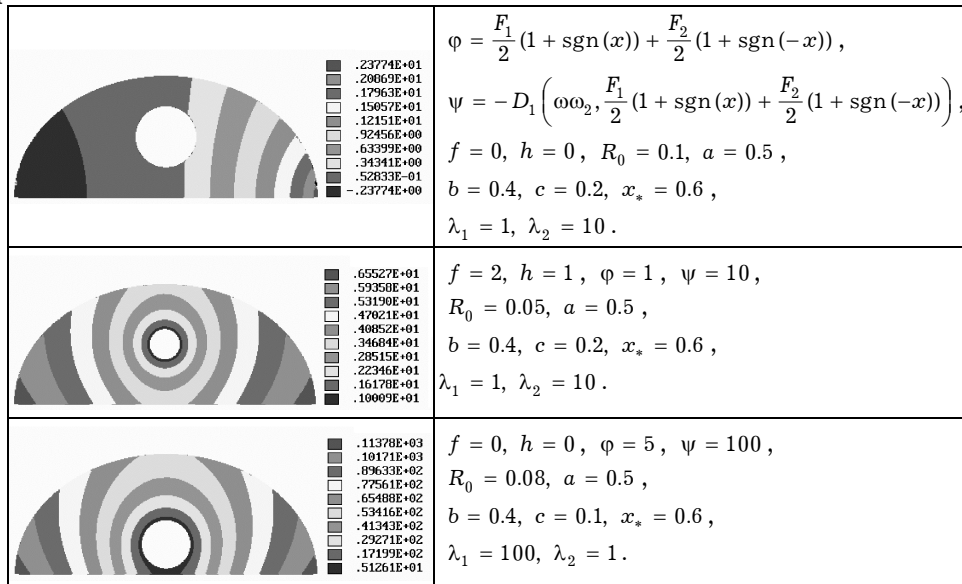


Рис. 6

Рассмотрим еще один пример. Пусть поперечное сечение твэла представляет собой правильный шестиугольник с 91 симметрично расположенными круговыми отверстиями (см. рис. 7).

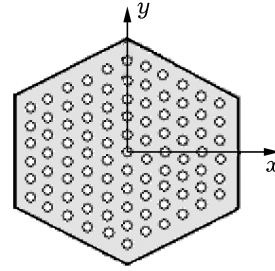


Рис. 7

Интенсивность тепловыделения считается постоянной по сечению. Все образующееся тепло снимается жидкостью, протекающей в отверстиях, т.е. на окружностях задан теплообмен. На сторонах шестиугольника тепловые потоки равны нулю ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$). Температуру жидкости во всех отверстиях предполагаем одинаковой, поэтому в граничном условии (10) $\psi = 0$, а

$$h = \frac{\omega_1 \frac{\alpha}{\lambda}}{\omega_1 + \omega_2}$$

получена по формуле склейки.

Нормализованное уравнение $\omega = 0$ границы области $\partial\Omega$, нормализованное уравнение $\omega_1 = 0$ участка границы $\partial\Omega_1$, на котором задан тепловой поток, нормализованное уравнение $\omega_2 = 0$ участка границы $\partial\Omega_2$, на котором задан теплообмен, строились по формулам:

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2,$$

$$\omega_1(x, y) = \sigma_0(\rho \cos \mu_n(\theta, m), y), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x},$$

$$\sigma_0 \equiv [(r - x) \geq 0],$$

$$\mu_n(\theta, m) = \frac{8}{m\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \left[\frac{(2i-1)m\theta}{2} \right],$$

$$\omega_2(x, y) = \overline{\sigma_1(\mu_n(x, hx), \mu_n(y, hy)) \vee \sigma_2(\mu_n(x, hx), \mu_n(y, hy))},$$

$$\mu_n(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \left[\frac{(2i-1)x\pi}{h} \right],$$

$$\sigma_1 \equiv \left[\left(R^2 - x * x - y * y \right) \frac{1}{2R} \right] \geq 0,$$

$$\sigma_2 \equiv \left[\left(R^2 - \left(x - \frac{hx}{2} \right) * \left(x - \frac{hx}{2} \right) - \left(y - \frac{hy}{2} \right) * \left(y - \frac{hy}{2} \right) \right) \frac{1}{2R} \geq 0 \right].$$

Следует отметить, что построение функции омега с помощью трансляции позволило применить R -операцию лишь 2 раза, а не 94 раза по количеству каналов (91), т.е. автоматизировать процесс построения составных омег.

Хотелось бы отметить, что задача решалась двумя способами – использовались два типа структур: 1) структура с естественными граничными условиями $u = P_1$; 2) структура (11), точно удовлетворяющая всем граничным условиям. В первом случае необходимая точность решения достигалась путем увеличения размерности сетки сплайнов, во втором случае – за счет точного удовлетворения граничным условиям. В первом случае использовались линейные сплайны, а во втором использовались кубические сплайны B_3 . Результаты, полученные обоими способами, совпадают, что также может являться одним из подтверждений их достоверности. Картина линий уровня температурного поля в твэле изображена на рис. 8.

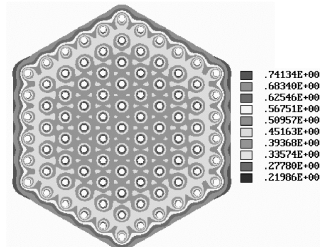


Рис. 8

Результаты расчетов показали, что при рассмотренном равномерном по сечению твэла распределении отверстий имеется существенное изменение температуры по направлениям от центра твэла к его сторонам. В твэле можно выделить две категории каналов, находящихся в неравноценных условиях с точки зрения охлаждения теплоносителем: каналы центральной и периферийной зоны. Каналы центральной зоны твэла окружены одинаковыми ячейками, а периферийные каналы, расположенные у плоских стенок твэла, неравномерно охлаждаются по периметру вследствие различной конфигурации окружающих их ячеек. В результате температура существенно меняется по периметру периферийных элементов. Также через периферийные каналы тепла отводится больше, чем через центральные.

