

ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ РУХОМОГО ЗОСЕРЕДЖЕНОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Розв'язано задачу термопружності для тонких ортотропних оболонок невід'ємної кривини при дії зосередженого джерела тепла, що рухається по верхній оболонки. Задано лінійний розподіл температури по товщині оболонки та конвективний теплообмін за законом Ньютона з її бокових поверхонь. За допомогою інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа отримано розв'язок в аналітичному вигляді. Досліджено вплив термомеханічних властивостей матеріалу, а також параметрів теплообміну з навколишнім середовищем на напружено-деформований стан оболонки.

Проблема дослідження температурних напружень в оболонках зумовлена широким використанням оболонок як елементів сучасних конструкцій, які працюють у складних умовах експлуатації, наприклад, в умовах нерівномірного нагріву. Як наслідок виникають додаткові деформації елементів конструкцій і температурні напруження в них, які суттєво впливають на несучу здатність конструкцій. Дослідження температурних полів і напружень в оболонках при дії рухомого джерела тепла необхідним є і для розв'язування проблем оптимізації ряду технологічних процесів: зварювання, випалу тощо.

На сьогодні існує значна кількість публікацій з дослідження задач про розподіл температури і напружень в оболонках. Так, динамічні задачі теплопровідності та термопружності для ізотропних та анізотропних пластин розглядалися у працях [6–8, 12, 13]. Розподіл температури, напружень і деформацій в ізотропних оболонках при дії нерухомих і рухомих зосереджених і локальних джерел тепла досліджено у статтях [2–4]. У статті [11] розглянуто температурні напруження і деформації в ортотропних оболонках при імпульсному навантаженні. У праці [1] розв'язано задачу теплопровідності для ортотропної оболонки при дії зосереджених джерел тепла, що рухаються.

У пропонованій статті дослідимо напружено-деформований стан ортотропної оболонки товщини $2h$ невід'ємної гауссової кривини, яка знаходиться під дією зосередженого джерела тепла, що рухається по поверхні оболонки за законом

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau). \quad (1)$$

Рівняння теплопровідності мають вигляд [9]

$$\begin{aligned} h^2 \nabla_{\lambda}^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_2^* T_2 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= -(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + W_1), \\ h^2 \nabla_{\lambda}^2 T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1 + W_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $T_1(x, y, \tau) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t(x, y, z, \tau) dz$, $T_2(x, y, \tau) = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t(x, y, z, \tau) dz$ – інтегральні характеристики температурного поля, $t(x, y, z, \tau)$ – температура оболонки;

$\nabla_{\lambda}^2 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, де λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} – головні коефіцієнти тепло-

провідності; $\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Bi}^+ \pm \text{Bi}^-)$, де $\text{Bi}^{\pm} = \frac{\alpha^{\pm} h}{\lambda_{33}}$ – критерій Біо, α^{\pm} – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm h$; $\mu_2^* = \mu_2 - 2k_0 h$, де $k_0 = (k_1 + k_2)/2$ –

середня кривина серединної поверхні, $k_{1,2} = 1/R_{1,2}$, $R_{1,2}$ – головні радіуси кривин оболонки; $t_{1,2} = (t_c^+ \pm t_c^-)/2$, де t_c^\pm – температура середовища на поверхнях $z = \pm h$; $a = \frac{\lambda_{33}}{c\rho}$ – коефіцієнт теплопровідності, де c і ρ –

питома теплоємність і густина матеріалу оболонки; $W_1 = \frac{h}{2\lambda_{33}} \int_{-h}^h W_0 dz$ і

$W_2 = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-h}^h z W_0 dz$ – густина джерел середньої температури та температурного моменту, де W_0 – об'ємна густина джерел тепла.

Перейдемо до безрозмірної системи координат: $x' = x/h$, $y' = y/h$, $z' = z/h$, $\tau' = \tau a/h^2$. Тоді рівняння (2) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_2^* T_2 - \frac{\partial T_1}{\partial \tau'} &= -(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + W_1), \\ \nabla_\lambda^2 T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 - \frac{\partial T_2}{\partial \tau'} &= -3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1 + W_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Для дослідження напружено-деформованого стану оболонки систему (3) доповнюємо рівняннями рівноваги у переміщеннях [9]

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + (k_1 + \nu_2 k_2) \frac{\partial w}{\partial x'} \right) + \\ &\quad + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \right) = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial x'}, \\ &\frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + (k_1 \nu_1 + k_2) \frac{\partial w}{\partial y'} \right) + \\ &\quad + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \right) = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial y'}, \\ &\frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \nu_1 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} \right) + \\ &\quad + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \frac{4}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \nu_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x'} + \right. \\ &\quad + \left. \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (k_1 + k_2 \nu_2) + \right. \\ &\quad + \left. \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (k_1 \nu_1 + k_2) \right) w = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) + \right. \\ &\quad + \left. \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \right) T_1 - \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} + \right. \\ &\quad + \left. \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут u, v, w – переміщення у напрямку осей координат x', y', z' ; E_1, E_2 – модулі Юнга для поверхонь, паралельних до серединної поверхні оболонки; G_{12} – модуль зсуву; ν_1, ν_2 і α_1, α_2 – коефіцієнти Пуассона та температурні коефіцієнти лінійного розширення для головних напрямків.

Виконаємо таку заміну:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2}, & B &= \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}}, & A_1 &= A \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, & A_2 &= A \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, \\
B_1 &= A_1 \nu_2 + B, & B_2 &= A_2 \nu_1 + B, & c_1 &= k_1 + \nu_2 k_2, \\
c_2 &= k_1 \nu_1 + k_2, & d_1 &= \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2, & d_2 &= (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2), \\
C_1 &= A_1 c_1, & C_2 &= A_2 c_2, & D_1 &= A_1 d_1, & D_2 &= A_2 d_2, \\
F_1 &= A_1/3, & F_2 &= A_2/3, & P_1 &= A_1 k_1 d_1, & P_2 &= A_2 k_2 d_2, \\
P &= P_1 + P_2, & O_1 &= A_1 k_1 c_1, & O_2 &= A_2 k_2 c_2, & O &= O_1 + O_2, \\
R_1 &= F_1 d_1, & R_2 &= F_2 d_2, & L_1 &= A_1 k_1 + A_2 k_2 \nu_1, \\
L_2 &= A_1 k_1 \nu_1 + A_2 k_2, & J &= F_1 \nu_2 + F_2 \nu_1 + 4B/3.
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (4) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + B_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + C_1 \frac{\partial w}{\partial x'} &= D_1 \frac{\partial T_1}{\partial x'}, \\
A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + C_2 \frac{\partial w}{\partial y'} &= D_2 \frac{\partial T_1}{\partial y'}, \\
F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + F_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + J \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \left(L_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + L_2 \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + Ow &= \\
&= PT_1 - R_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} - R_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Рівняння (3), (5) – система рівнянь термопружності ортотропних оболонок у безрозмірній системі координат.

