

ЗАЛИШКОВІ НАПРУЖЕННЯ В ОРТОТРОПНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ, ЗУМОВЛЕНІ ЛІНІЙНОЮ НЕСУМІСНІСТЮ ДЕФОРМАЦІЙ

Залікована тріщина в ортотропній циліндричній непологій оболонці аналізується за допомогою неперервно розподіленої дислокаційної моделі. Досліджено поле залишкових напружень на лицевих поверхнях оболонки для різних випадків поперечних дислокацій нормального розкриття.

Задачі визначення залишкових напружень у конструкціях з клеєними елементами пов'язані з перевагами клеєних з'єднань порівняно зі зварними. Склеювання підвищує технічні властивості конструкцій, такі як втомна міцність, стійкість до корозійного розтріскування. Розв'язок задачі про склеювання двох півплощин уздовж відрізка наведено у роботі [1]. Для заліковування тріщин у трубопроводах часто використовують клеєві герметики, отримуючи при цьому високоміцний і довговічний шов. Природно постає питання оцінки концентрації залишкових напружень в околі шва при експлуатації таких конструкцій.

До оцінки напружено-деформованого стану такої циліндричної оболонки може бути застосований відомий підхід теорії тріщин, коли залікована тріщина моделюється рівномірно розподіленим уздовж її лінії полем лінійних дислокацій [3, 5–7, 9, 10], густина яких визначається відомими величинами стрибків переміщень і які викликають появу розтягувальних напружень в цій зоні. Напружений стан оболонки є суперпозицією двох станів [3, 4, 8] – основного σ_0 і додаткового $\Delta\sigma([\mathbf{u}]_\Gamma)$, при якому концентрація напружень пов'язана не з виникненням стрибка переміщень (розкриванням тріщини), а із його зникненням при заліковуванні тріщини. Повний напружений стан є різницею між основним і додатковим:

$$\sigma = \sigma_0 - \Delta\sigma([\mathbf{u}]_\Gamma).$$

Основний напружений оболонки стан вважаємо відомим. При розрахунку додаткового напруженого стану природно розглядалися такі тріщини, в околі яких не виникають безмежно великі концентрації напружень. Це означає, що, на відміну від теорії тріщин, для яких в першу чергу розглядається розкриття, похідна від якого має особливості у кінцях тріщини (як правило, кореневі), тут слід розглядати розкриття, похідна від якого не має таких особливостей.

Розглянемо нескінченно довгу ортотропну циліндричну оболонку, вздовж відрізка напрямної якої зосереджені стрибки переміщень, прогину та кута повороту, що зумовлюють збурений напружений стан. Якщо за початок координат вибрати середину відрізка, то поле дисторсій [8], яким моделюється наявність залікованої поперечної тріщини довжини $2l$, має такий вигляд:

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{R} [u(\beta)] \delta(\alpha), \quad \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{R} [v(\beta)] \delta(\alpha), \quad \varepsilon_{22}^0 = 0,$$

$$\varkappa_{11}^0 = -\frac{1}{R} \left\{ [\theta_1(\beta)] \delta(\alpha) + \frac{1}{R} [w(\beta)] \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta(\alpha) \right\},$$

$$\varkappa_{12}^0 = \frac{1}{R^2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} [w(\beta)] + [v(\beta)] \right\} \delta(\alpha), \quad \varkappa_{22}^0 = 0,$$

де α , β – віднесені до радіуса оболонки R віддалі вздовж твірної і напрямного кола. Тут

$$\begin{aligned} [u(\beta)] &= u^+(+0, \beta) - u^-(-0, \beta), & [\theta_1(\beta)] &= \theta_1^+(+0, \beta) - \theta_1^-(-0, \beta), \\ [v(\beta)] &= v^+(+0, \beta) - v^-(-0, \beta), & [w(\beta)] &= w^+(+0, \beta) - w^-(-0, \beta) \end{aligned}$$

– стрибки переміщень і кута повороту, що характеризують дислокацію уздовж відрізка $|\beta| < \beta_0$ ($\beta_0 = \ell/R$). Вони є нульовими поза цим відрізком, зокрема на його продовженні:

$$[u(\beta)] = [v(\beta)] = [w(\beta)] = [\theta_1(\beta)] = 0, \quad |\beta| \geq \beta_0.$$

