

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ СТІЛЬНИКОВОГО ПОЛІМЕРНОГО ТРУБОПРОВОДУ, ПІДКРІПЛЕНОГО ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПРУЖНИХ ШПАНГОУТІВ

Пропонується методика дослідження трубопроводів із стільниковими (пустотілими) стінками. На основі класичних рівнянь теорії циліндричних оболонок знайдено усереднені компоненти вектора переміщень. Розв'язок цих рівнянь записаний у формі подвійних тригонометричних рядів Фур'є.

Трубопроводи промислового призначення за складом матеріалу, з якого вони виготовлені, в основному поділяються на металеві та неметалеві. Головна особливість металевих труб – міцність, а неметалевих, які переважно є полімерними, – корозійностійкість [3, 4, 6, 9]. Для прокладання і реновації систем гравітаційної і низьконапірної каналізації, водопроводу тощо використовують полімерні труби великого діаметра. У таких трубопроводах основним параметром, який характеризує конструкцію, є кільцева жорсткість (це величина навантаження q , що зменшує діаметр труби на 3% (див. рис. 1б)) [8, 10].

У цій роботі розглядаються стільникові трубопроводи [5, 11]. Стільникова труба має спіральну конструкцію, яка утворюється шляхом намотки на циліндричну основу полімерної трубки діаметром $h = D_1 - D_2$ з подальшим їх зварюванням (рис. 1а).

Підсиливши такі труби пружними кільцевими підпорами, можна суттєво збільшити їх кільцеву жорсткість, що дозволяє оптимізувати параметри конструкції, досягнувши мінімальної її маси при забезпеченні достатньої експлуатаційної надійності трубопроводу. Такі конструкції відносно невеликої маси можуть витримувати значні зовнішні навантаження.

Постановка задачі. Розглянемо довгий стільниковий одношаровий (пустотілий) полімерний трубопровід (див. рис. 1а, де 1 – зварний шов; 2 – трубка намотки стінки труби; 3 – пружні кільцеві підпори; D_1 – зовнішній діаметр труби; D_2 – внутрішній діаметр труби). Приймаємо, що конструкція навантажена рівномірно розподіленими по її довжині зрівноважувальними силами q (рис. 1б).

Вважаємо, що трубопровід підсилений пружними кільцевими підпорами, які розміщені періодично з кроком ℓ (рис. 1а). Жорсткість кільцевих підпор становить EI_k , де I_k – момент інерції поперечного перерізу підпори відносно осі симетрії, яка паралельна до осі труби; k – кількість кілець у пружній підпорі; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу трубопроводу.

Прийнявши до уваги періодичність конструкції, розбиваємо її на скінченні кругові замкнені циліндричні оболонки завдовжки ℓ , на кінцях яких знаходяться шпангоути, що мають відповідно жорсткість $EI_k/2$.

Знайдемо максимальне вкорочення діаметра труби, а також визначимо компоненти вектора переміщень уздовж стільникової циліндричної оболонки під дією зовнішніх навантажень, враховуючи при цьому підсилення трубопроводу пружними кільцевими підпорами.

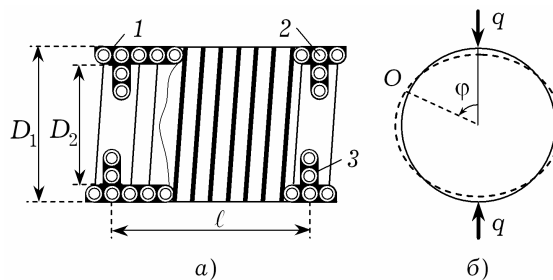


Рис. 1

Побудова розв'язку задачі. Виріжемо з оболонки малий елемент (рис. 2), утворений двома парами суміжних площин, нормальних до серединної поверхні. Серединна поверхня циліндричної оболонки проходить через центри ваги перерізів кілець із стінки трубопроводу з урахуванням зварного шва.