Вирази для сил, моментів і перерізувальних сил з урахуванням заміни мають вигляд

$$\begin{aligned}
N_1 &= A_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x'} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial y'} + c_1 w - d_1 T_1 \right], & N_2 &= A_2 \left[\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + c_2 w - d_2 T_1 \right], \\
M_1 &= -F_1 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_1 T_2 \right], & M_2 &= -F_2 \left[\nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_2 T_2 \right], \\
S &= B \left[\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \right], & H &= -\frac{2}{3} B \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'}, \\
Q_1 &= -F_1 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} + \nu_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2} + d_1 \frac{\partial T_2}{\partial x'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2}, \\
Q_2 &= -F_2 \left[\nu_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'} + \frac{\partial^3 w}{\partial y'^3} + d_2 \frac{\partial T_2}{\partial y'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'}. \tag{6}
\end{aligned}$$

Нехай температура середовища на поверхні оболонки $t_c^\pm = 0$, і на оболонку діє зосереджене джерело тепла, тепловий потік якого змінюється за законом

$$\begin{aligned}
W'_1 &= W_1^* \delta(x' - x'(\tau'), (y' - y'(\tau'))) S_+[\tau'], \\
W'_2 &= W_2^* \delta(x' - x'(\tau'), (y' - y'(\tau'))) S_+[\tau'], \tag{7}
\end{aligned}$$

де $S_+[\tau'] = 1$ при $\tau' > 0$ і $S_+[\tau'] = 0$ при $\tau' \leq 0$; $W_{1,2}^*$ – потужності джерел середньої температури та температурного моменту; δ – дельта-функція Дірака.

Знайдемо компоненти напружено-деформованого стану оболонки та дослідимо їх залежності від параметрів ортотропії.

Застосовуючи до рівнянь (3), (5) перетворення Фур'є за (x', y') і Лапласа за τ' , отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у просторі

трансформант:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \mu_1 + s) \tilde{T}_1 + \mu_2^* \tilde{T}_2 = \tilde{f}_1(\xi, \eta, s), \\
& (\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 3(1 + \mu_1) + s) \tilde{T}_2 + 3\mu_2 \tilde{T}_1 = 3\tilde{f}_2(\xi, \eta, s), \\
& (A_1 \xi^2 + B\eta^2) \tilde{u} + B_1 \xi \eta \tilde{v} + C_1 i \xi \tilde{w} = D_1 i \xi \tilde{T}_1, \\
& (A_2 \eta^2 + B\xi^2) \tilde{v} + B_2 \xi \eta \tilde{u} + C_2 i \eta \tilde{w} = D_2 i \eta \tilde{T}_1, \\
& L_1 i \xi \tilde{u} - L_2 i \eta \tilde{v} + (F_1 \xi^4 + F_2 \eta^4 + J \xi^2 \eta^2 + O) \tilde{w} = P \tilde{T}_1 + (R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2) \tilde{T}_2. \quad (8)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}, \\
\tilde{f}_i(\xi, \eta, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_i' e^{-s\tau' + i(\xi x' + \eta y')} d\tau' dx' dy' = \\
&= \frac{W_i^*}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \delta(x' - x'(\tau'), y' - y'(\tau')) e^{-s\tau' + i(\xi x' + \eta y')} d\tau' dx' dy'.
\end{aligned}$$

Після розв'язання системи (8), (9) отримаємо вирази трансформант для компонент температурного поля [1] і напружено-деформованого стану оболонки

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{1,2}(\xi, \eta, s) &= \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \frac{1}{\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + s + a_i}, \quad \tilde{u} = \frac{i}{\Delta} \left[(P_1 + P_2) \tilde{T}_1 + P_3 \tilde{T}_2 \right], \\
\tilde{v} &= \frac{i}{\Delta} \left[(P_4 + P_5) \tilde{T}_1 + P_6 \tilde{T}_2 \right], \quad \tilde{w} = \frac{1}{\Delta} \left[P_7 \tilde{T}_1 + P_8 \tilde{T}_2 \right]. \quad (10)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{1}{2} \left\{ (3 + 4\mu_1) \mp \sqrt{(3 + 4\mu_1)^2 - 4\mu_0} \right\}, \quad \mu_0 = 3(\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_2 \mu_2^*), \\
\Delta &= P_9 + P_{10}, \quad b_i = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} ((3(1 + \mu_1) - a_i) W_1^* - 3\mu_2^* W_2^*), \\
b_{i+2} &= \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} (3(\mu_1 - a_i) W_2^* - 3\mu_2 W_1^*), \\
P_1 &= p_{11} \xi^7 + p_{12} \xi^5 \eta^2 + p_{13} \xi^3 \eta^4 + p_{14} \xi \eta^6, \quad P_2 = p_{21} \xi^3 + p_{22} \xi \eta^2, \\
P_3 &= p_{31} \xi^5 + p_{32} \xi^3 \eta^2 + p_{33} \xi \eta^4, \quad P_4 = p_{41} \xi^6 \eta + p_{42} \xi^4 \eta^3 + p_{43} \xi^2 \eta^5 + p_{44} \eta^7, \\
P_5 &= p_{51} \xi^2 \eta + p_{52} \eta^3, \quad P_6 = p_{61} \xi^4 \eta + p_{62} \xi^2 \eta^3 + p_{63} \eta^5, \\
P_7 &= p_{71} \xi^4 + p_{72} \xi^2 \eta^2 + p_{73} \eta^4, \quad P_8 = p_{81} \xi^6 + p_{82} \xi^4 \eta^2 + p_{83} \xi^2 \eta^4 + p_{84} \eta^6, \\
P_9 &= p_{91} \xi^8 + p_{92} \xi^6 \eta^2 + p_{93} \xi^4 \eta^4 + p_{94} \xi^2 \eta^6 + p_{95} \eta^8, \\
P_{10} &= p_{101} \xi^4 + p_{102} \xi^2 \eta^2 + p_{103} \eta^4, \quad (11)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
p_{11} &= D_1 B F_1, \quad p_{12} = D_1 A_2 F_1 + D_1 B J - B_1 D_2 F_1, \\
p_{13} &= D_1 A_2 J + D_1 B F_2 - B_1 D_2 J, \quad p_{14} = D_1 A_2 F_2 - B_1 D_2 F_2, \\
p_{21} &= D_1 B O - C_1 B P, \\
p_{22} &= D_1 A_2 O + C_1 D_2 L_2 + B_1 C_2 P - C_1 A_2 P - D_1 C_2 L_2 - B_1 D_2 O, \\
p_{31} &= -C_1 B R_1, \quad p_{32} = B_1 C_2 R_1 - C_1 A_2 R_1 - C_1 B R_2, \\
p_{33} &= B_1 C_2 R_2 - C_1 A_2 R_2, \\
p_{41} &= D_2 A_1 F_1 - B_2 D_1 F_1, \quad p_{42} = D_2 A_1 J + D_2 B F_1 - B_2 D_1 J,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{43} &= D_2 A_1 F_2 + D_2 B J - B_2 D_1 F_2, & p_{44} &= D_2 B F_2, \\
p_{51} &= D_2 A_1 O + C_2 D_1 L_1 + B_2 C_1 P - C_2 A_1 P - D_2 C_1 L_1 - B_2 D_1 O, \\
p_{52} &= D_2 B O - C_2 B P, & p_{61} &= B_2 C_1 R_1 - C_2 A_1 R_1, \\
p_{62} &= B_2 C_1 R_2 - C_2 A_1 R_2 - C_2 B R_1, & p_{63} &= -C_2 B R_2, \\
p_{71} &= A_1 B P - D_1 B L_1, & p_{73} &= A_2 B P - D_2 B L_2, \\
p_{72} &= A_2 A_1 P + B_2 D_1 L_2 + B^2 P + B_1 D_2 L_1 - D_2 A_1 L_2 - D_1 A_2 L_1 - B_2 B_1 P, \\
p_{81} &= A_1 B R_1, & p_{82} &= A_2 A_1 R_1 + B A_1 R_2 + B^2 R_1 - B_2 B_1 R_1, \\
p_{83} &= A_2 A_1 R_2 + B A_2 R_1 + B^2 R_2 - B_2 B_1 R_2, & p_{84} &= A_2 B R_2, \\
p_{91} &= A_1 B F_1, & p_{92} &= A_2 A_1 F_1 + B A_1 J + B^2 F_1 - B_2 B_1 F_1, \\
p_{92} &= A_2 A_1 J + B A_1 F_2 + B A_2 F_1 + B^2 J - B_2 B_1 J, \\
p_{94} &= A_2 A_1 F_2 + B A_2 J + B^2 F_2 - B_2 B_1 F_2, & p_{95} &= A_2 B F_2, \\
p_{101} &= A_1 B O - C_1 B L_1, & p_{103} &= A_2 B O - C_2 B L_2, \\
p_{102} &= A_2 A_1 O + B_2 C_1 L_2 + B^2 O + B_1 C_2 L_1 - C_2 A_1 L_2 - C_1 A_2 L_1 - B_2 B_1 O. \quad (12)
\end{aligned}$$