Використовуючи відому методику теорії тріщин [4], запишемо інтегральні подання для зусиль і моментів, що характеризують напружений стан оболонки у випадку симетричної задачі, через похідні від стрибків переміщень $\gamma_1 = \frac{d}{d\beta}[u(\beta)]$, $\gamma_3 = \frac{d}{d\beta}[v(\beta)]$, $\gamma_4 = \frac{d^2}{d\beta^2}[w(\beta)]$ і кута повороту

$$\gamma_2 = \frac{d}{d\beta}[\theta_1(\beta)]:$$

$$G_i(\alpha, \beta) = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \sum_{j=1}^4 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \mathcal{K}_{ij}(\alpha, \beta - \eta) \gamma_j(\eta) d\eta, \quad i = 1, \dots, 6,$$

де

$$\begin{aligned} G_1(\alpha, \beta) &= N_1, & G_2 &= N_2, & G_3(\alpha, \beta) &= \frac{M_1}{R}, \\ G_4(\alpha, \beta) &= \frac{M_2}{R}, & G_5(\alpha, \beta) &= S, & G_6(\alpha, \beta) &= \frac{H}{R}, \end{aligned}$$

N_i , $i = 1, 2$, – розтягувальні зусилля, S – зсувне зусилля, M_i , $i = 1, 2$, – згинальні моменти, H – крутний момент.

Ядра $\mathcal{K}_{ij}(\alpha, \beta)$ мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ij}(\alpha, \beta) &= -\text{Im} \sum_{n=1}^4 \frac{N_{ij}(s_n)}{\Delta'_n} \text{ctg} \left(\frac{s_n \alpha + \beta}{2} \right) + \beta \text{sgn} \alpha \times \\ &\times \sum_{n=1}^2 \text{Re} \left(\frac{N_{ij}^0(s_{0n})}{\Delta'_n} \exp(is_{0n}(\alpha)) \right) - 2 \text{sgn}(\alpha) \sum_{p=1}^{\infty} \text{Im} L_{ij}^p(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} L_{ij}^1(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^2 \frac{N_{ij}^1(s_{1n})}{\Delta'_{1n}} \exp(is_{1n}\alpha + \beta) - \sum_{n=1}^4 \frac{N_{ij}(s_n)}{\Delta'_n} \exp(is_n\alpha + \beta), \\ L_{ij}^p(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^4 \left(\frac{N_{ij}^p(s_{pn})}{\Delta'_{pn}} \exp(ip(s_{pn}\alpha + \beta)) - \frac{N_{ij}(s_n)}{\Delta'_n} \exp(ip(s_n\alpha + \beta)) \right), \end{aligned}$$

s_{pn} – корені характеристичного полінома $\Delta_p(s) = \Delta(s) + 2p^{-2}(R_{12}^3(s)Q_{23}^3(s) + p^{-4}(c_1^{-2}s^4R_{22}^2(s)Q_{22}^2(s) + c_1^2s^4)$ для p -го члена розвинення в ряд Фур'є за коловою координатою; s_n – корені головної частини характеристичного полінома $\Delta(s) = R_{11}^4(s)Q_{33}^4(s) + c_1^2P_{11}^2(s)G_{33}^2(s)s^4$; $\Delta'_n = \frac{d}{ds} \Delta(s_n)$; $\Delta'_{pn} = \frac{d}{ds} \Delta_p(s_{pn})$;

$$N_{ij}^p(s) = N_{ij}(s) + p^{-2}N_{ij}^6(s) + p^{-4}N_{ij}^4(s), \quad i = 1, \dots, 6, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Поліноми N_{ij} , які визначають асимптотичну поведінку зусиль і моментів, мають такий вигляд:

$$N_{11}(s) = -c_1^2 A_{22} G_{33}^2(s) s^4 - R_{11}^4(s), \quad N_{12}(s) = c_1^2 (A_{22} s^2 + A_{12}) G_{33}^2(s) s^2,$$