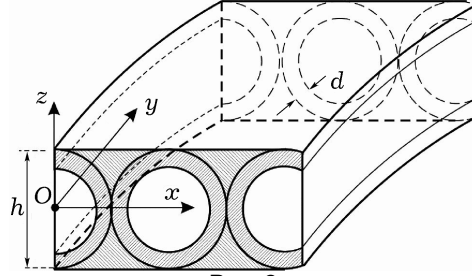


Рис. 2

Направимо криволінійні ортогональні осі координат Ox та Oy , як показано на рис. 2, – по дотичній в точці O до ліній головних кривин, а вісь Oz – зовні по нормалі до серединної поверхні. Точка O – біжуча точка циліндричної оболонки належить серединній поверхні. Положення точки серединної поверхні оболонки будемо характеризувати координатами x та $y = R\varphi$, де x – відстань точки по твірній від початкового екваторіального перерізу; $R = (D_1 + D_2)/2$ – радіус серединної поверхні стільникової циліндричної оболонки; φ – кут між початковою і довільною меридіональною площиною (рис. 1б).

Компоненти напружень σ_x та σ_y подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + z(\chi_x + \nu\chi_y)] f(x, z), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x + z(\chi_y + \nu\chi_x)] f(x, z),\end{aligned}\quad (1)$$

де ε_x , ε_y – відповідні відносні видовження серединної поверхні в напрямку x та y ; χ_x , χ_y – зміна кривин; $f(x, z) = 1$, коли в точці (x, z) стінки циліндричної оболонки є матеріал, і $f(x, z) = 0$ при його відсутності.

Враховуючи співвідношення для компонент напружень (1), рівнодійну силу N_y і згинний момент M_y на одиницю довжини [1, 7] подамо так:

$$\begin{aligned}N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} f(x, z) (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) dz, \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} f(x, z) z^2 (\chi_y + \nu\chi_x) dz,\end{aligned}$$

де $h = D_1 - D_2$ – діаметр кільця (трубки) намотки стінки труби.

Запишемо розглядувані рівнодійну силу N_y і згинний момент M_y на проміжку $[x - h/2, x + h/2]$ у вигляді

$$N_y = \frac{N'_y}{1-\nu^2} + \nu \frac{N'_x}{1-\nu^2}, \quad M_y = \frac{M'_y}{1-\nu^2} + \nu \frac{M'_x}{1-\nu^2}.\quad (2)$$

Тут

$$\begin{aligned}N'_y &= E\varepsilon_y g(x), & N'_x &= E\varepsilon_x g(x), & M'_y &= E\chi_y t(x), & M'_x &= E\chi_x t(x), \\ g(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} f(x, z) dz, & t(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 f(x, z) dz,\end{aligned}$$

$g(x)$, $t(x)$ – періодичні функції з періодом h .

Компоненти деформацій ε_y , χ_y мало змінюють свої значення у перерізі кільця в стінці трубопроводу на проміжку $[x-h/2, x+h/2]$; рівнодійні сила N'_x і згинний момент M'_x з огляду на симетричність зовнішнього навантаження відносно осі Ox також малозмінні в діапазоні $[x-h/2, x+h/2]$.

Усреднивши сили N'_y , M'_y і моменти N'_x , M'_x на проміжку $[x-h/2, x+h/2]$ та взявши до уваги попередні міркування, одержимо такі вирази:

$$\begin{aligned} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \varepsilon_x dx &\approx \frac{1}{hE} \int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_x dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} \frac{1}{g(x)} dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} \chi_x dx &\approx \frac{1}{hE} \int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_x dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} \frac{1}{t(x)} dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_y dx &\approx \frac{E}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \varepsilon_y dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} g(x) dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_y dx &\approx \frac{E}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \chi_y dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} t(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Уведемо усереднені переміщення

$$\begin{aligned} u^*(x, y) &= \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} u(x, y) dx, & v^*(x, y) &= \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} v(x, y) dx, \\ w^*(x, y) &= \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} w(x, y) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Застосувавши теореми диференціювання інтегралів Рімана й параметричних інтегралів до виразів для компонент деформацій $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}$, $\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\chi_y = \frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \right)$ і співвідношення (4), одержимо усереднені компоненти деформації замкненої циліндричної оболонки