Застосовуючи до виразів (6) перетворення Фур'є і Лапласа, отримуємо трансформанти для сил, моментів і перерізувальних сил:

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_j &= A_j \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} (P_{Nj1} + P_{Nj2}) - d_j \right] \tilde{T}_1 + \frac{1}{\Delta} P_{Nj3} \tilde{T}_2 \right\}, \\
\tilde{S} &= B \frac{1}{\Delta} \left\{ [P_{S1} + P_{S2}] \tilde{T}_1 + P_{S3} \tilde{T}_2 \right\}, \\
\tilde{M}_j &= F_j \left\{ \frac{1}{\Delta} P_{Mj1} \tilde{T}_1 + \left[\frac{1}{\Delta} P_{Mj2} - d_j \right] \tilde{T}_2 \right\}, \quad \tilde{H} = B \frac{2}{3\Delta} \left\{ P_{H1} \tilde{T}_1 + P_{H2} \tilde{T}_2 \right\}, \\
\tilde{Q}_j &= (-i) \left\{ F_j \left[\frac{1}{\Delta} P_{Qj1} \tilde{T}_1 + \left[\frac{1}{\Delta} P_{Qj2} - d_j \left(\frac{\xi}{\eta} \right) \right] \tilde{T}_2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + B \frac{2}{3\Delta} [P_{Qj3} \tilde{T}_1 + P_{Qj4} \tilde{T}_2] \right\}, \quad j = 1, 2. \quad (13)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
P_{N11} &= \xi P_1 + v_2 \eta P_4, & P_{N12} &= \xi P_2 + v_2 \eta P_5 + c_1 P_7, \\
P_{N13} &= \xi P_3 + v_2 \eta P_6 + c_1 P_8, \\
P_{N21} &= v_1 \xi P_1 + \eta P_4, & P_{N22} &= v_1 \xi P_2 + \eta P_5 + c_2 P_7, \\
P_{N23} &= v_1 \xi P_3 + \eta P_6 + c_2 P_8, \\
P_{S1} &= \xi P_4 + \eta P_1, & P_{S2} &= \xi P_5 + \eta P_2, & P_{S3} &= \xi P_6 + \eta P_3, \\
P_{M11} &= (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_7, & P_{M12} &= (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_8, \\
P_{M21} &= (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_7, & P_{M22} &= (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_8, \\
P_{H1} &= \xi \eta P_7, & P_{H2} &= \xi \eta P_8, \\
P_{Q11} &= \xi (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_7, & P_{Q12} &= \xi (\xi^2 + v_2 \eta^2) P_8, & P_{Q13} &= \xi \eta^2 P_7, \\
P_{Q14} &= \xi \eta^2 P_8, & P_{Q21} &= \eta (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_7, & P_{Q22} &= \eta (v_1 \xi^2 + \eta^2) P_8, \\
P_{Q23} &= \xi^2 \eta P_7, & P_{Q24} &= \xi^2 \eta P_8. \quad (14)
\end{aligned}$$

Вирази (10)–(14) – розв'язок задачі у просторі трансформант.

Застосовуючи до (10)–(14) формули обернення для перетворень Фур'є і Лапласа, знаходимо вирази для оригіналів вихідних функцій. Оригінали для температури і температурного моменту отримано в роботі [1]. Методику обчислення оригіналів компонент напружено-деформованого стану оболонки розглянемо на прикладі прогину

$$\tilde{w} = \frac{1}{\Delta} \left[P_7 \tilde{T}_1 + P_8 \tilde{T}_2 \right] = \frac{1}{\Delta} \frac{b_i P_7 + b_{i+2} P_8}{\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + s + a_i}. \quad (15)$$

Застосувавши до рівності (15) обернене перетворення Лапласа і формулу згортки, одержимо

$$\bar{w} = \int_0^{\tau'} \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 (b_i P_7 + b_{i+2} P_8) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} d\tau_0.$$