Все численные расчеты проводились в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ, которая была разработана в Институте проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины под руководством академика НАН Украины В. Л. Рвачева [12]. Эта система позволяет решать краевые задачи с различными типами граничных условий для областей произвольной формы, в короткий срок проводить большое количество численных экспериментов и оперативно решать задачи расчета полей различной физической природы. Отлаженные алгоритмы и программы позволяют проводить расчеты температурных полей для различных реальных значений параметров, что представляет большое удобство для пользователя.

Заключение. Построены математические модели теплообмена при движении несжимаемой вязкой жидкости по каналам с винтовым типом симметрии, в том числе при полигональном оребрении твэлов, в криволинейных неортогональных координатах. Для ламинарного течения в области тепловой стабилизации трехмерная задача сведена к двумерной и исследовано влияние параметра закрутки на характер течения и распределение температурного поля. В работе рассмотрены также численные решения модельных многопараметрических задач расчета стационарных температурных полей методом R -функций, что позволило выбрать соответствующие конструктивные средства RFM для последующего решения реальных задач. Показано, что конструктивный аппарат RFM является эффективным методом решения задач расчета температурных полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок сложной формы. Он позволяет учитывать геометрическую информацию на аналитическом уровне без какой-либо её аппроксимации, решает проблему точного удовлетворения краевым условиям различных типов для областей практически произвольной формы и предоставляет пользователю возможность оперативного изменения геометрической и физической информации, проводя многовариантные расчеты в рамках одной программы.

1. Лурье А. И., Джанелидзе Г. Ю. Задача Сен-Венана для естественно-скрученных стержней // Докл. АН СССР. – 1939. – 24, № 1. – С. 23–26.
2. Максименко-Шейко К. В. Математическое моделирование физико-механических полей с винтовым типом симметрии методом R -функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 2003. – 166 с.
3. Максименко-Шейко К. В. Некоторые новые классы пространственных краевых задач, сводящиеся к двумерным // Доп. НАН України. – 2003. – № 1. – С. 25–28.
4. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Математические модели физических полей в змеевиках произвольного сечения // Вісн. Запоріж. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2002. – № 2. – С. 65–74.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физики. – Москва: Наука, 1970. – 512 с.
6. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – Москва: Энергия, 1967. – 412 с.
7. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. – Москва: Атомиздат, 1974. – 367 с.

8. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
9. Рвачев В. Л., Максименко-Шейко К. В. Математические модели движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 81–88.
10. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 287 с.
11. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. – Киев: Наук. думка, 1978. – 148 с.
12. Рвачев В. Л., Шевченко А. Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – Киев: Техніка, 1988. – 197 с.
13. Рвачев В. Л., Шейко Т. И. Метод R-функций в задачах расчета полей для тел, физические характеристики которых имеют разрывы первого рода // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, № 5. – С. 91–96.
14. Слесаренко А. П., Котульский Д. А. R-функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения // Проблемы машиностроения. – 2001. – **4**, № 3–4. – С. 72–78.
15. Темников А. В., Слесаренко А. П. Современные приближенные аналитические методы решения задач теплообмена. – Самара: Самар. политехн. ин-т, 1991. – 91 с.
16. Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – Москва: Энергоатомиздат, 1985. – 280 с.
17. Халатов А. А., Авраменко А. А., Шевчук И. В. Закрученные потоки. – Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2000. – 474 с. – (Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил: В 4 т. – Т. 3.)
18. Rvachev V. L., Sheyko T. I. R-functions in boundary-value problems in mechanics // Appl. Mech. Rev. – 1995. – 48, No. 4. – P. 151–188.
19. Rvachev V. L., Sheyko T. I., Shapiro V. The R-function method in boundary-value problems with geometric and physical symmetry // J. Math. Sci. – 1999. – **97** (1). – P. 3888–3899.
То же: Рвачев В. Л., Шейко Т. И., Шапиро В. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 146–159.
20. Rvachev V. L., Sheyko T. I., Shapiro V., Tsukanov I. On completeness of RFM solution structures // Comput. Mech. – 2000. – **25**. – P. 305–316.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЯДЕРНИХ ЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Побудовано математичні моделі теплообміну під час руху нестисливої в'язкої рідини в каналах з гвинтовим типом симетрії, у тому числі при полізональному обрешітці твелів, у криволінійних неортогональних координатах. Для ламінарної течії в області теплової стабілізації тривимірну задачу зведено до двовимірної та досліджено вплив параметра закрутки на розподіл температурного поля. Також у роботі розглянуто чисельні розв'язки модельних багатопараметричних задач розрахунку стаціонарних температурних полів методом R-функцій, що дозволило вибрати відповідні конструктивні засоби RFM для подальшого розв'язку реальних задач.

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT CONDUCTION PROCESSES FOR STRUCTURAL ELEMENTS OF NUCLEAR PLANTS BY R-FUNCTIONS METHOD

The mathematical models of heat exchange at incompressible viscous liquid motion in channels having helical symmetry type, including a fuel elements polyzonal finning, in curvilinear non-orthogonal coordinates are constructed. For laminar flow in the field of thermal stabilization the three-dimensional problem is reduced to two-dimensional one and the influence of the twisting parameter on the temperature field distribution is investigated. Also numerical solutions for model multiparametrical problems of stationary temperature fields' calculation by the method of R-functions are considered in this paper, that has allowed choosing the appropriate constructive tools of RFM for the subsequent solution of real problems.

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
04.11.08