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x}, & \varepsilon_y^* &= \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y} + \frac{w^*}{R}, \\ \chi_x^* &= -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x^2}, & \chi_y^* &= -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, на основі співвідношень (2) з урахуванням виразів (3) та усереднених деформацій (5) отримаємо співвідношення для усереднених рівнодійних сил і згинальних моментів:

$$N_y^*(x, y) = B_y^* \varepsilon_y^*(x, y) + \nu B_x^* \varepsilon_x^*(x, y), \quad M_y^*(x, y) = D_y^* \chi_y^* + \nu D_x^* \chi_x^*, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} N_y^* &= \frac{1}{h(1-\nu^2)} \left(\int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_y dx + \nu \int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_x dx \right), \\ M_y^* &= \frac{1}{h(1-\nu^2)} \left(\int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_y dx + \nu \int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_x dx \right), \end{aligned}$$

D_y^* , D_x^* і B_y^* , B_x^* – циліндричні жорсткості та жорсткості на розтяг замкненої циліндричної оболонки, які на підставі співвідношень (3), (6) визначаються так:

$$D_y^* = \frac{IE}{h(1-\nu^2)}, \quad B_y^* = \frac{FE}{h(1-\nu^2)}, \quad D_x^* = \frac{hE}{J(1-\nu^2)}, \quad B_x^* = \frac{hE}{G(1-\nu^2)}. \quad (7)$$

Тут $F = \int_{x-h/2}^{x+h/2} g(x) dx$ – площа перерізу трубки набору стінки труби з ура-

хуванням зварного шва; $G = \int_{x-h/2}^{x+h/2} \frac{1}{g(x)} dx$; $I = \int_{x-h/2}^{x+h/2} t(x) dx$ – момент інерції

перерізу трубки набору стінки конструкції з урахуванням зварного шва

відносно осі Ox ; $J = \int_{x-h/2}^{x+h/2} \frac{1}{t(x)} dx$. З огляду на періодичність функцій

$g(x)$, $t(x)$ величини F , G , I , J – сталі.

Подібним чином були усереднені інші рівнодійні сили [1, 7] $N_x(x, y)$, $N_{xy}(x, y)$, а також згинний $M_x(x, y)$ і крутний $M_{xy}(x, y)$ моменти.

В результаті взаємодії пружних шпангоутів і циліндричної оболонки на її кінцях виникатимуть невідомі розподілені по ободу взаємодіючі нормальні $p(\varphi)$ та дотичні $p_\tau(\varphi)$ зусилля (див. рис. 3, де показано схему контакту пружної підпори зі стільниковою циліндричною оболонкою).

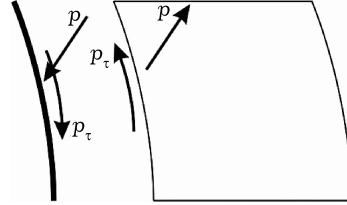


Рис. 3

Беручи до уваги співвідношення (6), на основі [1, 7] одержимо рівняння в переміщеннях для визначення усереднених компонент вектора переміщень u^* , v^* та w^* :

$$\begin{aligned} & B_x^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{1}{2} B_x^* (1-\nu) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \\ & + \left(\frac{1-\nu}{2} B_x^* + \nu B_y^* \right) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\nu B_y^*}{R} \frac{\partial w^*}{\partial x} = 0, \\ & B_x^* \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial \varphi} + B_x^* \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{B_y^*}{R^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} + \frac{B_y^*}{R^2} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} + \\ & + 2D_y^* (1-\nu) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + D_y^* \frac{1}{R^4} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} - \\ & - (2D_y^* - 2\nu D_y^* + \nu D_x^*) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial \varphi} - D_y^* \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 w^*}{\partial \varphi^3} = -\tilde{p}_\tau, \\ & D_x^* \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + \frac{2D_y^*}{R^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{D_y^*}{R^4} \frac{\partial^4 w^*}{\partial \varphi^4} - \frac{D_y^* \nu}{R^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \\ & + \frac{D_x^* \nu}{R^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{B_y^*}{R^2} w^* + \frac{B_x^* \nu}{R} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x} - \\ & - (2-\nu) \frac{D_y^*}{R^2} \frac{\partial^3 v^*}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{D_y^*}{R^4} \frac{\partial^3 v^*}{\partial \varphi^3} + \frac{B_y^*}{R^2} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} = -\tilde{q} + \tilde{p}, \end{aligned} \quad (8)$$