Далі застосуємо формулу обернення для перетворення Фур'є

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\tau'} \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 (b_i P_7 + b_{i+2} P_8) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} e^{-i(\xi x' + \eta y')} d\tau_0 d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 b_i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\tau'} \frac{(p_{71} \xi^4 + p_{72} \xi^2 \eta^2 + p_{73} \eta^4) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} e^{-i(\xi x' + \eta y')}}{p_{91} \xi^8 + p_{92} \xi^6 \eta^2 + p_{93} \xi^4 \eta^4 + p_{94} \xi^2 \eta^6 + p_{95} \eta^8 + p_{101} \xi^4 + p_{102} \xi^2 \eta^2 + p_{103} \eta^4} d\xi d\eta d\tau_0 + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\tau'} \frac{(p_{81} \xi^6 + p_{82} \xi^4 \eta^2 + p_{83} \xi^2 \eta^4 + p_{84} \eta^6) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} e^{-i(\xi x' + \eta y')}}{p_{91} \xi^8 + p_{92} \xi^6 \eta^2 + p_{93} \xi^4 \eta^4 + p_{94} \xi^2 \eta^6 + p_{95} \eta^8 + p_{101} \xi^4 + p_{102} \xi^2 \eta^2 + p_{103} \eta^4} d\xi d\eta d\tau_0. \end{aligned}$$

Використавши властивості парних і непарних функцій, а також зробивши заміну $x' = r \cos \varphi$, $y' = r \sin \varphi$, $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$, запишемо

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^2 b_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\tau'} \int_0^{\rho} \frac{\rho \theta_7 e^{-((\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 + a_i) \tau_0}}{\rho^4 \theta_9 + \theta_{10}} \times \\ &\quad \times \cos(r \rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r \rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho d\theta d\tau_0 + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\tau'} \int_0^{\rho} \frac{\rho^3 \theta_8 e^{-((\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 + a_i) \tau_0}}{\rho^4 \theta_9 + \theta_{10}} \times \\ &\quad \times \cos(r \rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r \rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho d\theta d\tau_0. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} \theta_7 &= p_{71} \cos^4 \theta + p_{72} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + p_{73} \sin^4 \theta, \\ \theta_8 &= p_{81} \cos^6 \theta + p_{82} \cos^4 \theta \sin^2 \theta + p_{83} \cos^2 \theta \sin^4 \theta + p_{84} \sin^6 \theta, \\ \theta_9 &= p_{91} \cos^8 \theta + p_{92} \cos^6 \theta \sin^2 \theta + p_{93} \cos^4 \theta \sin^4 \theta + \\ &\quad + p_{94} \cos^2 \theta \sin^6 \theta + p_{95} \sin^8 \theta, \\ \theta_{10} &= p_{101} \cos^4 \theta + p_{102} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + p_{103} \sin^4 \theta. \end{aligned}$$

Далі, враховуючи, що

$$\frac{1}{\rho^4 (\rho^4 \theta_9 + \theta_{10})} = -\sqrt{\frac{\theta_9}{\theta_{10}}} \operatorname{Im} \frac{1}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Re} \frac{1}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}},$$

$$\cos(r \rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r \rho \sin \varphi \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) J_{2n}(r\rho) \cos(2n\theta),$$

отримуємо

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{\pi^2} \operatorname{Im} \sum_{i=1}^2 b_i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \times \\ &\quad \times \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta_7 \cos(2n\theta)}{\sqrt{\theta_9 \theta_{10}}} \int_0^{+\infty} \frac{\rho J_{2n}(r\rho) e^{-(\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 \tau_0}}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} d\rho d\theta d\tau_0 + \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \times \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta_8 \cos(2n\theta)}{\theta_9} \int_0^{+\infty} \frac{\rho J_{2n}(\rho r) e^{-(\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 \tau_0}}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} d\rho d\theta d\tau_0.$$

Використаємо розвинення в ряд [5] для внутрішнього інтеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\rho J_{2n}(\rho r) d\rho}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (r\sqrt{i})^{2(n+\ell)} (n+\ell)! \left(\frac{\theta_{10}}{\theta_9}\right)^{\frac{n+\ell}{2}}}{2^{2(n+\ell)+1} \ell! (2n+\ell)!} \times \\ &\times \exp\left(\tau_0 \sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} (\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta)\right) \times \\ &\times \Gamma\left(-n-\ell, i\tau_0 \sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} (\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta)\right), \end{aligned}$$

тут $r^2 = (x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2$, $\Gamma(n, z)$ – неповна гамма-функція.

Застосовавши розвинення у ряд для гамма-функції [5], вираз для прогину перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Im} \sum_{i=1}^2 b_i \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+\ell)}}{4^{(n+\ell)} \ell! (2n+\ell)!} \times \\ &\times \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left([(c + \ln i)\tau_{10} + \tau_{20}] t_1(w_1) + \tau_{10} t_2(w_1) + \right. \right. \\ &+ \left. \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-i)^q}{qq!} \tau_{30} t_3(w_1) \right) - \sum_{m=1}^{n+\ell} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{40} t_4(w_1) \left. \right\} - \\ &- \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+\ell)}}{4^{(n+\ell)} \ell! (2n+\ell)!} \times \\ &\times \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left([(c + \ln i)\tau_{10} + \tau_{20}] t_1(w_2) + \tau_{10} t_2(w_2) + \right. \right. \\ &+ \left. \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-i)^q}{qq!} \tau_{30} t_3(w_2) \right) - \sum_{m=1}^{n+\ell} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{40} t_4(w_2) \left. \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \tau_{10} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+\ell)} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, & \tau_{20} &= \int_0^{\tau'} \ln(\tau_0) r^{2(n+\ell)} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, \\ \tau_{30} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+\ell)} \tau_0^{p+q} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, & \tau_{40} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+\ell)} \tau_0^{-m} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, \\ t_1(w_1) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p-1}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+1}{2}} \theta_7 t^p \cos 2n\theta d\theta, \\ t_2(w_1) &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t\right) \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p-1}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+1}{2}} \theta_7 t^p \cos 2n\theta d\theta, \\ t_3(w_1) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p+q-1}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+q+1}{2}} \theta_7 t^{p+q} \cos 2n\theta d\theta, \\ t_4(w_1) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell-m-1}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell-m+1}{2}} \theta_7 t^{-m} \cos 2n\theta d\theta, \\ t_1(w_2) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+2}{2}} \theta_8 t^p \cos 2n\theta d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2(w_2) &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t\right) \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+2}{2}} \theta_8 t^p \cos 2n\theta d\theta, \\
t_3(w_2) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p+q}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+q+2}{2}} \theta_8 t^{p+q} \cos 2n\theta d\theta, \\
t_4(w_2) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell-m}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell-m+2}{2}} \theta_8 t^{-m} \cos 2n\theta d\theta,
\end{aligned} \tag{17}$$

де $t = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta$.

Вирази (16), (17) – оригінал для прогину $w(x', y', \tau')$ за зображенням (15).