$$\begin{aligned}
N_{21}(s) &= c_1^2 A_{22} G_{33}^2(s) s^5 + R_{11}^4(s) s^3, & N_{22}(s) &= -c_1^2 (A_{22} s^4 + A_{12}) G_{33}^2(s) s^3, \\
N_{31}(s) &= c_1^2 A_{22} G_{33}^2(s) s^4 - R_{11}^4(s) s^2, & N_{31}^p(s) &= N_{31}(s) + p^{-2} (2R_{12}^3(s) s^2), \\
N_{32}(s) &= c_1^2 Q_{23}^3 G_{33}^2(s) s^2, & N_{41}(s) &= c_1^2 (A_{22} s^2 + A_{12}) G_{33}^2(s) s^2, \\
N_{42}(s) &= -c_1^2 Q_{33}^4 G_{33}^2(s), & N_{51}(s) &= -2c_1^2 (A_{22} s^4 - A_{12}^2) s^3, \\
N_{52}(s) &= 2c_1^2 (A_{22} s^2 - A_{12}) Q_{33}^4(s) s, \\
N_{61}(s) &= -c_1^2 (A_{22} s^2 + A_{12}) (4A_{12} + A_{66}) s^4, \\
N_{62}(s) &= c_1^2 (A_{66} + 4A_{12}) Q_{33}^4(s) s^2, \\
N_{13}(s) &= c_1^2 (A_{66} A_{22} s^2 + 4A_{12}^2) s^3 + R_{11}^4(s) s, \\
N_{23}(s) &= -c_1^2 (A_{66} A_{22} s^2 + 4A_{12}^2) s^2 - R_{11}^4(s) s^2, \\
N_{33}(s) &= c_1^2 (4A_{66} A_{22} s^6 + (4A_{22} A_{11} - 4A_{12}^2 - 5A_{12} A_{66}) s^4 - \\
&\quad - 4A_{12} A_{11} s^2) s + R_{11}^4(s) s^3, \\
N_{43}(s) &= -c_1^2 ((A_{22} s^2 + A_{12}) (4A_{22} s^2 + A_{66}) s^3 + 4(A_{22} s^2 - A_{12}) Q_{33}^4), \\
N_{53}(s) &= c_1^2 (2((A_{22})^2 s^4 - (A_{12})^2) s^4 - 2(A_{22} s^4 - 2A_{12} s^2 + A_{11}) Q_{33}^4(s)) - \\
&\quad - 2c_1^2 P_{11}^2(s) s^4, \\
N_{63}(s) &= c_1^2 ((A_{22} s^2 + A_{12}) (4A_{12} + A_{66}) s^5 - 4(A_{12} s^2 + A_{11}) s Q_{33}^4(s)) + \\
&\quad + 4c_1^2 P_{11}^2(s) s^5, \\
N_{14}(s) &= c_1^2 (A_{22} s^2 + A_{12}) (4A_{12} + A_{66}) s^3, \\
N_{24}(s) &= -c_1^2 (A_{22} s^2 + A_{12}) (4A_{12} + A_{66}) s^4, \\
N_{34}(s) &= c_1^2 (Q_{23}^3(s) (4A_{12} + A_{66}) s^3), \\
N_{44}(s) &= -c_1^2 (Q_{33}^4(s) (4A_{12} + A_{66}) s), \\
N_{54}(s) &= 2c_1^2 (Q_{33}^4(s) (A_{12} s^2 - A_{11}) - 2P_{11}^2(s) s^4), \\
N_{64}(s) &= c_1^2 (Q_{33}^4(s) (A_{66} s^2 + 4A_{11}) s + 4P_{11}^2(s) s^5).
\end{aligned}$$

Тут C_{ij} , $i, j = 1, 6, 2$, – елементи матриці пружних сталей ортотропної оболонки (причому $C_{16} = C_{61} = C_{26} = C_{62} = 0$) [8]; A_{ij} – елементи матриці, оберненої до матриці, складеної з елементів C_{ij} ; $c_0 = \frac{h}{R}$; $c_1 = \frac{c_0}{\sqrt{3}}$; $2h$ – товщина оболонки; $N_{ij}^k(s)$, $Q_{ij}^k(s)$, $P_{ij}^k(s)$, $G_{ij}^k(s)$, $R_{ij}^k(s)$ – поліноми, коефіцієнти яких залежать від C_{ij} , A_{ij} та c_0 .