де \tilde{q} – зовнішнє розподілене навантаження, а \tilde{p} та \tilde{p}_τ – невідомі нормальні та дотичні розподілені контактні навантаження відповідно. Для цилінд-

ричної жорсткості D_y^* та жорсткості на розтяг B_y^* зі співвідношень (7) знаходимо такі аналітичні вирази:

$$D_y^* = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} \left[1 - 3\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{SDR} \right)^4 \right], \quad B_y^* = \frac{hE}{(1-\nu^2)} \left[1 - \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{SDR} \right)^2 \right],$$

де $SDR = h/d$ – стандартна величина, що використовується для характеристики труб; d – товщина полімерної трубки. Жорсткості D_x^* і B_x^* визначаємо чисельно.

Розв'язок системи рівнянь (8) подаємо у вигляді подвійних тригонометричних рядів Фур'є [7]

$$\begin{aligned} w^* &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos n\varphi, & v^* &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \sin n\varphi, \\ u^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Для сформульованої задачі крайові умови на кінцях циліндричної оболонки будуть мати вигляд

$$w^*(x, \varphi) = W(\varphi), \quad v^*(x, \varphi) = V(\varphi), \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = \ell,$$

і

$$u^*(x, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial w^*(x, \varphi)}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = \ell, \quad (10)$$

де $W(\varphi)$, $V(\varphi)$ – компоненти вектора переміщень пружних шпангоутів відповідно в радіальному та тангенціальному напрямках.

Безпосередньою підстановкою $x = 0$ та $x = \ell$ у розвинення (9) отримуємо, що компоненти вектора усереднених переміщень стільникової циліндричної оболонки задовольняють другу групу з крайових умов (10).

Запишемо зовнішню розподілену силу q через розподілене навантаження [7] таким чином:

$$\tilde{q}(x, \varphi) \approx \frac{q}{\Delta s} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos n\varphi, \quad (11)$$

де $\Delta s = R\Delta\varphi$ – елемент дуги, який спрямовуємо до нуля.

Помноживши праву й ліву частини розвинення (11) на $\cos \frac{m\pi x}{\ell} \times \cos n\varphi$ і проінтегрувавши праву частину в межах від 0 до ℓ за x та від 0 до 2π – за φ , а ліву частину від 0 до ℓ за x та від 0 до $\Delta\varphi$ і від π до $\pi + \Delta\varphi$ за φ , та спрямувавши Δs до нуля, отримаємо

$$q_{mn} = \begin{cases} 0, & m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \frac{q(1 + \cos n\pi)}{\pi R}, & m = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \frac{q}{\pi R}, & m = 0, \quad n = 0. \end{cases}$$

Невідомі контактні зусилля p та p_τ , що виникають внаслідок дії шпангоутів на краю циліндричної оболонки, подамо через розподілені навантаження

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, \varphi) &\approx \frac{p}{\Delta x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos n\varphi, \\ \tilde{p}_\tau(x, \varphi) &\approx \frac{p_\tau}{\Delta x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{\tau mn} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \sin n\varphi, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$p_{mn} = \begin{cases} \frac{2p_n(1+(-1)^m)}{\ell}, & m = 1, 2, \dots, \\ \frac{2p_n}{\ell}, & m = 0, \end{cases}$$

$$p_{\tau mn} = \begin{cases} \frac{2p_{\tau n}(1+(-1)^m)}{\ell}, & m = 1, 2, \dots, \\ \frac{2p_{\tau n}}{\ell}, & m = 0, \end{cases}$$

а p_n , $p_{\tau n}$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити. Величину Δx спрямовуємо до нуля.