Застосуємо цю методику до компонент напружено-деформованого стану оболонки. У результаті розв'язок задачі термопружності має вигляд

$$\begin{aligned}
T_{1,2}(x', y', \tau') &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \int_0^{\tau'} \exp\left(-a_i\tau_0 - \frac{\lambda_2(x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + \lambda_1(y' - y'(\tau' - \tau_0))^2}{4\tau_0\lambda_1\lambda_2}\right) \frac{d\tau_0}{\tau_0}, \\
N_j(x', y', \tau') &= -A_j \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i [\text{Im}(G(N_{j3}) - G(N_{j1})) - GT(N_{j3})] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re}(G(N_{j2})) + d_j T_1 \right\}, \\
M_j(x', y', \tau') &= -F_j \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i \text{Re}(G(M_{j2})) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} [\text{Im} G(M_{j3}) - GT(M_{j3})] + d_j T_1 \right\}, \\
S_j(x', y', \tau') &= B \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i [\text{Im}(G(S_3) + G(S_1)) - GT(S_3)] - \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re}(G(S_2)) \right\}, \\
H_j(x', y', \tau') &= \frac{2}{3} B \left\{ - \sum_{i=1}^2 b_i \text{Re}(G(H_2)) + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} [\text{Im} G(H_3) - GT(H_3)] \right\}, \\
w(x', y', \tau') &= \sum_{i=1}^2 b_i \text{Im}(G(w_1)) - \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re}(G(w_2)), \\
\left\{ \begin{matrix} u(x', y', \tau') \\ v(x', y', \tau') \end{matrix} \right\} &= - \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i \left[\text{Im} \left(\left\{ \begin{matrix} G(u_3) \\ G(v_3) \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} G(u_1) \\ G(v_1) \end{matrix} \right\} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left\{ \begin{matrix} GT(u_3) \\ GT(v_3) \end{matrix} \right\} \right] + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re} \left(\left\{ \begin{matrix} G(u_2) \\ G(v_2) \end{matrix} \right\} \right) \right\}, \\
Q_j(x', y', \tau') &= - \left\{ F_j \left[\sum_{i=1}^2 b_i [-\text{Im}(G(Q_{j1})) + GT(Q_{j1})] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re}(G(Q_{j2})) + GT(Q_{j2}) - GTQ_j \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} B \left[\sum_{i=1}^2 b_i [-\text{Im}(G(Q_{j3})) + GT(Q_{j3})] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re}(G(Q_{j4})) + GT(Q_{j4}) \right] \right\}, \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\text{для } z \in \{N_{jk}, M_{jk}, w_k, k = 1, 2, 3\}: \quad G(z) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \cdot L(z, 0), \\
\text{для } z \in \{S_k, H_k\}: \quad G(z) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sin 2n\varphi \cdot L(z, 0), \\
\text{для } z \in \{u_{jk}, v_{jk}, Q_{j1}, Q_{j2}\}: \quad G(z) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \begin{Bmatrix} \cos 2n\varphi \\ \sin 2n\varphi \end{Bmatrix} \cdot L(z, 1), \\
\text{для } z \in \{Q_{j3}, Q_{j4}\}: \quad G(z) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \begin{Bmatrix} \sin 2n\varphi \\ \cos 2n\varphi \end{Bmatrix} \cdot L(z, 1), \quad (19) \\
\text{для } z \in \{N_{jk}, M_{jk}\}: \quad GT(z) &= \frac{1}{2} \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} e^{-\frac{r^2}{4\tau_0 t}} \frac{d\theta d\tau_0}{t\tau_0} - \\
&- 4 \cos 2\varphi \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} \gamma\left(2, \frac{r^2}{4\tau_0 t}\right) \cos 2\theta d\theta d\tau_0 - \\
&- \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cos 2n\varphi \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{4^{(n+\ell)} \ell! (2n+\ell)!} \times \\
&\times \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+\ell+1}(r^{2(n+\ell)} e^{-a_i \tau_0})}{d\tau_0^{n+\ell+1}} d\tau_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+\ell+1)} \cos 2n\theta d\theta, \\
\text{для } z \in \{S_k, H_k\}: \quad GT(z) &= -4 \sin 2\varphi \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} \gamma\left(2, \frac{r^2}{4\tau_0 t}\right) \sin 2\theta d\theta d\tau_0 - \\
&- \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin 2n\varphi \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{4^{(n+\ell)} \ell! (2n+\ell)!} \times \\
&\times \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+\ell+1}(r^{2(n+\ell)} e^{-a_i \tau_0})}{d\tau_0^{n+\ell+1}} d\tau_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+\ell+1)} \sin 2n\theta d\theta, \\
\text{для } z = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}: \quad GT(z) &= 2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} \gamma\left(1, \frac{r^2}{4\tau_0 t}\right) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta d\tau_0 - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \begin{Bmatrix} \cos(2n+1)\varphi \\ \sin(2n+1)\varphi \end{Bmatrix} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{4^{(n+\ell)} \ell! (2n+\ell+1)!} \times \\
&\times \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+\ell+1}(r^{2(n+\ell)+1} e^{-a_i \tau_0})}{d\tau_0^{n+\ell+1}} d\tau_0 \times \\
&\times \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+\ell+1)} \begin{Bmatrix} \cos(2n+1)\theta \\ \sin(2n+1)\theta \end{Bmatrix} d\theta, \\
\text{для } z = \begin{Bmatrix} Q_{j1} \\ Q_{j3} \end{Bmatrix}: \quad GT(z) &= 2 \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} \gamma\left(1, \frac{r^2}{4\tau_0 t}\right) \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \end{Bmatrix} d\theta d\tau_0 - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \begin{Bmatrix} \cos(2n+1)\varphi \\ \sin(2n+1)\varphi \end{Bmatrix} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{4^{(n+\ell)} \ell! (2n+\ell+1)!} \times \\
&\times \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+\ell+1}(r^{2(n+\ell)+1} e^{-a_i \tau_0})}{d\tau_0^{n+\ell+1}} d\tau_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+\ell+1)} \begin{Bmatrix} \cos \theta \cos(2n+1)\theta \\ \sin \theta \sin(2n+1)\theta \end{Bmatrix} d\theta,
\end{aligned}$$