Числовий аналіз виконано для поперечних дислокацій нормального розкриття ізотропної оболонки ($C_{11} = C_{22} = \frac{2hE}{1-\nu^2}$, $C_{12} = \frac{2h\nu E}{1-\nu^2}$, $C_{66} = \frac{2h\nu E}{1+\nu}$, ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга) для випадків:

1°. Береги тріщини до заліковування на зовнішній поверхні оболонки розходились, а на внутрішній зближались:

$$[u(\beta)] = 2\varepsilon \left(1 - \frac{\beta}{\beta_0}\right)^{3/2}, \quad [\theta_1(\beta)] = \frac{1}{Rc_0} 0.05 [u(\beta)], \quad |\beta| \leq \beta_0.$$

2°. Береги тріщини до заліковування на зовнішній поверхні оболонки зближались, а на внутрішній розходились:

$$[u(\beta)] = 2\varepsilon \left(1 - \frac{\beta}{\beta_0}\right)^{3/2}, \quad [\theta_1(\beta)] = -\frac{1}{Rc_0} 0.05 [u(\beta)], \quad |\beta| \leq \beta_0.$$

Методом механічних квадратур [2] за формулами

$$\sigma_{ii}^* = \frac{1}{2h} \left\{ G_i + \frac{3G_{i+3}}{c_0 h} \gamma \right\}, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_{12}^* = \frac{1}{2h} \left\{ G_2 + \frac{3G_5}{c_0 h} \gamma \right\}$$

розраховувались напруження на зовнішній $\gamma = h$ і внутрішній $\gamma = -h$ лицевих поверхнях оболонки. Результати розрахунків для випадку, коли $\nu = 0.2$, $c_0 = 0.01$, $\varepsilon = \frac{5}{6} c_0$, $\beta_0 = 1$, наведено на рис. 1–6. На рисунках показано графіки напружень $\sigma_{11} = \sigma_{11}^*/E$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}^*/E$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}^*/E$ для значень відстаней уздовж твірної $\alpha = 0, 0.5, 1$. На рис. 1, 3, 5 криві обчислено для випадку 1°, на рис. 2, 4, 6 – для випадку 2°, суцільні лінії відповідають зовнішній лицевій поверхні ($\gamma = h$), пунктирні – внутрішній ($\gamma = -h$).

Як бачимо з графіків, напруження σ_{11} , σ_{22} на лицевих поверхнях незалежно від виду поля дисторсій досягають максимального значення біля кінців залікованої тріщини та зменшуються зі збільшенням відстані α уздовж твірної. Їх значення на внутрішній лицевій поверхні циліндричної оболонки є більшими, ніж значення на зовнішній. Напруження σ_{12} практично є однаковими на обох лицевих поверхнях циліндричної оболонки.