Підставляючи розвинення (9), (11) та (12) у систему диференціальних рівнянь (8), отримаємо для кожної пари m та n свою систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} :

$$\begin{aligned} & -B_x^* \left(\left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2R^2} n^2 \right) A_{mn} - \left(\frac{1-\nu}{2} B_x^* + \nu B_y^* \right) \frac{mn\pi}{R\ell} B_{mn} - \\ & \quad - \frac{\nu B_y^*}{R} \frac{m\pi}{\ell} C_{mn} = 0, \\ & -\frac{1+\nu}{2} \frac{B_x^*}{R} \frac{mn\pi}{\ell} A_{mn} - \left(B_x^* \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 - \frac{B_y^*}{R^2} n^2 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2D_y^*(1-\nu)}{R^2} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 \right) B_{mn} - \frac{B_y^* n}{R^2} C_{mn} - D_y^* \frac{n^2}{R^4} B_{mn} - \\ & \quad - (2D_y^* - 2\nu D_y^* + \nu D_x^*) \frac{1}{R^2} \frac{mn^2\pi}{\ell} C_{mn} - D_y^* \frac{n^3}{R^4} C_{mn} = -p_{\tau mn}, \\ & \left(D_x^* \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 + \frac{2D_y^*}{R^2} \left(\frac{mn\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{D_y^*}{R^4} n^4 - \frac{D_y^* \nu}{R^2} \left(\frac{mn\pi}{\ell} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{D_x^* \nu}{R^2} \left(\frac{mn\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{B_y^*}{R^2} w^* \right) C_{mn} + \frac{\nu B_x^* m\pi}{R\ell} A_{mn} + \\ & \quad + \left((2-\nu) \frac{D_y^*}{R^2} n \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{D_y^*}{R^4} n^3 - \frac{B_y^*}{R^2} n \right) B_{mn} = -q_{mn} + p_{mn}. \end{aligned}$$

Розв'язавши записані системи лінійних алгебраїчних рівнянь, для кожної пари m та n одержимо вирази для коефіцієнтів розвинення (9)

$$\begin{aligned} B_{mn} &= p_n B'_{mn} + p_{\tau n} B''_{mn} + q_{mn} B'''_{mn}, \\ C_{mn} &= p_n C'_{mn} + p_{\tau n} C''_{mn} + q_{mn} C'''_{mn}, \end{aligned} \quad (13)$$

де C'_{mn} , C''_{mn} , C'''_{mn} та B'_{mn} , B''_{mn} , B'''_{mn} – сталі, вирази для яких не наводимо з огляду на громіздкість.

Рівняння рівноваги шпангоутів мають вигляд [2]

$$\begin{aligned} & \frac{EI_k}{2} \left[\frac{d^3}{d\varphi^3} \left(\frac{d^2 W(\varphi)}{d\varphi^2} + W(\varphi) \right) + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{d^2 V(\varphi)}{d\varphi^2} + V(\varphi) \right) \right] + \\ & \quad + R_k^4 \left(-p_\tau(\varphi) + \frac{dp_\tau(\varphi)}{d\varphi} \right) = 0, \\ & \frac{EF_k}{2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right) \left(\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - W(\varphi) \right) + R_k^2 \left(-p(\varphi) + \frac{dp_\tau(\varphi)}{d\varphi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

де I_k – момент інерції поперечного перерізу кільцевої підпори відносно осі симетрії, паралельної до Ox ; F_k – площа поперечного перерізу кільцевої підпори; R_k – серединний радіус кільцевої підпори.

З огляду на симетрію задачі компоненти вектора переміщень пружних шпангоутів подамо у вигляді

$$W(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} W_n \cos n\varphi, \quad V(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n \sin n\varphi. \quad (15)$$

Переміщення $W_n, V_n, n = 0, 1$, у розвиненнях (15) відсутні, оскільки відповідають зміщенням круга як абсолютного цілого [7].