для $z = \begin{Bmatrix} Q_{j2} \\ Q_{j4} \end{Bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
GT(z) &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \int_0^{\tau'} r e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} e^{-\frac{r^2}{4\tau_0 t}} \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \end{Bmatrix} \frac{d\theta d\tau_0}{t\tau_0} + \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(2n+1)!} \begin{Bmatrix} \cos(2n+1)\varphi \\ \sin(2n+1)\varphi \end{Bmatrix} \times \\
&\times \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r\tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} e^{-\frac{r^2}{8t\tau_0}} M_{1, n+\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2}{4t\tau_0} \right) \begin{Bmatrix} \cos \theta \cos(2n+1)\theta \\ \sin \theta \sin(2n+1)\theta \end{Bmatrix} d\theta d\tau_0, \\
GTQ_j &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(2n+1)!} \begin{Bmatrix} \cos(2n+1)\varphi \\ \sin(2n+1)\varphi \end{Bmatrix} \times \\
&\times \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r\tau_0} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{r^2}{4t\tau_0}} M_{1, n+\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2}{4t\tau_0} \right) \begin{Bmatrix} \cos \theta \cos(2n+1)\theta \\ \sin \theta \sin(2n+1)\theta \end{Bmatrix} d\theta d\tau_0, \quad (20)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
L(z, \beta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+\ell)}}{4^{(n+\ell)} \ell! (2n+\ell+\beta)!} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left[(c + \ln i) \tau_{1\beta} + \tau_{2\beta} \right] t_1(z) + \right. \\
&+ \tau_{1\beta} t_2(z) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-i)^q}{qq!} \tau_{3\beta} t_3(z) \left. + \sum_{m=1}^{n+\ell} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{4\beta} t_4(z) \right\}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\tau_{1\beta} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+\ell)+\beta} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, & \tau_{2\beta} &= \int_0^{\tau'} \ln(\tau_0) r^{2(n+\ell)+\beta} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, \\
\tau_{3\beta} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+\ell)+\beta} \tau_0^{p+q} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, & \tau_{4\beta} &= \int_0^{\tau'} r^{2(n+\ell)+\beta} \tau_0^{-m} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0, \\
t_1(z) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta, \\
t_2(z) &= \int_0^{\pi/2} \ln \left(\sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t \right) \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta, \\
t_3(z) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell+p+q+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell+p+q+k}{2}} \theta(z) t^{p+q} d\theta, \\
t_4(z) &= \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+\ell-m+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+\ell-m+k}{2}} \theta(z) t^{-m} d\theta, \quad (22)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\theta(N_{j1}) &= [(\sigma_{1j} p_{21} + c_j p_{71}) \cos^4 \theta + (\sigma_{1j} p_{22} + \sigma_{2j} p_{51} + c_j p_{72}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
&+ (\sigma_{2j} p_{52} + c_j p_{73}) \sin^4 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(N_{j2}) &= [(\sigma_{1j} p_{31} + c_j p_{81}) \cos^6 \theta + (\sigma_{1j} p_{32} + \sigma_{2j} p_{61} + c_j p_{82}) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \\
&+ (\sigma_{1j} p_{33} + \sigma_{2j} p_{62} + c_j p_{83}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \\
&+ (\sigma_{2j} p_{63} + c_j p_{84}) \sin^6 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(N_{j3}) &= [\sigma_{1j} p_{11} \cos^8 \theta + (\sigma_{1j} p_{12} + \sigma_{2j} p_{41}) \cos^6 \theta \sin^2 \theta + \\
&+ (\sigma_{1j} p_{13} + \sigma_{2j} p_{42}) \cos^4 \theta \sin^4 \theta + \\
&+ (\sigma_{1j} p_{14} + \sigma_{2j} p_{43}) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + \sigma_{2j} p_{44} \sin^8 \theta] \cos 2n\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(M_{j_2}) &= [\sigma_{1j}p_{71} \cos^6 \theta + (\sigma_{1j}p_{72} + \sigma_{2j}p_{71}) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + (\sigma_{1j}p_{73} + \sigma_{2j}p_{72}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \sigma_{2j}p_{73} \sin^6 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(M_{j_3}) &= [\sigma_{1j}p_{81} \cos^8 \theta + (\sigma_{1j}p_{82} + \sigma_{2j}p_{81}) \cos^6 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + (\sigma_{1j}p_{83} + \sigma_{2j}p_{82}) \cos^4 \theta \sin^4 \theta + \\
&\quad + (\sigma_{1j}p_{84} + \sigma_{2j}p_{83}) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + \sigma_{2j}p_{84} \sin^8 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(S_1) &= [(p_{21} + p_{51}) \cos^3 \theta \sin \theta + (p_{22} + p_{52}) \cos \theta \sin^3 \theta] \sin 2n\theta, \\
\theta(S_2) &= [(p_{31} + p_{61}) \cos^5 \theta \sin \theta + (p_{32} + p_{62}) \cos^3 \theta \sin^3 \theta + \\
&\quad + (p_{33} + p_{63}) \cos \theta \sin^5 \theta] \sin 2n\theta, \\
\theta(S_3) &= [(p_{11} + p_{41}) \cos^7 \theta \sin \theta + (p_{12} + p_{42}) \cos^5 \theta \sin^3 \theta + \\
&\quad + (p_{13} + p_{43}) \cos^3 \theta \sin^5 \theta + \\
&\quad + (p_{14} + p_{44}) \cos \theta \sin^7 \theta + \sigma_{2j}p_{44} \sin^8 \theta] \sin 2n\theta, \\
\theta(H_2) &= [p_{71} \cos^5 \theta \sin \theta + p_{72} \cos^3 \theta \sin^3 \theta + p_{73} \cos \theta \sin^5 \theta] \sin 2n\theta, \\
\theta(H_3) &= [p_{81} \cos^7 \theta \sin \theta + p_{82} \cos^5 \theta \sin^3 \theta + \\
&\quad + p_{83} \cos^3 \theta \sin^5 \theta + p_{84} \cos \theta \sin^7 \theta] \sin 2n\theta, \\
\theta(w_1) &= [p_{71} \cos^4 \theta + p_{72} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + p_{73} \sin^4 \theta] \cos 2n\theta, \\
\theta(w_2) &= [p_{81} \cos^6 \theta + p_{82} \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + p_{83} \cos^2 \theta \sin^4 \theta + p_{84} \sin^6 \theta] \cos 2n\theta, \\
\begin{cases} \theta(u_1) \\ \theta(v_1) \end{cases} &= \begin{bmatrix} \{p_{21}\} \\ \{p_{51}\} \end{bmatrix} \cos^2 \theta + \begin{bmatrix} \{p_{22}\} \\ \{p_{52}\} \end{bmatrix} \sin^2 \theta \begin{bmatrix} \{\cos \theta\} \\ \{\sin \theta\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\cos(2n+1)\theta\} \\ \{\sin(2n+1)\theta\} \end{bmatrix}, \\
\begin{cases} \theta(u_2) \\ \theta(v_2) \end{cases} &= \begin{bmatrix} \{p_{31}\} \\ \{p_{61}\} \end{bmatrix} \cos^4 \theta + \begin{bmatrix} \{p_{32}\} \\ \{p_{62}\} \end{bmatrix} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + \begin{bmatrix} \{p_{33}\} \\ \{p_{63}\} \end{bmatrix} \sin^4 \theta \begin{bmatrix} \{\cos \theta\} \\ \{\sin \theta\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\cos(2n+1)\theta\} \\ \{\sin(2n+1)\theta\} \end{bmatrix}, \\
\begin{cases} \theta(u_3) \\ \theta(v_3) \end{cases} &= \begin{bmatrix} \{p_{11}\} \\ \{p_{41}\} \end{bmatrix} \cos^6 \theta + \begin{bmatrix} \{p_{12}\} \\ \{p_{42}\} \end{bmatrix} \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad + \begin{bmatrix} \{p_{13}\} \\ \{p_{43}\} \end{bmatrix} \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \begin{bmatrix} \{p_{14}\} \\ \{p_{44}\} \end{bmatrix} \sin^6 \theta \begin{bmatrix} \{\cos \theta\} \\ \{\sin \theta\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\cos(2n+1)\theta\} \\ \{\sin(2n+1)\theta\} \end{bmatrix}, \\
\theta(Q_{j_1}) &= [\sigma_{1j}p_{71} \cos^6 \theta + (\sigma_{1j}p_{72} + \sigma_{2j}p_{71}) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{1j}p_{73} + \\
&\quad + \sigma_{2j}p_{72}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \sigma_{2j}p_{73} \sin^6 \theta] \frac{\theta_{10}}{\theta_9} \begin{bmatrix} \{\cos(2n+1)\theta\} \\ \{\sin(2n+1)\theta\} \end{bmatrix}, \\
\theta(Q_{j_2}) &= [\sigma_{1j}p_{81} \cos^8 \theta + (\sigma_{1j}p_{82} + \sigma_{2j}p_{81}) \cos^6 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{1j}p_{83} + \\
&\quad + \sigma_{2j}p_{82}) \cos^4 \theta \sin^4 \theta + (\sigma_{1j}p_{84} + \sigma_{2j}p_{83}) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + \\
&\quad + \sigma_{2j}p_{84} \sin^8 \theta] \frac{\theta_{10}}{\theta_9} \begin{bmatrix} \{\cos(2n+1)\theta\} \\ \{\sin(2n+1)\theta\} \end{bmatrix}, \\
\theta(Q_{j_3}) &= [p_{71} \cos^5 \theta \sin \theta + p_{72} \cos^3 \theta \sin^3 \theta + \\
&\quad + p_{73} \cos \theta \sin^5 \theta] \begin{bmatrix} \{\sin(2n+1)\theta\} \\ \{\cos(2n+1)\theta\} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\theta(Q_{j4}) = [p_{81} \cos^7 \theta \sin \theta + p_{82} \cos^5 \theta \sin^3 \theta + p_{83} \cos^3 \theta \sin^5 \theta + p_{84} \cos \theta \sin^7 \theta] \begin{cases} \sin(2n+1)\theta \\ \cos(2n+1)\theta \end{cases}. \quad (23)$$