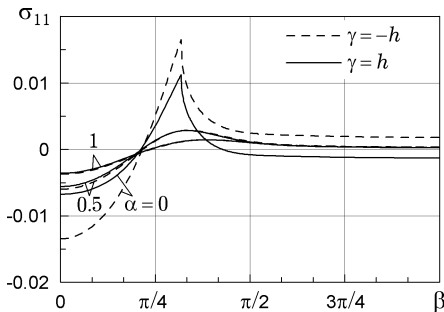


Рис. 1

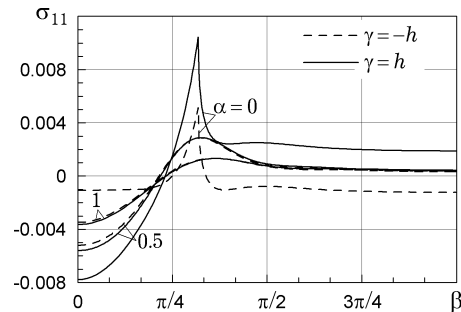


Рис. 2

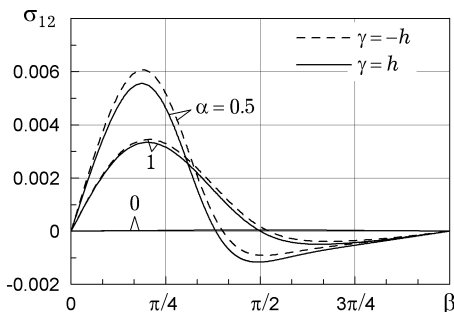


Рис. 3

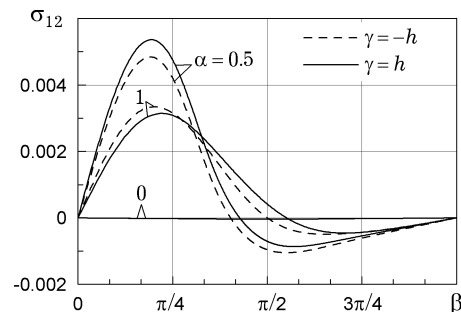


Рис. 4

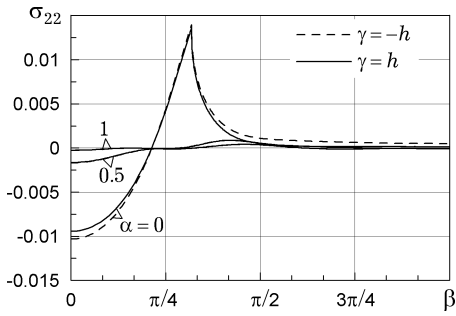


Рис. 5

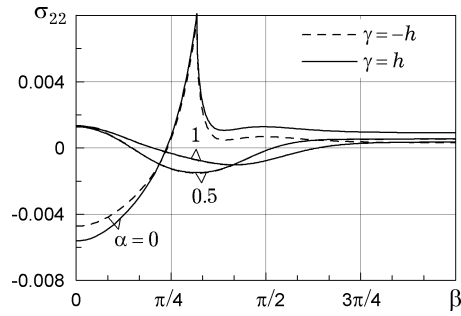


Рис. 6

1. Веденева Н. Н., Ключников В. Д., Мазинг Р. И. Задача о склейке двух полуплоскостей // Изв. АН ССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 1. – С. 133–135.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
3. Кушнір Р. М., Николішин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
4. Осадчук В. А. Діагностування залишкових технологічних напружень в елементах конструкцій розрахунково-експериментальним методом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 88–104.
5. Chen Y. Z., Lin X. Y. Collinear Zener-Stroh crack problem in plane elasticity // Eng. Fract. Mech. – 2008. – 75, No. 6. – P. 1684–1693.
6. Chen Y. Z., Lin X. Y. Singular integral equation method for multiple Zener-Stroh problems in antiplane elasticity // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2007. – 31, No. 1. – P. 22–27.
7. Kakiuchi T., Shioya T., Fujimoto K. Analysis of anti-plane crack in finite thickness plate // J. Solids Mech. and Materials Eng. – 2007. – 1, No. 4. – P. 584–591.
8. Prokopovych I. B., Senkiv L. M. Stressed state of anisotropic cylindrical shells with cuts // Advances in Fracture Resistance in Materials: Proc. 8th Int. Congr. of Fracture. – New Delhi: Mc Graw-Hill Publ. Co. Ltd, 1996. – Vol. 1. – P. 547–556.
9. Weertman J. Dislocation based fracture mechanics. – Wold Scientific, 1996. – 524 p.
10. Wu X. J. A continuously distributed model of Zener-Stroh-Koehler cracks in anisotropic materials // Int. J. Solids and Struct. – 2005. – 42, No. 7. – P. 1909–1921.

ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕСОВМЕЩНОСТЬЮ ДЕФОРМАЦИЙ

Залеченная трещина в ортотропной цилиндрической непологой оболочке анализируется с помощью непрерывно распределенной дислокационной модели. Исследовано поле остаточных напряжений на лицевых поверхностях оболочки для различных случаев поперечных дислокаций нормального раскрытия.

RESIDUAL STRESSES IN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL DUE TO LINEAR INCOMPATIBILITY OF STRAINS

The healed crack in an orthotropic cylindrical nonshallow shell is analyzed by continuously distributed dislocation model. The field of residual stresses on the shell face for different cases of transverse dislocation of normal opening is studied.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
27.07.07