Невідомі контактні зусилля, що виникають на шпангоутах при взаємодії із замкненою циліндричною оболонкою, зобразимо за допомогою розвинень

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\varphi, \quad p_{\tau}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\tau n} \sin n\varphi. \quad (16)$$

Підставляючи розвинення (15), (16) у рівняння рівноваги шпангоутів (14), для кожного n одержуємо свою систему двох алгебраїчних рівнянь, розв'язками яких є такі вирази для визначення коефіцієнтів W_n і $V_n, n = 2, 3, \dots$:

$$W_n = -R_k^2 \frac{(F_k R_k^2 + I_k) n p_n + (F_k R_k^2 - n^2 I_k) p_{\tau n}}{2n(n^2 - 1)^2 E I_k F_k},$$

$$V_n = -R_k^2 \frac{(F_k R_k^2 + n^2 I_k) n p_n + (F_k R_k^2 - n^4 I_k) p_{\tau n}}{2n^2(n^2 - 1)^2 E I_k F_k}. \quad (17)$$

На основі перших двох крайових умов (10), враховуючи при цьому співвідношення (13) та (17), запишемо для кожного n систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь для відшукування невідомих коефіцієнтів p_n та $p_{\tau n}, n = 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\ell} (p_n C'_{0n} + p_{\tau n} C''_{0n} + q_{0n} C'''_{0n}) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} (1 + (-1)^m) (p_n C'_{mn} + p_{\tau n} C''_{mn} + q_{mn} C'''_{mn}) = W_n, \\ & \frac{2}{\ell} (p_n B'_{0n} + p_{\tau n} B''_{0n} + q_{0n} B'''_{0n}) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} (1 + (-1)^m) (p_n B'_{mn} + p_{\tau n} B''_{mn} + q_{mn} B'''_{mn}) = V_n. \end{aligned}$$

Максимальне зменшення вертикального діаметра обчислюємо за формулою

$$\Delta_{\max} = |w^*(\ell/2, 0) + w^*(\ell/2, \pi)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} C_{mn} \cos \frac{m\pi}{2} (1 + \cos n\pi) \right|.$$

Числовий аналіз задачі та висновки. На основі отриманих співвідношень проведено числовий розрахунок оболонки при різних вхідних параметрах. Аналіз розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь (13) і (17) показав, що для відповідних коефіцієнтів у розвиненнях (9) та (15) маємо

$$C_{mn} = O\left(\frac{1}{m^4 + n^4}\right), \quad B_{mn} = O\left(\frac{1}{m^4 + n^4}\right),$$

$$W_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad V_n = O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Отже, уже при шести членах розвинення компонент вектора усереднених переміщень (9) одержимо результати з точністю 10^{-3} .

Обчислення виконано для $E = 800$ МПа, $\nu = 0.3$, глибини засипання $H = 1$ м та густини ґрунту $\rho = 1900$ кг/м³. Зовнішній діаметр труби становив $D_1 = 1$ м. Навантаження, яке діє на конструкцію внаслідок ваги ґрунту, що розміщений над трубопроводом, визначали за формулою

$$q = \rho D_1 \left(H + \frac{D_1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

На рис. 4 наведено залежності максимального прогину труби Δ_{\max} від відстані ℓ між пружними шпангоутами (підпорами) для значення діаметра трубки намотки стінки трубопроводу $h = 5$ см та товщини трубки $d = 0.5$ см (рис. 2). Розрахунки виконано для кількості кілець підпори $k = 3, 4, 5$.

Як бачимо на рис. 4, максимальне вкорочення вертикального діаметра при $k = 3$ суттєво відрізняється від двох інших випадків конструкцій. Зауважимо також, що при великій відстані ℓ між шпангоутами отримуємо прогин для стільникової труби без підпор.