Вирази (18)–(23) – оригінали для компонент напружено-деформованого стану ортотропної оболонки.

Розглянемо випадок, коли джерело тепла рухається уздовж осі x' зі сталою швидкістю v' . Покладемо в (1) $x(\tau) = v\tau$, $y(\tau) = 0$. Введемо рухому систему координат $x'_1 = x' - v'\tau$, $y'_1 = y'$. Тоді у виразах (18)–(23)

$$r^2 = (x' - v'\tau)^2 + (y')^2.$$

Для чисельних досліджень впливу ортотропії на напружено-деформований стан оболонки брали склопласт косокутної намотки, який має сильну анізотропію і має такі термомеханічні властивості: $E_1 = 3.673 \cdot 10^3$ МПа, $E_2 = 9.807 \cdot 10^2$ МПа, $G_{12} = 3.923 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_1 = 0.2798$, $\nu_2 = 0.0747$, $\alpha_1 = -0.7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $\alpha_2 = 3.8 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $a_{11} = 2.79 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}$, $a_{22} = 1.21 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}$, де $a_{ii} = \lambda_{ii}/c\rho$ – коефіцієнти теплопровідності вздовж головних напрямків. Нехай $\lambda_{33} = \lambda_{22}$, тоді $\lambda_1 = 2.306$, $\lambda_2 = 1$.

При проведенні чисельних розрахунків для ізотропного матеріалу покладемо $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$, $E = \sqrt{E_1 E_2}$, $\alpha = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ та $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

На рис. 1 і 2 наведено графіки залежностей від координати x' мембранних зусиль N_1 (рис. 1) та N_2 (рис. 2). Криві 1 та 2 показують розподіл зусиль для ортотропного матеріалу при $\varphi = 0$ (криві 1) та $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (криві 2), криві 3 відповідають ізотропному матеріалу. Іноді для спрощення розв'язку задачі покладають, що між пружними сталими існує залежність [10]

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}. \quad (24)$$

Штриховими лініями 4 показано розподіл зусиль для цього випадку при $\varphi = 0$. Тут $Bi^\pm = 0.01$.

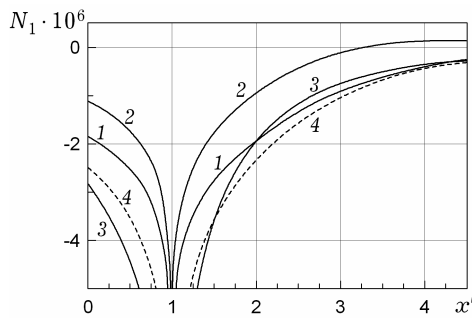


Рис. 1

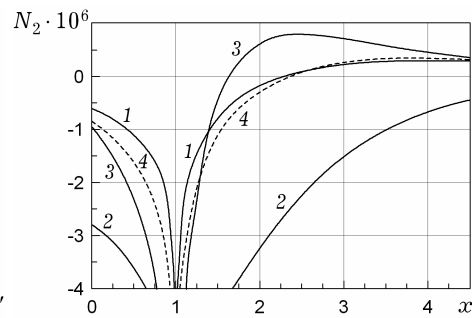


Рис. 2

На рис. 3–6 подано графіки зміни мембранних зусиль N_1 (рис. 3), N_2 (рис. 4) при дії рухомого зосередженого джерела середньої температури одиничної густини ($W_1^* = 1$, $W_2^* = 0$) та згинальних моментів M_1 (рис. 5), M_2 (рис. 6) при дії рухомого зосередженого згинального джерела теплової одиничної густини ($W_1^* = 0$, $W_2^* = 1$) для ортотропного (криві 1) та ізотропного (криві 2) матеріалу для двох випадків теплообміну: суцільні лінії відповідають $Bi^\pm = 0.01$, штрихові – $Bi^\pm = 1.0$.

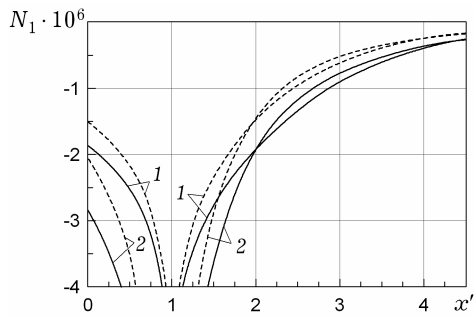


Рис. 3

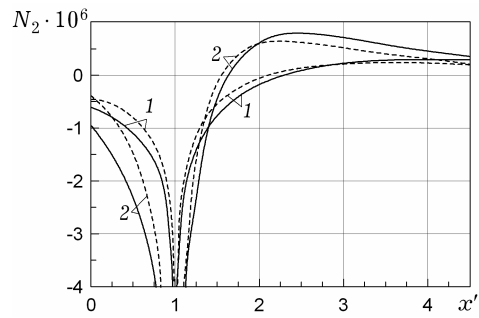


Рис. 4

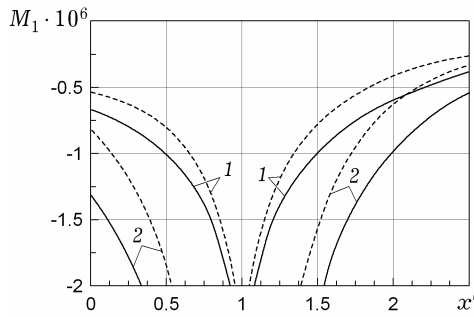


Рис. 5

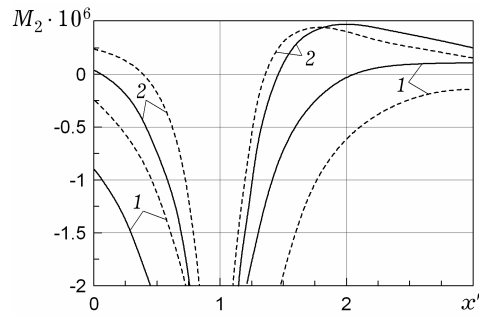


Рис. 6

На рис. 7 і 8 наведено залежності від координати x' мембранного зусилля S (рис. 7) і крутного моменту H (рис. 8). Криві 1 показують розподіл зусилля і моменту для ортотропного матеріалу при $\varphi = 0$, криві 2 – для ізотропного, криві 3 – для випадку (24). Суцільні лінії відповідають $Bi^\pm = 0.01$, штрихові – $Bi^\pm = 1.0$. Тут та вище $k_1 = k_2 = 0.025$, $\tau' = 1$, $\nu' = 1$.

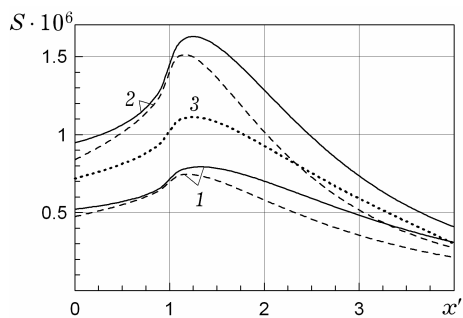


Рис. 7

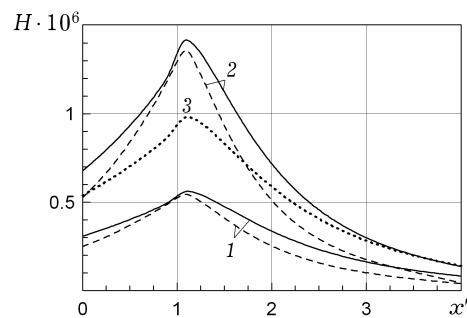


Рис. 8

Аналіз графіків, наведених на рис. 1–8, дозволяє зробити висновок, що параметри ортотропії і теплообміну значно впливають на поведінку силових факторів в оболонці. Залежність компонент термопружного стану оболонки від кутової координати для ортотропного матеріалу не є симетричною. Збільшення інтенсивності теплообміну призводить до зменшення за абсолютною величиною значень внутрішніх силових факторів. Крім того, використання рівняння (24) також впливає на розподіл термопружних компонент.

1. Авраменко Л. Е. Теплопроводность тонких ортотропных оболочек под действием движущегося сосредоточенного источника тепла // Вісн. Донецьк. ун-у. Сер. А. Природничі науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 165–169.
2. Авраменко Л. Е., Шевченко В. П. Динамическая задача теплопроводности для оболочек при действии локальных источников тепла // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 153–157.

3. Авраменко Л. Е., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние оболочек под действием сосредоточенных источников тепла // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 70–80.
4. Авраменко Л. Е. Теплопроводность та термопружність ізотропних оболонок під дією рухомого зосередженого джерела тепла // Машинознавство. – 2007. – Вип. 2. – С. 14–22.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
6. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1975. – 302 с.
7. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. Температурные напряжения от объемных источников. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
8. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
9. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
10. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – Москва: Физматгиз, 1964. – 636 с.
11. Takezono Shigeo, Tao Katsumi, Inamura Eijiroh, Ozawa Yoshihiro. Температурные напряжения и деформации в оболочках вращения средней толщины из функционально-градиентного материала при термическом импульсном нагружении // Nihon Kikai gakkai ronbunshu. A. – 2000. – 66, No. 645. – P. 1060–1067.
12. Wang Yuanchun, Tong Yujing. Boundary element analysis of orthotropic plane thermoelastic problems // Yingyong lixue xuebao. – Chin. J. Appl. Mech. – 1997. – 14, No. 4. – P. 76–99.
13. Wu Pei-liang, Lu Yan-ping. A new approximate fundamental solution for orthotropic plate // J. Donghua Univ. – 2002. – 19, No. 1. – P. 76–80.

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Решена задача термоупругости для тонких ортотропных оболочек неотрицательной гауссовой кривизны под действием движущегося по поверхности оболочки сосредоточенного источника тепла. Заданы линейное распределение температуры по толщине оболочки и конвективный теплообмен по закону Ньютона с боковых поверхностей оболочки. С помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа получено решение в аналитическом виде. Исследовано влияние термомеханических свойств материала, а также параметров теплообмена с окружающей средой на компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки.

THERMOELASTICITY OF ORTHOTROPIC SHELLS UNDER MOVING CONCENTRATED SOURCE OF HEAT

The problem of thermoelasticity for thin orthotropic shells of non-negative curvature under moving on the shell surface source of heat is solved. Linear distribution of temperature across the thickness of a shell and convection heat exchange according to the Newton law from its lateral surfaces is given. Using Fourier and Laplace integral transformations the solution in analytical form is obtained. The influence of thermo-mechanic parameters of the shell and parameters of heat exchange on the components of the stress-strain state of the shell is studied.

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
24.11.08