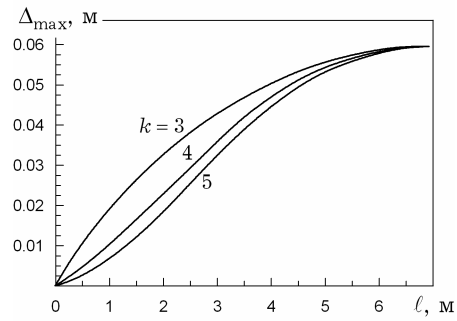


Рис. 4

На основі отриманих результатів можна виконати оптимізацію розмірів конструкції для отримання мінімальної її маси при заданих зовнішніх навантаженнях та умові, що

$$\Delta_{\max} < 0.03 D_1. \quad (18)$$

При заданих вище значеннях модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона та зовнішнього навантаження в табл. 1 наведено деякі результати розрахунків параметрів трубопроводу, які забезпечують виконання умови (18). Тут тип конструкції *I* відповідає звичайній трубі із суцільною стінкою; *II* – труба із пустотілою стінкою; *III* – стільниковий трубопровід, підсилений пружними підпорами, що складаються з $k = 4$ трубок, де підпори встановлені періодично з кроком $\ell = 2$ м. Величина $\eta = 100\% m_i / m_{III}$ встановлює масу матеріалу i -ї труби відносно маси матеріалу підкріпленого стільникового трубопроводу.

Таблиця 1

Тип конструкції	D_1 , см	h , см	d , см	η , %
<i>I</i>	100	5.7	$h/2$	236
	200	11.5	$h/2$	238
<i>II</i>	100	6.5	0.6	125
	200	13.0	1.4	140
<i>III</i>	100	5.0	0.45	100
	200	8.0	0.8	100

1. Баженов В. А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде. – Львов: Вища шк., 1975. – 168 с.
2. Галкин С. И., Левицкая Т. Е. Расчет цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, на действие сосредоточенных сил // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин – Москва: Наука, 1973. – 798 с.
3. Дмитрах І. М., Вайман А. Б., Стащук М. Г., Тот Л. Надійність та довговічність елементів конструкцій теплоенергетичного устаткування. – Київ: Вид. дім «Академперіодика», 2005. – 378 с. – (Механіка руйнування і міцність матеріалів: Довідн. посібник / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Т. 7.)

4. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки та математики НАН України, 2005. – 396 с.
5. Стащук М. Г., Дорош М. І. Визначення деформованого стану підкріпленого стільникового трубопроводу // Тези наук. конф. «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 25–29 тр. 2008). – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 239–241.
6. Стащук Н. Г. Задачі механіки упругих тел с трещиноподобными дефектами. – Киев: Наук. думка, 1993. – 358 с.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 625 с.
8. Швабауэр В. В., Гвоздев И. В. Расчет подземного трубопровода из термопластов // Полимерные трубы. – 2007. – № 3. – С. 52–56.
9. Agarchev V. I., Vinogradov D. A. Polymer and composite pipelines. – Moscow: Inter Publ. House, 2004. – 228 p.
10. Janson L. E. Plastic pipes for water supply and sewage disposal. – Stenungsund: Borealis, 1996. – 286 p.
11. Maksymuk A. V., Shcherbina N. M., Ganulich N. V. Designing, calculation, and optimization of polymeric honeycomb pipes // Mech. Composite Materials. – 2008. – 44, No. 6. – P. 601–606.
 Те саме: Максимук А. В., Щербина Н. Н., Ганулич Н. В. Проектирование, расчет и оптимизация сотовых труб из полимерных материалов // Механика композитных материалов. – 2008. – 44, № 6. – С. 853–860.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СОТОВОГО ПОЛИМЕРНОГО ТРУБОПРОВОДА, ПОДКРЕПЛЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УПРУГИХ ШПАНГОУТОВ

Предлагается методика исследования трубопроводов с сотовыми (пустотелыми) стенками. На основе классических уравнений теории цилиндрических оболочек найдены усредненные компоненты вектора перемещений. Решение этих уравнений записано в форме двойных тригонометрических рядов Фурье.

CALCULATION OF PARAMETERS OF HONEYCOMB POLYMER PIPELINE, SUPPORTED BY PERIODICAL SYSTEM OF ELASTIC RIBS

The technique of investigation of pipelines with honeycomb (hollow) walls is proposed. Basing on the classical equations of cylindrical shells theory the averaged displacement vector components are found. Solution of these equations was written in form of double trigonometric Fourier series.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
08.04.08

² Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів